Comment. Math. Helvetici **54** (1979) 42–60 Birkhäuser Verlag, Basel

Bestimmung konvexer Körper durch Krümmungsmaße

ROLF SCHNEIDER

1. Einleitung

Jede hinreichend glatte Eifläche im dreidimensionalen euklidischen Raum mit konstanter mittlerer oder konstanter Gaußscher Krümmung ist eine Sphäre. Dieses erstmals (unter zusätzlichen Voraussetzungen) von Liebmann [11] bewiesene Ergebnis, einer der klassischen Sätze der globalen Differentialgeometrie, hat bekanntlich mannigfache Verallgemeinerungen in verschiedensten Richtungen erfahren. Die unmittelbare Erweiterung auf höhere Dimensionen, also die Kennzeichnung der Sphären als der einzigen Eihyperflächen, auf denen eine elementarsymmetrische Funktion der Hauptkrümmungen konstant ist, stammt von Süss [16] (siehe auch Bonnesen-Fenchel [4, S. 117 f.]). Im folgenden soll dieser Satz auf allgemeine konvexe Hyperflächen ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzungen ausgedehnt werden. Die Krümmungsfunktionen müssen dann durch passend definierte Maße ersetzt werden. Solche Maße sind in allgemeinerem Rahmen von Federer [8] eingeführt worden.

Die Ausdehnung ursprünglich differentialgeometrischer Sätze auf konvexe (oder allgemeinere) Flächen ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzungen ist bekanntlich seit langem mit großem Erfolg betrieben worden; Zusammenfassungen findet man u.a. in den Büchern von Aleksandrov [2], Busemann [5], Pogorelov [12]. Jedoch hat der Satz von Liebmann-Süss bisher noch keine entsprechende Verallgemeinerung erfahren.

Die hierfür benötigten Federerschen Krümmungsmaße kann man für konvexe Körper folgendermaßen erhalten (siehe auch [13]). Ist K ein konvexer Körper (kompakte, konvexe Teilmenge mit inneren Punkten) im n-dimensionalen euklidischen Vektorraum $E^n (n \geq 2)$ und ist $x \in E^n$, so sei $p(K, x)$ der (eindeutig bestimmte) Punkt in K mit kleinstem Abstand von x; dieser kleinste Abstand sei mit $r(K, x)$ bezeichnet. Für eine Borelmenge $\beta \subset E^n$ und eine Zahl $\rho > 0$ werde sodann

$$A_\rho(K, \beta) := \{x \in E^n : 0 < r(K, x) \leq \rho \quad \text{und} \quad p(K, x) \in \beta\}$$

gesetzt. Diese "Parallelmenge von $\partial K \cap \beta$ im Abstand ρ" ist ebenfalls eine

Borelmenge, und ihr Lebesguesches Maß läßt sich ausdrücken in der Form

$$\mathscr{L}^n(A_\rho(K, \beta)) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \rho^{n-m} \binom{n}{m} C_m(K, \beta).$$

Durch diese "lokale Steinerformel" werden dem konvexen Körper K positive Maße $C_0(K, \cdot), \ldots, C_{n-1}(K, \cdot)$ auf den Borelmengen des E^n zugeordnet. Sie heißen die *Krümmungsmaße* von K (und unterscheiden sich von Federers [8] Maßen $\Phi_0(K, \cdot), \ldots, \Phi_{n-1}(K, \cdot)$ nur durch eine unterschiedliche Normierung). Ist der Rand ∂K von K eine zweimal stetig differenzierbare, reguläre Hyperfläche, so gilt

$$C_m(K, \beta) = \int_{\partial K \cap \beta} H_{n-1-m}\, dF, \tag{1.1}$$

wo H_k die k-te normierte elementarsymmetrische Funktion der Hauptkrümmungen von ∂K und dF das Oberflächenelement bezeichnet. Einfache anschauliche Deutungen der Maße $C_m(K, \cdot)$ sind auch für Polytope möglich, ferner für allgemeine konvexe Körper in den Fällen $m = n-1$ und $m = 0$: $C_{n-1}(K, \beta)$ ist die Oberfläche (das $(n-1)$-dimensionale Hausdorffmaß) von $\partial K \cap \beta$, und $C_0(K, \beta)$ ist das sphärische Lebesgue-Maß des sphärischen Bildes von $\partial K \cap \beta$ (Menge aller äußeren Normaleneinheitsvektoren an K in Punkten von $\partial K \cap \beta$). Das Maß $C_0(K, \cdot)$ ist schon von Aleksandrov [1, §6], [2, Kap. V, §2] betrachtet worden.

Nach diesen Erläuterungen können wir unser Hauptergebnis formulieren.

(1.2) SATZ. *Sei $K \subset E^n$ ein konvexer Körper, $m \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ und a eine reelle Zahl. Gilt*

$$C_m(K, \cdot) = aC_{n-1}(K, \cdot), \tag{1.3}$$

so ist K eine Kugel.

Ist der Rand von K eine zweimal stetig differenzierbare, reguläre Hyperfläche, so ist die Bedingung (1.3) wegen (1.1) gleichwertig mit der Voraussetzung, daß die Krümmungsfunktion H_{n-1-m} der Randfläche ∂K konstant ist. Durch (1.2) wird also in der Tat der Satz von Liebmann-Süss verallgemeinert. Der Spezialfall $m = 0$ ist nicht neu (vgl. a. [14, Satz 1]); er ist sogar in verschärfter Form in Gestalt eines Stabilitätssatzes bewiesen worden (Diskant [7]). Ähnliche Ergebnisse sind bekannt für die von Aleksandrov und Fenchel-Jessen eingeführten

Oberflächenfunktionen, welche die elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungsradien verallgemeinern (siehe z.B. Busemann [5, S. 70]).

2. Beweis des Satzes, erster Teil

Zunächst einige Bezeichnungen: S^{n-1} sei die Einheitssphäre (mit Mittelpunkt 0) des E^n. Das kartesische Produkt $E^n \times S^{n-1}$ bezeichnen wir mit Ω und versehen es mit der Produkttopologie. Für $X = E^n$, S^{n-1}, Ω bezeichnet $\mathscr{B}(X)$ die σ-Algebra der Borelmengen in X. $\mathscr{L}^n$ ist das n-dimensionale Lebesguemaß und λ_{n-1} das sphärische Lebesguemaß auf S^{n-1}. Die Menge der konvexen Körper des E^n sei mit $\mathfrak{K}^n$ bezeichnet. Für $K \in \mathfrak{K}^n$ ist $R(K)$ die Menge der regulären und $S(K)$ die Menge der singulären Randpunkte von K. Ein Paar $(x, u) \in \Omega$ heißt *Stützelement* von K, wenn $x \in \partial K$ und u ein äußerer Normalenvektor an K in x ist. $\sum(K)$ sei die Menge aller Stützelemente von K. Für $\omega \subset S^{n-1}$ bezeichnet $\tau(K, \omega)$ die Menge aller Randpunkte von K, in denen ein zu ω gehörender Normalenvektor an K existiert.

Unser Beweis des Satzes erfordert es, zunächst einen Zusammenhang zwischen den Krümmungsmaßen und den Oberflächenfunktionen herzustellen. Dies geschieht, indem wir eine gemeinsame Verallgemeinerung beider Serien von Maßen betrachten.

Für einen konvexen Körper $K \in \mathfrak{K}^n$ und einen Punkt $x \in E^n \backslash K$ sei

$$u(K, x) := \frac{x - p(K, x)}{r(K, x)}$$

gesetzt. Sei $\rho > 0$ und K_ρ der Parallelkörper von K im Abstand ρ. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f_\rho : K_\rho \backslash K &\to \quad \Omega \\ x \quad &\mapsto (p(K, x), u(K, x)) \end{aligned}$$

ist stetig, insbesondere meßbar. Sei $\mu_\rho(K, \cdot)$ das Bildmaß des (auf $K_\rho \backslash K$ eingeschränkten) Lebesgueschen Maßes unter f_ρ. Für $\eta \in \beta(\Omega)$ ist also $\mu_\rho(K, \eta)$ das Maß der Menge

$$M_\rho(K, \eta) := f_\rho^{-1}(\eta) = \{x \in E^n : 0 < r(K, x) \leq \rho \quad \text{und} \quad (p(K, x), u(K, x)) \in \eta\}.$$

Speziell ist

$$\mu_\rho(K, \Omega) = \mathscr{L}^n(K_\rho \backslash K) = \sum_{j=1}^{n} \rho^j \binom{n}{j} W_j(K), \tag{2.1}$$

wo $W_j(K)$ das j-te Quermaßintegral von K bezeichnet.

(2.2) BEHAUPTUNG. *Ist $(K_i)_{i\in\mathbf{N}}$ eine (im Sinne der Hausdorffmetrik) gegen K konvergierende Folge in $\mathfrak{K}^n$, so ist die Folge $(\mu_\rho(K_i,\cdot))_{i\in\mathbf{N}}$ von Borelmaßen auf Ω schwach konvergent gegen $\mu_\rho(K,\cdot)$.*

Beweis. Sei $\eta\subset\Omega$ offen. Sei $x\in M_\rho(K,\eta)$ und $r(K,x)<\rho$. Es gilt $r(K_i,x)\to r(K,x)$ und $(p(K_i,x),u(K_i,x))\to(p(K,x),u(K,x))$ für $i\to\infty$. Für fast alle i gilt daher $r(K_i,x)<\rho$ und wegen der Offenheit von η auch $(p(K_i,x),u(K_i,x))\in\eta$, also $x\in M_\rho(K_i,\eta)$. Somit gilt

$$M_\rho(K,\eta)\backslash\partial K_\rho\subset\liminf_{i\to\infty} M_\rho(K_i,\eta)$$

und daher

$$\mu_\rho(K,\eta)=\mathscr{L}^n(M_\rho(K,\eta)\backslash\partial K_\rho)\leq\mathscr{L}^n(\liminf_{i\to\infty} M_\rho(K_i,\eta))$$

$$\leq\liminf_{i\to\infty}\mathscr{L}^n(M_\rho(K_i,\eta))=\liminf_{i\to\infty}\mu_\rho(K_i,\eta).$$

Da dies für alle offenen Mengen η gilt und da wegen (2.1) auch $\mu_\rho(K_i,\Omega)\to u_\rho(K,\Omega)$ gilt, folgt die Behauptung (2.2).

Nun sei $P\in\mathfrak{K}^n$ ein Polytop. Durch passende Zerlegung der Menge $M_\rho(P,\eta)$ und Anwendung des Satzes von Fubini findet man

$$\mu_\rho(P,\eta)=\sum_{m=0}^{n-1}\rho^{n-m}\frac{1}{n-m}\sum_{F\in\mathscr{F}^m(P)}\int_F\lambda_{n-1-m}(\sigma(P,F)\cap\eta_x)\,d\mathscr{L}^m(x). \tag{2.3}$$

Dabei ist $\mathscr{F}^m(P)$ die Menge der m-dimensionalen Seiten von P, $\sigma(P,F)$ das sphärische Bild der Seite F und

$$\eta_x:=\{u\in S^{n-1}:(x,u)\in\eta\}.$$

Aufgrund von (2.2) und (2.3) können wir jetzt die Schlußweise, die zum Beweis von [13, (3.11)] führte, nahezu wörtlich übertragen und erhalten:

(2.4) BEHAUPTUNG. *Zu jedem konvexen Körper $K\in\mathfrak{K}^n$ gibt es endliche, positive Maße $\Theta_0(K,\cdot),\ldots,\Theta_{n-1}(K,\cdot)$ auf $\mathscr{B}(\Omega)$, so daß für $\eta\in\mathscr{B}(\Omega)$ und $\rho>0$*

das Maß $\mu_\rho(K, \eta)$ der Parallelmenge $M_\rho(K, \eta)$ gegeben ist durch

$$\mu_\rho(K, \eta) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \rho^{n-m} \binom{n}{m} \Theta_m(K, \eta). \tag{2.5}$$

Wie ein Vergleich mit der Definition der Krümmungsmaße in der Einleitung zeigt, ist

$$C_m(K, \beta) = \Theta_m(K, \beta \times S^{n-1}), \qquad \beta \in \mathscr{B}(E^n) \tag{2.6}$$

für $m = 0, \ldots, n-1$. Andererseits ist durch

$$S_m(K, \omega) = \Theta_m(K, E^n \times \omega), \qquad \omega \in \mathscr{B}(S^{n-1}), \tag{2.7}$$

gerade die m-te Oberflächenfunktion von K im Sinne von Fenchel-Jessen [9] gegeben, wie aus der letzten Gleichung in [9, S. 31] oder aus [13, §4] hervorgeht.

Die Maße $\Theta_m(K, \cdot)$ sind konzentriert auf der Menge $\sum(K)$ der Stützelemente von K: Ist $x \in M_\rho(K, \eta)$, so ist $(p(K, x), u(K, x)) \in \eta \cap \sum(K)$; es ist also $\mu_\rho(K, \eta) = \mu_\rho(K, \eta \cap \sum(K))$ für $\rho > 0$ und daher nach (2.5)

$$\Theta_m(K, \eta) = \Theta_m\left(K, \eta \cap \sum(K)\right) \quad \text{für} \quad \eta \in \mathscr{B}(\Omega), \quad m = 0, \ldots, n-1. \tag{2.8}$$

Nun können wir einen Zusammenhang zwischen Krümmungsmaßen und Oberflächenfunktionen in Form von Ungleichungen herleiten.

(2.9) HILFSSATZ. *Sei $m \in \{0, \ldots, n-1\}$, sei $\omega \subset S^{n-1}$ abgeschlossen. Dann gilt*

$$C_m(K, \tau(K, \omega) \cap R(K)) \leq S_m(K, \omega) \leq C_m(K, \tau(K, \omega)).$$

Beweis. Sei $(x, u) \in \sum(K)$ ein Stützelement von K mit $x \in \tau(K, \omega) \cap R(K)$. Dann ist u Normalenvektor an K in x. Wegen $x \in \tau(K, \omega)$ existiert in x ein Normalenvektor aus ω, der aber wegen $x \in R(K)$ mit u übereinstimmen muß, es ist also $u \in \omega$. Damit ist

$$([\tau(K, \omega) \cap R(K)] \times S^{n-1}) \cap \sum(K) \subset (E^n \times \omega) \cap \sum(K)$$

gezeigt. Die hier auftretenden Mengen sind Borelmengen ($\tau(K, \omega)$ und $\sum(K)$ sind abgeschlossen, $\partial K \backslash R(K)$ ist eine F_σ-Menge), also folgt

$$\Theta_m\left(K, ([\tau(K, \omega) \cap R(K)] \times S^{n-1}) \cap \sum(K)\right) \leq \Theta_m\left(K, (E^n \times \omega) \cap \sum(K)\right)$$

und damit nach (2.6), (2.7), (2.8)

$$C_m(K, \tau(K, \omega) \cap R(K)) = \Theta_m(K, ([\tau(K, \omega) \cap R(K)] \times S^{n-1}) \cap \sum(K))$$
$$\leq \Theta_m\left(K, (E^n \times \omega) \cap \sum(K)\right) = S_m(K, \omega).$$

Sei $(x, u) \in \sum(K)$ ein Stützelement von K mit $u \in \omega$. Dann ist $x \in \tau(K, \omega)$. Also gilt

$$(E^n \times \omega) \cap \sum(K) \subset (\tau(K, \omega) \times S^{n-1}) \cap \sum(K).$$

Analog wie oben ergibt sich

$$S_m(K, \omega) = \Theta_m\left(K, (E^n \times \omega) \cap \sum(K)\right)$$
$$\leq \Theta_m\left(K, (\tau(K, \omega) \times S^{n-1}) \cap \sum(K)\right) = C_m(K, \tau(K, \omega)).$$

Damit ist (2.9) bewiesen.

Für eine spätere Anwendung wollen wir zunächst noch eine weitere Aussage über Krümmungsmaße bereitstellen. Für $\lambda > 0$ erklären wir die Abbildung $T_\lambda : \Omega \to \Omega$ durch $T_\lambda(x, u) := (x + \lambda u, u)$. Dann gilt für $K \in \mathfrak{K}^n$, $\eta \in \mathscr{B}(\Omega)$, $\lambda = 0$ und $m = 0, \ldots, n-1$ die verallgemeinerte Steinersche Formel

$$\Theta_m(K_\lambda, T_\lambda \eta) = \sum_{j=0}^{m} \lambda^j \binom{m}{j} \Theta_{m-j}(K, \eta). \tag{2.10}$$

Zum Beweis bemerken wir zunächst, daß für $x \in E^n \setminus K_\lambda$ die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} p(K_\lambda, x) &= p(K, x) + \lambda u(K, x), \\ u(K_\lambda, x) &= u(K, x), \\ r(K_\lambda, x) &= r(K, x) - \lambda \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

gelten. Sei nämlich $x \in E^n \setminus K_\lambda$ und y der Schnittpunkt der Verbindungsstrecke von x und $p(K, x)$ mit dem Rand von K_λ. Angenommen, es wäre $p(K_\lambda, x) \neq y$. Dann ist $\|x - p(K_\lambda, x)\| < \|x - y\|$. Mit $z := p(K, p(K_\lambda, x))$ gilt wegen $p(K_\lambda, x) \in \partial K_\lambda$ und $y \in \partial K_\lambda$

$$\|p(K_\lambda, x) - z\| = \lambda \leq \|y - p(K, x)\|$$

also

$$\|x-z\| \leq \|x-p(K_\lambda, x)\| + \|p(K_\lambda, x)-z\| < \|x-y\| + \|y-p(K, x)\| = \|x-p(K, x)\|,$$

was der Definition von $p(K, x)$ widerspricht. Somit ist $p(K_\lambda, x) = y$. Dann muß $u(K, y) = u(K, x) = u(K_\lambda, x)$ sein. Hieraus folgt (2.11).

Aus (2.11) gewinnt man nun sofort die disjunkte Zerlegung

$$M_{\rho+\lambda}(K, \eta) = M_\lambda(K, \eta) \cup M_\rho(K_\lambda, T_\lambda \eta)$$

und hieraus

$$\mu_{\rho+\lambda}(K, \eta) = \mu_\lambda(K, \eta) + \mu_\rho(K_\lambda, T_\lambda \eta).$$

Einsetzen von (2.5) und Vergleich der Potenzen von ρ ergibt die Behauptung (2.10).

Nun beginnen wir mit dem Beweis von Satz (1.2). O.B.d.A. darf $a = 1$ angenommen werden, da dies stets durch eine Streckung erreichbar ist. Es sei also $K \in \mathfrak{K}^n$ ein konvexer Körper mit

$$\mathrm{C_m(K, \cdot) = C_{n-1}(K, \cdot)}. \tag{2.12}$$

Da $C_{n-1}(K, \beta)$ mit dem $(n-1)$-dimensionalen Hausdorffmaß von $\partial K \cap \beta$ übereinstimmt (siehe [13, (3.21)]), gilt nach einem Satz von Reidemeister (siehe z.B. Busemann [5, S. 13])

$$C_{n-1}(K, \partial K \backslash R(K)) = 0. \tag{2.13}$$

Sei $\omega \subset S^{n-1}$ abgeschlossen. Dann gilt

$$\begin{aligned} S_m(K, \omega) &\leq C_m(K, \tau(K, \omega)) && \text{nach (2.9)} \\ &= C_{n-1}(K, \tau(K, \omega)) && \text{nach (2.12)} \\ &= C_{n-1}(K, \tau(K, \omega) \cap R(K)) && \text{nach (2.13)} \\ &= C_m(K, \tau(K, \omega) \cap R(K)) && \text{nach (2.12)} \\ &\leq S_m(K, \omega) && \text{nach (2.9).} \end{aligned}$$

Es folgt, daß hier überall das Gleichheitszeichen steht, insbesondere ist also

$$S_m(K, \omega) = C_{n-1}(K, \tau(K, \omega)) = S_{n-1}(K, \omega),$$

letzteres nach [13, (4.19) und (3.21)]. Gilt die Gleichheit $S_m(K,\omega)=S_{n-1}(K,\omega)$ für alle abgeschlossenen Mengen $\omega\subset S^{n-1}$, so gilt sie für alle Borelmengen $\omega\subset S^{n-1}$. Es ist also $S_m(K,\cdot)=S_{n-1}(K,\cdot)$. Aus [15, (3.8)] folgt jetzt, daß K ein m-Tangentialkörper einer Einheitskugel B ist. Gemäß [15, (2.2)] ist hiermit äquivalent:

(2.14) *Jede* $(n-m-1)$*-extreme Stützebene an* K *ist Stützebene an* B.

Es bleibt zu zeigen, daß K mit B zusammenfällt. Für $m=0$ ist das klar, da jede Stützebene $(n-1)$-extrem ist. Im Fall $m=1$ ist K ein Kappenkörper von B (Bonnesen-Fenchel [4, S. 17–18]). Angenommen, es wäre $K\neq B$. Dann besitzt K wenigstens eine "Kappe", das heißt es gibt einen Punkt $x\in E^n\backslash B$ derart, daß die Punktmenge

$$M:=[\partial\operatorname{conv}(B\cup\{p\})]\backslash(B\cup\{p\})$$

im Rand von K liegt. M ist Teil einer Kegelhyperfläche. Wegen (1.3) müßte auf der zweimal stetig differenzierbaren Hyperfläche M die Krümmungsfunktion H_{n-2} konstant sein, was nicht der Fall ist. Somit ist $K=B$.

Die hier angewandte Schlußweise wollen wir auf $m\geq 2$ ausdehnen. Ist $K\neq B$, so ist die Punktmenge $\partial K\backslash(B\cup S(K))$ nicht leer. Jede ihrer Zusammenhangskomponenten ist eine differenzierbare Hyperfläche. Im Fall $m\geq 2$ braucht sie aber, wie Beispiele zeigen, nicht zweimal differenzierbar zu sein. Wir können nicht einmal ausschließen, daß die Punkte, in denen keine zweimalige Differenzierbarkeit besteht, dicht liegen. Daher ist die obige Schlußweise nicht unmittelbar übertragbar. Nun sind konvexe Hyperflächen jedoch fast überall zweimal differenzierbar. Dies reicht aus, um (im vierten Abschnitt) den Beweis zu Ende zu führen. Der nächste Abschnitt enthält die erforderlichen Vorbereitungen, im wesentlichen eine Verallgemeinerung eines Satzes von Aleksandrov.

3. Normale Punkte

Wir wählen im E^n einen Einheitsvektor e_n und bezeichnen den dazu orthogonalen Unterraum mit E^{n-1}. Gegeben sei eine konvexe Funktion z auf dem Abschluß $\bar{U}$ einer beschränkten, offenen, konvexen Umgebung U von 0 in E^{n-1} mit $z\geq 0$ und $z(0)=0$. Für $h>0$ schneidet dann die Hyperebene $E^{n-1}+he_n$ den Epigraphen von z,

$$K_z:=\{x+\lambda e_n : x\in\bar{U}, \lambda\geq z(x)\},$$

in einer $(n-1)$-dimensionalen kompakten, konvexen Menge. Die hieraus durch Orthogonalprojektion in E^{n-1} und Streckung mit dem Faktor $1/\sqrt{2h}$ entstehende konvexe Menge sei mit $D(h)$ bezeichnet. Existiert der (Hausdorffsche abgeschlossene) Limes $\lim_{h\to 0+} D(h)$, so nennt man diese Menge die *Indikatrix* von K_z (oder z) in 0. Der Punkt 0 heißt *normaler* Punkt von K_z, wenn in 0 die Indikatrix existiert und von einer Fläche zweiter Ordnung mit Zentrum 0 berandet wird.

Wir setzen jetzt voraus, daß 0 normaler Punkt von K_z ist. Die Hauptkrümmungen $k_1, \ldots, k_{n-1}$ von K_z in 0 sind dann wie üblich erklärt als die reziproken Quadrate der (wegen der Konvexität der Indikatrix reellen) Halbachsen der Indikatrix. Wir wählen in E^{n-1} eine orthonormierte Basis $e_1, \ldots, e_{n-1}$ in den Hauptachsenrichtungen der Indikatrix. Für $x \in E^n$ bezeichnen dann in diesem Abschnitt $x_1, \ldots, x_n$ stets die Koordinaten bezüglich der Basis $e_1, \ldots, e_n$.

Wie Aleksandrov [1] gezeigt hat, besitzt z im normalen Punkt 0 in einem verallgemeinerten Sinn ein zweites Differential. Wir wollen (für $i \in \{1, \ldots, n-1\}$) die Zahl ξ_i eine verallgemeinerte Ableitung von z nach der i-ten Koordinate im Punkt $x \in U$ nennen, wenn es Zahlen $\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_{n-1}$ gibt derart, daß der Vektor $\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_{n-1} e_{n-1} - e_n$ äußerer Normalenvektor einer Stützebene an K_z im Punkt $x + z(x)e_n$ ist. Eine Funktion $z_i : U \to \mathbf{R}$ heiße verallgemeinerte Ableitung von z nach der i-ten Koordinate, wenn für jedes $x \in U$ der Wert $z_i(x)$ eine verallgemeinerte Ableitung von z nach der i-ten Koordinate in x ist. Aleksandrovs [1] Ergebnis läßt sich dann folgendermaßen formulieren. Es gibt eine monoton nicht abnehmende Funktion ψ mit

$$\lim_{r\to 0+} \psi(r) = 0,$$

so daß

$$|z_i(x) - k_i x_i| \leq \psi(\|x\|)\|x\| \quad \text{für} \quad x \in U \tag{3.1}$$

gilt für $i = 1, \ldots, n-1$ und jede verallgemeinerte Ableitung z_i von z nach der i-ten Koordinate. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir ψ so wählen, daß auch

$$|z(x) z_i(x)| \leq \psi(\|x\|)\|x\| \quad \text{für} \quad x \in U \tag{3.2}$$

gilt.

Für eine beschränkte Teilmenge $\beta' \subset E^{n-1}$ setzen wir

$$\|\beta'\| := \sup_{x\in\beta'} \|x\|$$

und für $\epsilon > 0$

$$U_\epsilon(\beta') := \{x \in E^{n-1} : \|x - y\| \leq \epsilon \quad \text{für ein} \quad y \in \beta'\}.$$

Für Teilmengen von E^{n-1} ist die Randbildung ∂ im folgenden relativ zu E^{n-1} gemeint; entsprechendes gilt für zu E^{n-1} parallele Hyperebenen. Mit F bezeichnen wir das $(n-1)$-dimensionale Hausdorffmaß.

DEFINITION. Die Folge $(\beta_i')_{i \in \mathbf{N}}$ von Teilmengen von E^{n-1} heißt *normal* (bezüglich 0), wenn folgendes gilt: β_i' ist kompakt, $F(\beta_i') \neq 0$ $(i \in \mathbf{N})$,

$$\lim_{i \to \infty} \|\beta_i'\| = 0, \tag{3.3}$$

und für jede Folge $(\epsilon_i)_{i \in \mathbf{N}}$ positiver Zahlen mit

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\epsilon_i}{\|\beta_i'\|} = 0 \quad \text{ist} \tag{3.4}$$

$$\lim_{i \to \infty} \frac{F(U_{\epsilon_i}(\partial \beta_i'))}{F(\beta_i')} = 0. \tag{3.5}$$

Eine Folge $(\beta_i)_{i \in \mathbf{N}}$ von Teilmengen von ∂K_z heißt *normal*, wenn ihr durch Orthogonalprojektion in E^{n-1} eine normale Folge von Teilmengen von U entspricht.

Für jede Borelmenge $\beta \subset \partial K_z$, der durch Orthogonalprojektion in E^{n-1} eine Teilmenge von U entspricht, ist das Krümmungsmaß $C_m(K_z, \beta)$ erklärbar als $C_m(K_z \cap H, \beta)$, *wo* $H := \{x \in E^n : x_n \leq \lambda\}$ mit genügend großem λ ist. Wie üblich bezeichnet H_r die r-te normierte elementarsymmetrische Funktion der Hauptkrümmungen $k_1, \ldots, k_{n-1}$, hier im Punkt 0. Wir können nun das Hauptergebnis dieses Abschnitts formulieren.

(3.6) HILFSSATZ. *Ist* 0 *ein normaler Punkt von* K_z *und* $(\beta_i)_{i \in \mathbf{N}}$ *eine* (*bezüglich* 0) *normale Folge von Teilmengen von* ∂K_z, *so gilt*

$$\lim_{i \to \infty} \frac{C_m(K_z, \beta_i)}{C_{n-1}(K_z, \beta_i)} = H_{n-1-m} \tag{3.7}$$

für $m = 0, \ldots, n-1$.

Für $m = 0$ ist dies von Aleksandrov [1] bewiesen worden. Wir wandeln seine Beweismethode passend ab. Sei also $(\beta_i)_{i \in \mathbf{N}}$ eine normale Folge. Sei $\rho > 0$. Wir bilden die Mengen

$$\varphi(\beta_i) := \left\{x + \rho u : x \in \beta_i, (x, u) \in \sum(K_z)\right\},$$

also die Parallelfläche von β_i im Abstand ρ, und die in der Ebene $E^{n-1} - \rho e_n$ liegende Menge

$$\varphi'(\beta_i') := \left\{x + z(x)e_n + \lambda u : x \in \beta_i', (x + z(x)e_n, u) \in \sum(K_z), z(x) + \lambda\langle u, e_n\rangle = -\rho\right\}.$$

Ferner sei die affine Abbildung $\varphi^0 : E^{n-1} \to E^{n-1} - \rho e_n$ erklärt durch

$$\varphi^0(x) := -\rho e_n + \sum_{j=1}^{n-1} (1 + \rho k_j)x_j e_j, \qquad x \in E^{n-1}.$$

Dann ist

$$\frac{F(\varphi^0(\beta_i'))}{F(\beta_i')} = (1 + \rho k_1) \cdots (1 + \rho k_{n-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^j \binom{n-1}{j} H_j. \tag{3.8}$$

Wegen (3.3) gilt

$$\lim_{i\to\infty} \frac{F(\beta_i')}{F(\beta_i)} = 1 \quad \text{und} \tag{3.9}$$

$$\lim_{i\to\infty} \frac{F(\varphi'(\beta_i'))}{F(\varphi(\beta_i))} = 1, \tag{3.10}$$

denn es gilt $u \to e_n$ gleichmäßig für $x \to 0$ und $(x, u) \in \sum(K_z)$. Wir zeigen, daß auch

$$\lim_{i\to\infty} \frac{F(\varphi'(\beta_i'))}{F(\varphi^0(\beta_i'))} = 1 \tag{3.11}$$

gilt. Zum Beweis setzen wir

$$\epsilon_i := \sqrt{n-1}\,(\rho + 1)\psi(\|\beta_i'\|)\,\|\beta_i'\|, \qquad i \in \mathbf{N}; \tag{3.12}$$

dann ist die Bedingung (3.4) und damit auch (3.5) erfüllt. Sei $y \in \varphi'(\beta_i')$. Dann existiert ein Punkt $x \in \beta_i'$ mit

$$y = x + z(x)e_n + \lambda u,$$

wobei u ein äußerer Normalenvektor an K_z in $x+z(x)e_n$ ist, zum Beispiel

$$u=-e_n+\sum_{j=1}^{n-1} z_j(x)e_j,$$

wo $z_1,\ldots,z_{n-1}$ verallgemeinerte Ableitungen von z sind, und wobei λ so zu wählen ist, daß $y\in E^{n-1}-\rho e_n$ gilt. Es ist also

$$y=-\rho e_n+\sum_{j=1}^{n-1} [x_j+(z(x)+\rho)z_j(x)]e_j.$$

Für den Punkt $y^0:=\varphi^0(x)\in\varphi^0(\beta_i')$ gilt

$$y-y^0=\sum_{j=1}^{n-1} [\rho(z_j(x)-k_jx_j)+z(x)z_j(x)]e_j;$$

nach (3.1), (3.2), (3.12) ist also $\|y-y^0\|\leq\epsilon_i$. Somit ist

$$\varphi'(\beta_i')\subset U_{\epsilon_i}(\varphi^0(\beta_i')). \tag{3.13}$$

Hieraus folgt nun

$$\frac{F(\varphi'(\beta_i'))}{F(\varphi^0(\beta_i'))}\leq 1+\frac{F(U_{\epsilon_i}(\partial\varphi^0(\beta_i'))}{F(\varphi^0(\beta_i'))}\to 1 \quad \text{für} \quad i\to\infty \tag{3.14}$$

nach (3.5) und da die affine Abbildung φ^0 für kleine $\rho>0$ (und nur diese brauchen wir zu betrachten) nicht ausgeartet ist.

Analog zu (3.13) folgert man

$$\varphi^0(\beta_i')\subset U_{\epsilon_i}(\varphi'(\beta_i')),$$

woraus sich

$$\varphi^0(\beta_i')\backslash(U_{\epsilon_i}(\partial\varphi'(\beta_i'))\subset\varphi'(\beta_i') \tag{3.15}$$

ergibt, und

$$\varphi'(\partial\beta_i')\subset U_{\epsilon_i}(\varphi^0(\partial\beta_i'))=U_{\epsilon_i}(\partial\varphi^0(\beta_i')). \tag{3.16}$$

Nun gilt

$$\partial\varphi'(\beta_i') \subset \varphi'(\partial\beta_i'), \tag{3.17}$$

wie man folgendermaßen einsieht. Zu $y \in \varphi'(U)$ sei $f(y)$ der Punkt, der durch Orthogonalprojektion des Punktes $p(K_z, y)$ auf E^{n-1} entsteht. Dann ist $y \in \varphi'(\{f(y)\})$. Da die Abbildung f stetig ist, folgt nun leicht die Relation (3.17).

Aus (3.15), (3.16), (3.17) ergibt sich

$$\varphi^0(\beta_i') \setminus U_{2\epsilon_i}(\partial\varphi^0(\beta_i')) \subset \varphi'(\beta_i').$$

Hieraus folgt

$$\frac{F(\varphi'(\beta_i'))}{F(\varphi^0(\beta_i'))} \geq 1 - \frac{F(U_{2\epsilon_i}(\partial\varphi^0(\beta_i')))}{F(\varphi^0(\beta_i'))} \to 1 \quad \text{für} \quad i \to \infty.$$

Zusammen mit (3.14) ergibt das die Behauptung (3.11).

Aus (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) folgt nun

$$\lim_{i\to\infty} \frac{F(\varphi(\beta_i))}{F(\beta_i)} = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^j \binom{n-1}{j} H_j. \tag{3.18}$$

Andererseits gilt

$$F(\varphi(\beta_i)) = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^j \binom{n-1}{j} C_{n-1-j}(K_z, \beta_i), \tag{3.19}$$

wie sich wegen $F(\varphi(\beta_i)) = C_{n-1}((K_z)_\rho, \varphi(\beta_i))$ aus (2.10) und (2.6) ergibt. Da (3.18) und (3.19) für alle kleinen $\rho > 0$ gelten, folgt wegen $F(\beta_i) = C_{n-1}(K_z, \beta_i)$ nun die Behauptung (3.7). Damit ist Hilfssatz (3.6) bewiesen.

Da man den Rand eines konvexen Körpers in einer Umgebung eines gegebenen Randpunktes durch eine konvexe Funktion darstellen kann, versteht es sich von selbst, wie sich der Begriff des normalen Punktes und Hilfssatz (3.6) auf beliebige konvexe Körper übertragen. Wesentlich ist dann die folgende Aussage.

(3.20) HILFSSATZ. *Für jeden konvexen Körper $K \in \mathfrak{K}^n$ sind (im Sinne des $(n-1)$-dimensionalen Hausdorffmaßes) fast alle Randpunkte normal.*

Dies ist für $n = 2$ von Jessen [10], für $n = 3$ von Busemann-Feller [6] und für beliebiges n von Aleksandrov [1] gezeigt worden. Einen kürzeren, aber weniger elementaren Beweis findet man bei Bangert [3, (3.22)].

4. Beweis des Satzes, Schluß

Wir nehmen nun an, der konvexe Körper K, der (2.12) und daher (2.14) mit einer Einheitskugel $B \subset K$ erfüllt, falle nicht mit dieser Kugel zusammen (es muß also $m \geq 1$ sein). Setze

$$M := \partial K \backslash (B \cup S(K)).$$

Sei $x \in M$ ein normaler Punkt von K. Durch x gibt es genau eine Stützebene H an K; sei u ihr äußerer Normaleneinheitsvektor. Da x ein regulärer Randpunkt ist, ist H eine extreme Stützebene, nach (2.14) ist sie also auch Stützebene an B und berührt daher B in einem Punkt y. Der Strahl durch x mit Endpunkt y verläßt den Körper K in einem Punkt z. Dieser Punkt muß noch in einer von H verschiedenen Stützebene an K liegen, er ist daher singulär und somit verschieden von x.

O.B.d.A. nehmen wir im folgenden an, daß z der Nullpunkt des E^n ist. V sei der zu y orthogonale $(n-1)$-dimensionale lineare (also durch $z=0$ gehende) Unterraum, und $W \subset V$ sei der außerdem zu u orthogonale $(n-2)$-dimensionale lineare Unterraum.

Für einen konvexen Körper $K' \in \mathfrak{K}^n$ und einen Vektor $v \in E^n \backslash \{0\}$ bezeichne $H(K', v)$ die Stützebene an K' mit äußerem Normalenvektor v; speziell ist also $H(K, u) = H$. Ein Randpunkt des konvexen Körpers K' heißt *k-extrem*, wenn er nicht Mittelpunkt einer in K' enthaltenen $(k+1)$-dimensionalen Kugel ist. Jeder exponierte und daher (als Limes von exponierten Randpunkten) auch jeder extreme Randpunkt eines konvexen Körpers mit mehr als einem Punkt ist Häufungspunkt von 1-extremen Randpunkten, denn jeder nichtleere Durchschnitt des Körpers mit einer Hyperebene hat extreme Randpunkte, und diese sind 1-extreme Randpunkte des Körpers selbst.

(4.1) BEHAUPTUNG. *Sei $L \subset W$ ein m-dimensionaler linearer Unterraum. Dann gibt es eine Folge $(u_i)_{i\in\mathbf{N}}$ von Einheitsvektoren mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *Die Stützebene $H(K, u_i)$ ist Stützebene an B und geht durch z;*

(b) $\lim_{i\to\infty} u_i = u$;

(c) $w := \lim_{i\to\infty} \dfrac{u_i - u}{\|u_i - u\|}$ *existiert und liegt in L.*

Beweis. Nor (K, z) sei der Kegel aller äußeren Normalenvektoren an K in z.

Der Durchschnitt $N := (H+u) \cap \mathrm{Nor}\,(K, z)$ ist eine abgeschlossene konvexe Menge, die nicht ganz in V liegt (denn es gibt eine Stützebene an K in z, die nicht durch y geht). Es sei E die $(m+1)$-dimensionale Ebene, die von $L+u$ und einem nicht in V gelegenen Punkt von N aufgespannt wird. Setze $N' := N \cap E$. Da H eine extreme Stützebene von K ist, ist u extremer Randpunkt von N und daher auch extremer Randpunkt von N'. Wie oben bemerkt, ist u daher Limes einer Folge $(v_i)_{i \in \mathbf{N}}$ 1-extremer, von u verschiedener Randpunkte von N'. Wir setzen $u_i := v_i/\|v_i\|$. O.B.d.A. dürfen wir (nach Auswahl einer Teilfolge) annehmen, daß der Grenzwert

$$\lim_{i\to\infty} \frac{u_i - u}{\|u_i - u\|} =: w \tag{4.2}$$

existiert. Da v_i ein 1-extremer Randpunkt von N' und daher ein $(n-m-1)$-extremer Randpunkt von N ist, ist u_i ein $(n-m-1)$-extremer Normalenvektor von K. Nach (2.14) ist die Stützebene $H(K, u_i)$, die wegen $u_i \in \mathrm{Nor}\,(K, z)$ durch z geht, auch Stützebene an B. Daher gilt, da $y-u$ der Mittelpunkt der Einheitskugel B ist, $\langle y-u, u_i\rangle = -1$ für $i \in \mathbf{N}$. Wegen (4.2) und $\langle y, u\rangle = 0$ folgt hieraus $\langle y, w\rangle = 0$, also $w \in V$. Mit (4.2) gilt auch

$$\lim_{i\to\infty} \frac{v_i - u}{\|u_i - u\|} = w,$$

wegen $v_i - u \in E - u$ ist also $w \in V \cap (E-u) = L$. Damit ist (4.1) bewiesen.

Es sei nun $D \subset H$ die Indikatrix von K im Punkt x. Mit $h_x(D, \cdot)$ sei die Stützfunktion von D bezüglich x bezeichnet, also

$$h_x(D, v) := \sup_{p \in D} \langle p-x, v\rangle.$$

(4.3) BEHAUPTUNG. *Jeder m-dimensionale lineare Unterraum $L \subset W$ enthält einen Einheitsvektor w mit*

$$h_x(D, w) \le \sqrt{\frac{\|x-z\|}{\|y-z\|}}.$$

Beweis. Zu dem m-dimensionalen Unterraum $L \subset W$ sei $(u_i)_{i \in \mathbf{N}}$ eine Folge gemäß (4.1) mit zugehörigem Vektor $w \in L$. Sei $i \in \mathbf{N}$. Die Stützebene $H(K, u_i)$ hat nach (4.1.a) mit K (mindestens) die Strecke mit Endpunkten z und $y_i := y - u + u_i$ gemeinsam. Sei $\lambda \in\,]0, 1[$ bestimmt durch $x = \lambda y$. Sei H_i die zu H parallele

Hyperebene durch λy_i und h_i ihr Abstand von H, also

$$h_i = \lambda(1 - \langle u, u_i \rangle).$$

Der konvexe Körper $K \cap H_i$ hat in H_i die $(n-2)$-dimensionale Stützebene $H(K, u_i) \cap H_i$; in ihr liegt der Randpunkt λy_i von $K \cap H_i$. Der äußere Normaleneinheitsvektor v_i der Stützebene $H(K, u_i) \cap H_i$ wird erhalten durch Orthogonalprojektion von u_i in den Unterraum H und anschließende Normierung, es ist also

$$v_i = \frac{u_i - \langle u, u_i \rangle u}{\sqrt{1 - \langle u, u_i \rangle^2}}.$$

Wegen $\langle w, u \rangle = 0$ gilt auch

$$\lim_{i \to \infty} v_i = w. \tag{4.4}$$

Der konvexe Körper D_i entstehe aus $K \cap H_i$ durch orthogonale Projektion in H und Streckung mit dem Faktor $1/\sqrt{2h_i}$ aus dem Punkt x. Der auf gleiche Weise aus λy_i hervorgehende Punkt

$$p_i := \frac{1}{\sqrt{2h_i}} (\lambda y_i + h_i u) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2h_i}}\right) \lambda y$$

ist Randpunkt von D_i und liegt in der Stützebene $H(D_i, v_i)$. Daher ist

$$h_x(D_i, v_i) = \langle p_i - \lambda y, v_i \rangle = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}(1 + \langle u, u_i \rangle\right)}.$$

Es folgt

$$\lim_{i \to \infty} h_x(D_i, v_i) = \sqrt{\lambda}.$$

Nun konvergiert die Folge $(D_i)_{i \in \mathbf{N}}$ gegen die Indikatrix D von K in x. Hieraus folgt wegen (4.4)

$$h_x(D, w) \le \lim_{i \to \infty} h_x(D_i, v_i) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{\|x - z\|}{\|y - z\|}}.$$

womit (4.3) bewiesen ist.

Da x ein normaler Randpunkt von K ist, gilt

$$D=\{p\in H:\langle A(p-x), p-x\rangle\leq 1\}$$

mit einer (positiv semidefiniten) selbstadjungierten linearen Abbildung A des Unterraums H in sich. Die Hauptkrümmungen $k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_{n-1}$ von ∂K in x sind gerade die Eigenwerte von A; speziell ist

$$k_1=\operatorname*{Max}_{v\in H\setminus\{0\}}\frac{\langle Av, v\rangle}{\langle v, v\rangle}.$$

Sei nun $w\in W$ ein Einheitsvektor gemäß (4.3), und sei $\alpha>0$ so gewählt, daß $p:=x+\alpha w$ im Rand von D liegt. Dann ist also

$$\alpha=\|p-x\|\leq h_x(D, w)\leq\sqrt{\frac{\|x-z\|}{\|y-z\|}}$$

und folglich

$$k_1\geq\frac{\langle A(p-x), p-x\rangle}{\langle p-x, p-x\rangle}=\frac{1}{\alpha^2}\geq\frac{\|y-z\|}{\|x-z\|}.$$

Im Fall $m\leq n-3$ können wir folgendermaßen weiterschließen. Der zweitgrößte Eigenwert k_2 von A ist gegeben durch

$$k_2=\operatorname*{Max}_{\substack{v\in H\setminus\{0\}\\ \langle v, e\rangle=0}}\frac{\langle Av, v\rangle}{\langle v, v\rangle},$$

wo e ein Eigenvektor zum Eigenwert k_1 ist. Der Unterraum $\{v\in W:\langle v, e\rangle=0\}$ enthält wegen $m\leq\dim W-1$ nach (4.3) einen Einheitsvektor w_1 mit

$$h_x(D, w_1)\leq\sqrt{\frac{\|x-z\|}{\|y-z\|}}.$$

Analog wie oben folgt

$$k_2\geq\frac{\|y-z\|}{\|x-z\|}.$$

Durch Forsetzung dieses Verfahrens erhalten wir dieselbe Abschätzung für die r größten Eigenwerte, solange $m \leq \dim W-(r-1)$ ist, also bis $r=n-1-m$. Für die Krümmungsfunktion

$$H_{n-1-m} = \binom{n-1}{m}^{-1} (k_1 k_2 \cdots k_{n-1-m} + \cdots)$$

des Körpers K, wo die Punkte für weitere nichtnegative Summanden stehen, ergibt sich daher die Ungleichung

$$\binom{n-1}{m} H_{n-1-m}(x) \geq \left(\frac{\|y-z\|}{\|x-z\|}\right)^{n-1-m}. \tag{4.5}$$

Diese Ungleichung haben wir erhalten aus der Voraussetzung, daß $x \in M$ ein normaler Punkt von K sei. Nach Annahme ist nun M nicht leer, und wegen (2.14) und $K \neq B$ muß K wenigstens einen singulären Randpunkt besitzen. Nach Hilfssatz (3.20) und (2.13) gibt es also in M eine Folge $(x_j)_{j \in \mathbf{N}}$ normaler Punkte, die gegen einen singulären Randpunkt s konvergiert. Zu jedem Punkt x_j gehören, wie am Anfang des 4. Abschnitts für x erklärt, ein Punkt $y_j \in \partial B$ und ein singulärer Randpunkt z_j derart, daß die Strecke S_j mit Endpunkten y_j und z_j in K liegt und den Punkt x_j enthält. Wir dürfen (nach Auswahl einer Teilfolge) annehmen, daß die Streckenfolge $(S_j)_{j \in \mathbf{N}}$ gegen eine Strecke S konvergiert. Die Strecke S muß dann im Rand von K liegen, die Kugel B in einem Punkt y berühren und den Punkt s enthalten. Da durch s eine Stützebene an K geht, die nicht die Kugel B gerührt, ist s Endpunkt der Strecke S. Hieraus folgt, daß $(z_j)_{j \in \mathbf{N}}$ gegen s konvergiert. Offensichtlich konvergiert $(y_j)_{j \in \mathbf{N}}$ gegen y. Nach (4.5) ist

$$\binom{n-1}{m} H_{n-1-m}(x_j) \geq \left(\frac{\|y_j-z_j\|}{\|x_j-z_j\|}\right)^{n-1-m}.$$

Wegen $\|y_j - z_j\| \to \|y-s\| \neq 0$ und $\|x_j - z_j\| \to 0$ folgt

$$H_{n-1-m}(x_j) \to \infty \quad \text{für} \quad j \to \infty.$$

Aus (2.12) folgt nach Hilfssatz (3.6) (und der offensichtlichen Existenz normaler Teilmengen-Folgen) aber $H_{n-1-m}(x_j) = 1$. Dieser Widerspruch löst sich nur, wenn $K = B$ ist.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] ALEKSANDROV, A. D., Almost everywhere existence of the second differential of a convex function and some properties of convex surfaces connected with it (Russisch). Uchenye Zapiski Leningrad. Gos. Univ., Math. Ser. *6* (1939), 3–35.
[2] ALEKSANDROV, A. D., *Die innere Geometrie der konvexen Flächen.* Akademie-Verlag, Berlin 1955.
[3] BANGERT, V., *Konvexität in riemannschen Mannigfaltigkeiten.* Dissertation, Dortmund 1977.
[4] BONNESEN T., und FENCHEL, W., *Theorie der konvexen Körper.* Springer, Berlin 1934.
[5] BUSEMANN, H., *Convex surfaces.* Interscience Publishers, New York 1958.
[6] BUSEMANN H., und FELLER, W., *Krümmungseigenschaften konvexer Flächen.* Acta Math. *66* (1936), 1–47.
[7] DISKANT, V. I., *Stability of a sphere in the class of convex surfaces of bounded specific curvature.* Siberian Math. J. *9* (1968), 610–615.
[8] FEDERER, H., Curvature measures. Trans. Amer. Math. Soc. *93* (1959), 418–491.
[9] FENCHEL W., und JESSEN, B., *Mengenfunktionen und konvexe Körper.* Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. *16* (3) (1938), 1–31.
[10] JESSEN, B., *Om konvekse Kurvers Krumning.* Matematisk Tidsskrift B 1929, 50–62.
[11] LIEBMANN, H., *Beweis zweier Sätze über die Bestimmung von Ovaloiden durch das Krümmungsmaß oder die mittlere Krümmung für jede Normalenrichtung.* Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1899), 134–142.
[12] POGORELOV, A. V., Extrinsic geometry of convex surfaces. Transl. Math. Monographs 35, American Mathematical Society, Providence 1973.
[13] SCHNEIDER, R., Curvature measures of convex bodies. Ann. Mat. Pura Appl. (erscheint).
[14] SCHNEIDER, R., Eine Charakterisierung der Kugel. Arch. Math. *29* (1977), 660–665.
[15] SCHNEIDER, R., Über Tangentialkörper der Kugel. Manuscripta math. *23* (1978), 269–278.
[16] SÜSS, W., Zur relativen Differentialgeometrie V: Über Eihyperflächen im R^{n+1}. Tôhoku Math. J. *31* (1929), 202–209.

Mathematisches Institut der Universität
Albertstr. 23 b
D-7800 Freiburg i. Br.

Eingegangen den 13. Dezember 1977