Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 54 (1979)

Artikel: Über Extremalprobleme für schlichte Lösungen elliptischer Differentialgleichungssysteme.

Autor: Renelt, Heinrich

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41559

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici **54** (1979) 17–41 Birkhäuser Verlag, Basel

Über Extremalprobleme für schlichte Lösungen elliptischer Differentialgleichungssysteme

HEINRICH RENELT

Einleitung

Die Theorie der Extremalprobleme für konforme Abbildungen kann auf natürliche Weise in verschiedenen Richtungen verallgemeinert werden.

Eine Richtung -ohne Zweifel die Hauptrichtung der möglichen Verallgemeinerungen- besteht darin, daß anstelle konformer Abbildungen quasikonforme Abbildungen betrachtet werden, die (außer gewissen Normierungsbedingungen) nur einer vorgegebenen Dilatations beschränkung genügen müssen. (Diese Richtung – erstmals betrachtet von H. Grötzsch [5] – ist bisher in zahlreichen Arbeiten verfolgt worden, siehe die in [8], [17] zitierte diesbezügliche Literatur.) Als Hauptergebnis hat sich dabei gezeigt, daß die Extremalfunktionen in diesen Klassen quasikonformer Abbildungen mit vorgeschriebener Dilatationsbeschränkung durch dieselben quadratischen Differentiale beschrieben werden wie im konformen Falle. Als den eigentlichen Grund hierfür hat man wohl den Umstand anzusehen, daß in diesen Abbildungsklassen dieselben konformen Schifferschen Randvariationen möglich sind wie bei den konformen Abbildungen. Daß diese quadratischen Differentiale bei den Extremalfunktionen in diesen Klassen quasikonformer Abbildungen nicht nur das Randverhalten, sondern auch das Verhalten in inneren Punkten beherrschen, findet dadurch seine Erklärung, daß die Variationen mittels geeigneter Beltramiabbildungen (siehe [12]) gedeutet werden können als "Verdichtungen" konformer Randvariationen (vgl. [10], §9).

Eine andere (und meines Wissens hier erstmalig näher betrachtete) Richtung der Verallgemeinerung (– die Anregung hierzu verdanke ich Herrn R. Kühnau, vgl. auch [9], §6, sowie eine verwandte Problemstellung in [3] –) besteht darin, daß das Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungssystem durch irgendein anderes lineares gleichmäßig elliptisches Differentialgleichungssystem ersetzt wird und man analog zum konformen Fall in passend normierten Klassen von Abbildungen, die sämtlich das vorgeschriebene Differentialgleichungssystem erfüllen, die Extremalabbildungen zu geeigneten Funktionalen zu charakterisieren sucht. Hierbei stellt sich zunächst das Problem, zu den konformen Randvariationen analoge Randvariationen zu finden, die nicht aus der vorgegebenen Abbildungsklasse herausführen. Es zeigt sich, daß man solche Randvariationen in Form geeigneter Transformierten der konformen Randvariationen finden kann (siehe 1.10, 3.7 unten) und daß demzufolge die die Extremalabbildungen charakterisierenden verallgemeinerten "quadratischen Differentiale" Transformierte der entsprechenden quadratischen Differentiale im konformen Fall sind (siehe das "Ähnlichkeitsprinzip" in 4.15 unten). Dies beinhaltet gleichzeitig eine Übertragung des Teichmüllerschen Prinzipes über die Lage der Singularitäten bei den quadratischen Differentialen. Bei diesen Transformationen spielen singuläre Integraloperatoren (nämlich gewisse "Verwandte" der zweidimensionalen Hilberttransformation) die Hauptrolle. Es hat überhaupt den Anschein, daß gewisse singuläre Integraloperatoren eng mit Extremalproblemen bei konformen und quasikonformen Abbildungen zusammenhängen (siehe z.B. [16], [11], [14]).

Der Einfachheit halber habe ich hier einige Voraussetzungen an das Differentialgleichungssystem und die Normierungen gemacht, die an späterer Stelle abgeschwächt oder eliminiert werden können. Außerdem sind natürlich Erweiterungen der Problemstellung möglich (z.B. daß das Differentialgleichungssystem nur teilweise vorgeschrieben wird), die auch vorerst beiseite gelassen worden sind.

Zur Beschreibung der Endergebnisse bei der Charakterisierung der Extremalfunktionen zu den hier betrachteten Extremalproblemen möge folgendes Beispiel dienen.

In der Klasse aller derjenigen Abbildungen $f(z)$ eines Gebietes $G_z \supset \{|z|>R\}$, die das Differentialgleichungssystem

$$f_{\bar{z}} = \mu \overline{f_z}$$

mit $\mu(z) \in C^\infty$, $\mu(z) \equiv 0$ für $|z|>R$ und in einer Umgebung des Randes ∂G_z von G_z erfüllen und für $|z|>R$ eine Entwicklung

$$f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \cdots$$

besitzen, sollen diejenigen Abbildungen charakterisiert werden, die $\chi[f] = \operatorname{Re} a_1$ zum Maximum machen.

Das Differentialgleichungssystem bedeutet bekanntlich, daß infinitesimale Kreise $|dz|^2 = dx^2 + dy^2 = \text{const.}$ durch $f(z)$ auf infinitesimale Ellipsen $\gamma(z)\, du^2 + 2\beta(z)\, du\, dv + \alpha(z)\, dv^2 = \text{const.}$ abgebildet werden, wobei $(\alpha(z), \beta(z), \gamma(z))$ mit $\alpha\gamma - \beta^2 \equiv 1$ nur von $\mu(z)$, nicht aber vom jeweiligen $f(z)$ abhängt. Sei nun $f_0(z)$ eine (aus Kompaktheitsgründen stets existierende) Extremalfunktion. Denkt man sich in jedem Punkt $w = f_0(z)$, $z \in G_z$, die zugehörige infinitesimale Ellipsenschar mit den Parametern $(\alpha(z), \beta(z), \gamma(z))$ angeheftet und betrachtet nun diejenige schlichte Abbildung $\mathfrak{B}(w)$ der vollen w-Ebene, die die infinitesimalen Ellipsen (α, β, γ) in die gespiegelten infinitesimalen Ellipsen $(\alpha, -\beta, \gamma)$ überführt und in $w = \infty$ eine Entwicklung $\mathfrak{B}(w) = w + (b_1/w) + \cdots$ besitzt (in den Punkten der w-Ebene, die nicht Bildpunkte von $f_0(z)$ sind, sei $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 1))$, so wird die Extremalfunktion $f_0(z)$ durch $\mathfrak{B}(w)$ in folgender Weise beschrieben:

Das Bildgebiet von G_z unter der Abbildung $f_0(z)$ ist ein Schlitzgebiet mit analytischen Randschlitzen, die auf den Trajektorien des "quadratischen Differentials"

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial w} dw^2 > 0$$

liegen.

1. Problemstellung und vorbereitende Betrachtungen

Gegeben sei ein Gebiet G_z der z-Ebene, $z = x + iy$, mit $\{|z| \geqq R\} \subset G_z$ für ein gewisses festes endliches R. $\mathfrak{S}$ sei die Klasse aller schlichten Abbildungen $f(z)$ von G_z mit folgenden Eigenschaften:

(I) Jedes $f \in \mathfrak{S}$ erfüllt in G_z ein und dasselbe fest vorgegebene Differentialgleichungssystem (in komplexer Schreibweise)

$$1.1 \quad f_{\bar{z}} = \nu \cdot f_z + \mu \cdot \overline{f_z},$$

wobei $\nu = \nu(z)$, $\mu = \mu(z)$ in G_z stetige partielle Ableitungen beliebig hoher Ordnung haben und für $|z| > R$ identisch 0 sein sollen. Das System 1.1 sei in G_z gleichmäßig elliptisch, d.h. es gelte

$$1.2 \quad |\nu(z)| + |\mu(z)| \leqq q < 1 \quad \text{für alle } z \in G_z,$$

q sei eine feste positive Konstante. Außerdem sei $\mu(z)$ identisch 0 in einer Umgebung des Randes ∂G_z von G_z.

(II) Die $f \in \mathfrak{S}$ sollen hydrodynamisch normiert sein, d.h. jedes f besitze für $|z| > R$ eine LAURENTentwicklung

$$1.3 \quad f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \cdots .$$

Die $f \in \mathfrak{Q}$ sind also insbesondere K-quasikonforme Abbildungen mit

$$1.4 \quad \frac{|f_z|+|f_{\bar{z}}|}{|f_z|-|f_{\bar{z}}|} \leqq K = \frac{1+q}{1-q}.$$

Auf Grund der Normierung 1.3 ist $\mathfrak{Q}$ kompakt in sich bezüglich gleichmäßiger Konvergenz in kompakten Teilgebieten von G_z. Mit Konvergenz in $\mathfrak{Q}$ ist im folgenden stets gleichmäßige Konvergenz in kompakten Teilgebieten von G_z (=lokal gleichmäßige Konvergenz in G_z) gemeint.

Sei χ nun ein auf $\mathfrak{Q}$ definiertes und bezüglich der Konvergenz in $\mathfrak{Q}$ oberhalb stetiges Funktional, d.h.

$$\limsup_{n\to\infty} \chi[f_n] \leqq \chi[f] \quad \text{für } f_n \to f \text{ in } \mathfrak{Q},$$

mit gewissen weiteren Eigenschaften, die weiter unten formuliert werden sollen (siehe Abschnitt 4 unten). Man denke bei χ vorläufig z.B. an

$$\chi[f] = \operatorname{Re} a_1,\ a_1 \text{ der Koeffizient von } 1/z \text{ in 1.3,}$$

oder

$$\chi[f] = \operatorname{Re} f(x_0),\ z_0 \text{ ein fester Punkt aus } G_z,$$

oder auch an

$$\chi[f] = \operatorname{Re} \iint \rho(z) f(z)\, dx\, dy,$$

$\rho(z)$ eine in G_z definierte beschränkte meßbare Funktion, deren Träger supp ρ eine in G_z enthaltene beschränkte Menge ist. Das Integral ist dabei hier wie auch im folgenden, wenn kein Integrationsgebiet angegeben ist, über den gesamten Träger des Integranden zu nehmen.

Das Extremalproblem

$$1.5 \quad \chi[f] \to \max \text{ für } f \in \mathfrak{Q}$$

hat dann mindestens eine Lösung $f_0 \in \mathfrak{Q}$. Als Extremalfunktion muß f_0 besondere Eigenschaften besitzen. Da seine Glattheitseigenschaften in inneren Punkten von

G_z durch das Differentialgleichungssystem 1.1 bereits festgelegt sind, bleibt als besonderes Charakteristikum analog zum konformen Fall das Randverhalten. Dieses soll hier untersucht werden.

Sei f irgendeine Abbildung aus $\mathfrak{Q}$ und $G_w = f(G_z)$. Zu einem solchen f soll eine Schar von Abbildungen $f(\cdot, \lambda) \in \mathfrak{Q}$ konstruiert werden, die für $\lambda \to 0$ gegen f in $\mathfrak{Q}$ konvergieren. Wie man leicht nachrechnet, gilt:

1.6 Sei $\mathfrak{F}(w)$ eine hydrodynamisch normierte schlichte Abbildung von G_w, die das Differentialgleichungssystem

1.6.1 $$\mathfrak{F}_{\bar{w}} = 2i\kappa(w) \operatorname{Im} \mathfrak{F}_w$$

erfüllt mit

1.6.2 $$\kappa(w) = \kappa_f(w) = -\frac{\mu}{1+|\mu|^2-|\nu|^2},$$

wobei $\nu = \nu(z(w))$, $\mu = \mu(z(w))$ und $z(w)$ die Umkehrabbildung zu $f(z)$ ist. Dann ist $g(z) = \mathfrak{F}(f(z))$ Lösung von 1.1 und gehört wieder zu $\mathfrak{Q}$.

Gesucht werden nun Lösungen $\mathfrak{F}(w, \lambda)$ von 1.6.1 mit $\mathfrak{F}(w, \lambda) \to w$ lokal gleichmäßig für $\lambda \to 0$. Dann werden $\mathfrak{F}(f(z), \lambda)$ gesuchte $f(\cdot, \lambda)$.

Sei c ein Kontinuum mit mindestens zwei verschiedenen Punkten, dessen Komplement ein Gebiet D_c ist, $c \subset \partial f(G_z)$, und w_0 ein Punkt aus c. Sei $\boldsymbol{F}(c)$ die Menge aller schlichten konformen und hydrodynamisch normierten Abbildungen von D_c. In $\boldsymbol{F}(c)$ gibt es Folgen von Abbildungen F_n mit nachstehend genannten Eigenschaften (siehe [15], [7]):

1.7 Jedem F_n einer solchen Folge ist ein Parameterwert $\lambda_n \neq 0$ mit $\lambda_n \to 0$ für $n \to \infty$ in eindeutiger Weise zugeordnet, so daß für

1.7.1 $$F_n = F(w, \lambda_n) = w + \frac{\lambda_n}{w - w_0} + o(\lambda_n)$$

gilt

1.7.2 $$\frac{o(\lambda_n)}{\lambda_n} \to 0 \quad \text{für} \quad \lambda_n \to 0$$

gleichmäßig in jedem Gebiet D', das kompakt in D_c enthalten ist.

Wenn ein $F \in \boldsymbol{F}(c)$ als Element einer solchen Folgefungiert, so soll es konforme Randvariation von G_w bezüglich c und w_0 heißen.[1]

Der Koeffizient $\kappa(w)$ in 1.6.1 wird nun durch die Festlegung

$$1.8 \quad \kappa(w) = \begin{cases} -\dfrac{\mu}{1+|\mu|^2-|\nu|^2} & \text{für} \quad w \in G_w = f(G_z) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

in der ganzen w-Ebene erklärt. Sei $w(\zeta)$ die Umkehrabbildung zu einer konformen Randvariation $F(w, \lambda) \in \boldsymbol{F}(c)$. Mit dem in 1.8 definierten $\kappa(w)$ sei $\mathfrak{v}(\zeta)$ die hydrodynamisch normierte schlichte Abbildung der vollen ζ-Ebene, die das Differentialgleichungssystem

$$1.9 \quad \mathfrak{v}_{\bar{\zeta}} = \kappa(w(\zeta)) \frac{\overline{w'(\zeta)}}{w'(\zeta)} \mathfrak{v}_\zeta - \kappa(w(\zeta)) \overline{\mathfrak{v}_\zeta}$$

erfüllt, wobei $\kappa(w(\zeta))(\overline{w'(\zeta)}/w'(\zeta))$ und $\kappa(w(\zeta))$ gleich 0 zu setzen sind überall dort, wo $w(\zeta)$ und $w'(\zeta)$ nicht mehr erklärt sind.

Sei nun

$$1.10 \quad \mathfrak{F}(w, \lambda) = \mathfrak{v}(F(w, \lambda)).$$

Dieses $\mathfrak{F}(w, \lambda)$ ist eine schlichte hydrodynamisch normierte Abbildung von D_c, also erst recht von G_w, und $\mathfrak{F}(w, \lambda)$ ist Lösung des Differentialgleichungssystems 1.6.1. Außerdem gilt

$$1.11 \quad \mathfrak{F}(w, \lambda) \to w \text{ für } \lambda \to 0 \text{ gleichmäßig für alle } w \in G'$$

und

$$1.12 \quad \|\mathfrak{F}_w(w, \lambda) - 1\|_{L_p(G')} \to 0 \text{ für } \lambda \to 0,$$

wobei G′ ein beliebiges, aber festes kompakt in G_w liegendes Gebiet bedeutet und p nur die in 1.18 unten genannte Bedingung erfüllen muß. (Man sieht leicht unmittelbar, daß $\mathfrak{F}(w, \lambda)$ für genügend kleines λ nicht die Identität sein kann.

[1] Der Index n bei λ_n wird in Zukunft weggelassen. Nichtsdestoweniger bedeutet "$\lambda \to 0$" nichts anderes, als daß irgendeine Folge konformer Randvariationen $F(w, \lambda_n)$ gegeben ist und λ die Nullfolge der λ_n durchläuft. Dementsprechend bedeutet z.B. die Ausdrucksweise "genügend kleines λ" nichts anderes, als daß n genügend groß ist in der jeweiligen Nullfolge $\{\lambda_n\}$.

Dies ergibt sich aber auch von selbst aus den folgenden Betrachtungen, siehe insbesondere 1.25 unten.) Jedes solche durch 1.10 definierte $\mathfrak{F}(w,\lambda)$ soll κ-konforme Randvariation von G_w bezüglich und w_0 heißen.

Beweis von 1.11 *und* 1.12. Für $\mathfrak{v}(\zeta)$ gilt

1.13 $$\mathfrak{v}(\zeta)=\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\frac{\mathfrak{v}_{\bar{\mathfrak{z}}}}{\mathfrak{z}-\zeta}\,d\delta_{\mathfrak{z}}=\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\frac{2i\kappa_\lambda(\mathfrak{z})\cdot\operatorname{Im}(\mathfrak{v}_{\mathfrak{z}}-1)}{\mathfrak{z}-\zeta}\,d\delta_{\mathfrak{z}}-\frac{1}{\pi}\iint\frac{\tilde{\kappa}_\lambda(\mathfrak{z})\mathfrak{v}_{\mathfrak{z}}}{\mathfrak{z}-\zeta}\,d\delta_{\mathfrak{z}}$$

und

1.14 $$\mathfrak{v}_\zeta-1=-\frac{1}{\pi}\iint\frac{\mathfrak{v}_{\bar{\mathfrak{z}}}}{(\mathfrak{z}-\zeta)^2}\,d\delta_{\mathfrak{z}}=-\frac{1}{\pi}\iint\frac{2i\kappa_\lambda(\mathfrak{z})\operatorname{Im}(\mathfrak{v}_{\mathfrak{z}}-1)}{(\mathfrak{z}-\zeta)^2}\,d\delta_{\mathfrak{z}}-\frac{1}{\pi}\iint\frac{\tilde{\kappa}_\lambda(\mathfrak{z})\mathfrak{v}_{\mathfrak{z}}}{(\mathfrak{z}-\zeta)^2}\,d\delta_{\mathfrak{z}}$$

mit $\kappa_\lambda(\mathfrak{z})=\kappa(w(\mathfrak{z}))$, $\quad\tilde{\kappa}_\lambda(\mathfrak{z})=\kappa(w(\mathfrak{z}))\left(\dfrac{\overline{w'(\mathfrak{z})}}{w'(\mathfrak{z})}-1\right)$,

$d\delta_{\mathfrak{z}}$ das "Flächenelement" in der $\mathfrak{z}$-Ebene $E_{\mathfrak{z}}$ (E mit oder ohne Index bedeutet stets in Zusammenhang mit Integrierbarkeit die endliche komplexe Zahlenebene und sonst die volle komplexe Zahlenebene). Daraus folgt (hier sogar für beliebiges $p>1$ wegen der hydrodynamischen Normierung von $\mathfrak{v}(\zeta)$ und $\mathfrak{v}(\zeta)\in C^\infty$)

1.15 $$\|\mathfrak{v}_\zeta-1\|_{L_p}\leqq C_p\cdot 2\|\kappa_\lambda\|_{L_\infty}\cdot\|\mathfrak{v}_\zeta-1\|_{L_p}+C_p\|\tilde{\kappa}_\lambda\mathfrak{v}_\zeta\|_{L_p}.$$

Dabei bedeutet C_p die Norm der HILBERTtransformation

1.16 $$Th(\zeta)=-\frac{1}{\pi}\iint\frac{h(\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}-\zeta)^2}\,d\delta_{\mathfrak{z}}$$

in $L_p=L_p(E)$. Wegen 1.2, 1.8 ist

1.17 $$\|\kappa_\lambda\|_{L_\infty}=\|\kappa\|_{L_\infty(G_w)}\leqq\frac{1}{2}\left[1-\frac{(1-q)^2}{1+q}\right]<\frac{1}{2}.$$

Hieraus und wegen $C_p\to 1$ für $p\to 2$ (siehe z.B. [1], Kap. V*A*) folgt die Existenz zweier positiver Konstanten q' und $\varepsilon_0<1$ mit

1.18 $$2\,\|\kappa_\lambda\|_{L_\infty}\cdot C_p\leqq q'<1 \text{ für alle p mit } |p-2|\leqq\varepsilon_0$$

Außerdem folgt aus dem KOEBEschen Viertelsatz unter Beachtung der in (I) und (II) gemachten Voraussetzungen die Existenz eines $R^* < \infty$, so daß $\tilde{\kappa}_\lambda(\zeta) \equiv 0$ ist in $\{|\zeta| > R^*\}$ für jedes $f \in \mathfrak{Q}$, jedes $F(w, \lambda) \in \mathbf{F}(c)$, jedes $c \subset \partial f(G_z)$ und jedes $w_0 \in c$. Dies alles zusammen mit 1.15 ergibt

$$1.19 \quad \|\mathfrak{v}_\zeta - 1\|_{L_p} \leqq C_{p\lambda} \|\mathfrak{v}_\zeta\|_{L_p(\{|\zeta|<R^*\})} \quad \text{mit} \quad C_{p\lambda} = \frac{C_p \|\tilde{\kappa}_\lambda\|_{L_\infty}}{1-q'}$$

für jedes p mit $|p-2| \leqq \varepsilon_0$. Die Ungleichung 1.19 liefert weiter bei genügend kleinem λ

$$1.20 \quad \|\mathfrak{v}_\zeta\|_{L_p(\{|\zeta|<R^*\})} \leqq \frac{(\pi R^{*2})^{1/p}}{1-C_{p\lambda}}.$$

Wegen $\|\tilde{\kappa}_\lambda\|_{L_\infty} \to 0$ für $\lambda \to 0$ folgt aus den letzten beiden Abschätzungen

$$1.21 \quad \|\mathfrak{v}_\zeta - 1\|_{L_p} \to 0 \text{ für } \lambda \to 0.$$

Hieraus und aus 1.13, 1.20 folgt

$$1.22 \quad \mathfrak{v}(\zeta) \to \zeta \text{ für } \lambda \to 0 \text{ gleichmäßig für alle } \zeta.$$

Für $\mathfrak{F}(w, \lambda)$ folgt dann aus 1.22, 1.7 die Behauptung 1.11. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{F}_w(w, \lambda) - 1\|_{L_p(G')} &\leqq \|(\mathfrak{v}_\zeta - 1)F'(w, \lambda)\|_{L_p(G')} + \|F'(w, \lambda) - 1\|_{L_p(G')} \\ &\leqq \|\mathfrak{v}_\zeta - 1\|_{L_p} \cdot \max_{w \in G'} |F'(w, \lambda)|^{(p-2)/p} + \|F'(w, \lambda) - 1\|_{L_p(G')}. \end{aligned}$$

Mittels CAUCHYscher Integralformel (für die Abschätzung von $F'(w, \lambda)$) und z.B. des BIEBERBACHschen Flächensatzes (für die Abschätzung von $\|F'(w, \lambda) - 1\|_{L_p(G')}$) erkennt man dann auf Grund von 1.21 die Richtigkeit von 1.12.

Aus 1.13 erhält man

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(w, \lambda) = F(w, \lambda) &- \frac{1}{\pi} \iint \frac{2i\kappa(w(\mathfrak{z}))\, \mathrm{Im}\,[\mathfrak{F}_w(w(\mathfrak{z}), \lambda) \cdot w'(\mathfrak{z})]}{\mathfrak{z} - F(w, \lambda)}\, d\delta_\mathfrak{z} \\ &- \frac{1}{\pi} \iint \frac{\kappa(w(\mathfrak{z}))[\overline{w'(\mathfrak{z})} - w'(\mathfrak{z})]\overline{\mathfrak{F}_w(w(\mathfrak{z}), \lambda)}}{\mathfrak{z} - F(w, \lambda)}\, d\delta_\mathfrak{z}. \end{aligned}$$

Setzt man nun $\mathfrak{z}=F(\tau,\lambda)$ und transformiert die Integrale auf die neue Integrationsvariable τ, so erhält man

$$1.23 \quad \mathfrak{F}(w,\lambda)=F(w,\lambda)-\frac{1}{\pi}\iint\frac{2i\kappa(\tau)\operatorname{Im}[(\mathfrak{F}_\tau-1)\overline{F'(\tau,\lambda)}]}{F(\tau,\lambda)-F(w,\lambda)}\,d\delta_\tau$$
$$-\frac{1}{\pi}\iint\frac{2i\kappa(\tau)[\operatorname{Im}F'(\tau,\lambda)](\mathfrak{F}_\tau-1)}{F(\tau,\lambda)-F(w,\lambda)}\,d\delta_\tau.$$

Mit Hilfe der CAUCHYschen Integralformel (man beachte, daß das in 1.7.1 genannte $o(\lambda)$ in D_c analytisch von w abhängt) folgt

$$1.24 \quad F'(\tau,\lambda)=1-\frac{\lambda}{(\tau-w_0)^2}+o(\lambda), \quad F(\tau,\lambda)-F(w,\lambda)$$
$$=(\tau-w)\left(1-\frac{\lambda}{(\tau-w_0)(w-w_0)}+o(\lambda)\right)$$

wo die beiden $o(\lambda)$ in 1.24 die in 1.7.2 genannte Eigenschaft besitzen. Aus 1.12 unter Beachtung von $\kappa(\tau)\equiv 0$ in einer Umgebung von ∂G_w folgt dann

$$1.25 \quad \mathfrak{F}(w,\lambda)=w+\frac{\lambda}{w-w_0}-\frac{1}{\pi}\iint\frac{2i\kappa(\tau)\operatorname{Im}[\mathfrak{F}_\tau-1]}{\tau-w}\,d\delta_\tau+o(\lambda),$$

wobei $o(\lambda)$ in 1.25 wieder 1.7.2 erfüllt.

Aus $\mathfrak{F}_w(w,\lambda)=\mathfrak{v}_\zeta(F(w,\lambda))F'(w,\lambda)$ und 1.14 folgt auf analoge Weise wie bei 1.25 die Beziehung

$$1.26 \quad \mathfrak{F}_w(w,\lambda)=1-\frac{\lambda}{(w-w_0)^2}-\frac{1}{\pi}\iint\frac{2i\kappa(\tau)\operatorname{Im}[\mathfrak{F}_\tau-1]}{(\tau-w)^2}\,d\delta_\tau+o(\lambda)$$

mit $\|o(\lambda)/\lambda\|_{L_p(G')}\to 0$ für $\lambda\to 0$, G' beliebig, aber fest und kompakt in G_w enthalten, $|p-2|\leqq\varepsilon_0$.

Setzt man nun $\lambda=le^{i\alpha_\lambda}$, α_λ reell, und betrachtet nur solche Folgen $\lambda\to 0$, für die $\lim\limits_{\lambda\to 0}\alpha_\lambda=\alpha$ existiert–diese Voraussetzung wird im folgenden stets gemacht–, so wird

$$1.27 \quad \mathfrak{F}_w(w,\lambda)=1-\frac{le^{i\alpha}}{(w-w_0)^2}-\frac{1}{\pi}\iint\frac{2i\kappa(\tau)\operatorname{Im}[\mathfrak{F}_\tau-1]}{(\tau-w)^2}\,d\delta_\tau+o(\lambda).$$

Für

$$1.28 \quad s(w,w_0,\alpha,\lambda)=\frac{\mathfrak{F}_w(w,\lambda)-1}{l}$$

gilt dann die Integralgleichung

$$1.29 \quad s(w, w_0, \alpha, \lambda) = -\frac{e^{i\alpha}}{(w-w_0)^2} + \frac{o(\lambda)}{l} - \frac{1}{\pi} \iint \frac{2i\kappa(\tau) \operatorname{Im} s(\tau, w_0, \alpha, \lambda)}{(\tau - w)^2} \, d\delta_\tau .$$

Übergang zum Imaginärteil auf beiden Seiten in 1.29 ergibt, daß $h(w) = \operatorname{Im} s(w, w_0, \alpha, \lambda)$ die Integralgleichung

$$1.30 \quad h(w) = g(w) - \frac{1}{\pi} \iint h(\tau) \operatorname{Re} \frac{2\kappa(\tau)}{(\tau - w)^2} \, d\delta_\tau \text{ mit } g(w) = -\operatorname{Im}\left[\frac{e^{i\alpha}}{(w-w_0)^2} + \frac{o(\lambda)}{l}\right]$$

erfüllt.
Um weiteren Aufschluß über $\mathfrak{F}(w, \lambda)$ zu erhalten, wird man also den singulären Integraloperator

$$1.31 \quad \mathfrak{T}h(w) = -\frac{1}{\pi} \iint h(\tau) K(\tau, w) \, d\delta_\tau \text{ mit } K(\tau, w) = \operatorname{Re} \frac{2\kappa(\tau)}{(\tau - w)^2}$$

zu untersuchen haben.

2. Einige Eigenschaften des Operators $\mathfrak{T}$

Sei G^κ eine offene Menge mit $G^\kappa \supset \operatorname{supp} \kappa$. Für $h \in L_p(G^\kappa)$ ist $\kappa \cdot h \in L_p = L_p(E)$ (sofern man $\kappa h = 0$ setzt für $\kappa = 0$), und da der T-Operator 1.16 L_p in sich abbildet, so bildet $\mathfrak{T}$ den Raum $L_p(G^\kappa)$ in L_p ab.

2.1 $\mathfrak{T}$ *ist kontrahierend in* $L_p(G^\kappa)$ (*und erst recht natürlich kontrahierend in* L_p) *für jedes p mit* $|p-2| \leqq \varepsilon_0$.

Denn $\|\mathfrak{T}h\|_{L_p(G^\kappa)} \leqq \|\mathfrak{T}h\|_{L_p} = \|T(h\kappa) + \overline{T(\bar{h}\kappa)}\|_{L_p}$

$$\leqq 2C_p \|h\kappa\|_{L_p} \leqq 2 \|\kappa\|_{L_\infty} C_p \|h\|_{L_p(G^\kappa)} \leqq q' \|h\|_{L_p(G^\kappa)}$$

(siehe 1.17, 1.18). Für jedes p mit $|p-2| \leqq \varepsilon_0$ gilt dann bekanntlich:

2.2 Wenn $f_n(w) \to f(w)$ in $L_p(G^\kappa)$ und $h_n(w)$ Lösung der Gleichung

$$h_n = f_n + \mathfrak{T}h_n$$

in $L_p(G^\kappa)$ ist, so strebt $h_n(w) \to h(w)$ in $L_p(G^\kappa)$, wobei h (die eindeutig bestimmte) Lössung der Gleichung

2.2.1 $h = f + \mathfrak{T}h$
in $L_p(G^\kappa)$ ist.

2.3 *Die Aussagen* 2.1, 2.2 *gelten auch für den Operator*

$$\tilde{\mathfrak{T}}h(w) = -\frac{1}{\pi}\iint \frac{2i\kappa(\tau)\,\mathrm{Im}\,h(\tau)}{(\tau - w)^2}\,d\delta_\tau.$$

Denn für $\tilde{\mathfrak{T}}$ erhält man dieselbe Normabschätzung wie für $\mathfrak{T}$. Außerdem ist $\tilde{\mathfrak{T}}$ zwar nicht (komplex) linear, aber additiv.

Eine besondere Rolle in der Variationsformel für $\mathfrak{F}(w, \lambda)$ sowie in den daran anschließenden Betrachtungen spielen, was im 3. und 4. Abschnitt näher ausgeführt wird, die Lösungen der beiden speziellen Gleichungen

2.4 $$\Phi(w, t) = \frac{i}{w-t} - \frac{1}{\pi}\iint \Phi(\tau, t)K(\tau, w)\,d\delta_\tau$$

und

2.5 $$\Psi(w, t) = \frac{i}{(w-t)^2} - \frac{1}{\pi}\iint \Psi(\tau, t)K(\tau, w)\,d\delta_\tau.$$

Dabei ist t ein zunächst fester, aber beliebiger Punkt mit einem positiven Abstand zu G^κ. Für ein solches t ist

$$\frac{i}{w-t} \in L_p(G^\kappa) \text{ mit } 2 < p \text{ und } \frac{i}{(w-t)^2} \in L_p(G^\kappa) \text{ mit } 1 < p.$$

Wenn der Abstand von t zu supp κ größer als $\delta > 0$ ist, so kann z.B. $G^\kappa = \{|w-t| > \delta\}$ gewählt werden. Wegen 2.1 und weil δ beliebig klein sein kann, gibt es also genau ein $\Phi(w, t)$ und ein $\Psi(w, t)$, das jeweils Lösung der entsprechenden Gleichung 2.4 bzw. 2.5 in $L_p^{loc}(E\backslash\{t\})$ ist mit beliebigem p mit $2 < p \leqq 2 + \varepsilon_0$ bzw. $|p-2| \leqq \varepsilon_0$ (das bedeutet z.B. für Φ, daß Φ für fast alle $w \neq t$ definiert ist, daß Φ für fast alle $w \in E\backslash\{t\}$ 2.4 erfüllt und daß die Einschränkung von Φ auf irgendein G', das positiven Abstand zu t hat, zu $L_p(G')$ gehört).

Sei $\varphi(t)$ eine beliebig oft stetig partiell nach t und $\bar{t}$ differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger. Die HILBERTtransformation $T\varphi(w)$ (siehe 1.16) gehört zu L_p für jedes $p > 1$ und

2.6 $$P\varphi(w) = -\frac{1}{\pi}\iint \frac{\varphi(t)}{t-w}\,d\delta_t$$

gehört zu L_p für jedes $p>2$. Folglich haben die Gleichungen

2.7.1 $H(\cdot, \varphi)=i\pi P\varphi(\cdot)+\mathfrak{T}H(\cdot, \varphi)$

2.7.2 $\dot{H}(\cdot, \varphi)=-i\pi T\varphi(\cdot)+\mathfrak{T}\dot{H}(\cdot, \varphi)$

2.7.3 $\tilde{H}(\cdot, \varphi)=-i\pi\varphi(\cdot)+\mathfrak{T}\tilde{H}(\cdot, \varphi)$

jeweils eine eindeutig bestimmte Lösung in $L_p(E)$ für $2<p\leqq 2+\varepsilon_0$. Es gilt

2.8 $\dot{H}(\cdot, \varphi)=-H\left(\cdot, \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right), \quad \tilde{H}(\cdot, \varphi)=-H\left(\cdot, \dfrac{\partial\varphi}{\partial \bar{t}}\right)$

und

2.9 $\tilde{H}(w, \varphi)+i\pi\varphi(w)=\dot{H}(w, \kappa\varphi)-\overline{\dot{H}(w, \kappa\bar{\varphi})}.$

Die Relationen 2.8 folgen direkt aus den Relationen zwischen P- und T-Operator (siehe z.B. [1], Kap. VA) und der eindeutigen Bestimmtheit der Lösungen der Gleichungen 2.7. Die Beziehung 2.9 folgt unter Beachtung der Linearität von T und der eindeutigen Bestimmtheit der Lösung von 2.2.1 aus

$$\tilde{H}(w, \varphi)+i\pi\varphi(w)=i\int\int\varphi(\tau)K(\tau, w)\,d\delta_\tau-\frac{1}{\pi}\int\int[\tilde{H}(\tau, \varphi)+i\pi\varphi(\tau)]K(\tau, w)\,d\delta_\tau$$

$$=i\int\int\frac{\varphi(t)\kappa(t)}{(w-t)^2}\,d\delta_t-\overline{i\int\int\frac{\overline{\varphi(t)}\kappa(t)}{(w-t)^2}\,d\delta_t}-\frac{1}{\pi}\int\int[\tilde{H}(\tau, \varphi)+i\pi\varphi(\tau)]K(\tau, w)\,d\delta_\tau.$$

Sei nun $B(w)$ eine im Gebiet Ω eindeutige analytische Funktion, $\Omega\supset\operatorname{supp}\kappa$, $\mathfrak{D}(\Omega)$ sei wie üblich der Raum der unendlich oft stetig partiell differenzierbaren Funktionen $\varphi(\cdot)$ mit kompaktem Träger in Ω und der entsprechenden Topologie (siehe z.B. [6], *S. 5f*).

2.10 SATZ. *Sie Distribution*

2.10.1 $\mathfrak{B}(\varphi)=\displaystyle\int\int B(w)\varphi(w)\,d\delta_w+\frac{1}{\pi}\int\int H(w, \varphi)\operatorname{Re}\left[2i\kappa(w)\frac{dB(w)}{dw}\right]d\delta_w\in\mathfrak{D}'(\Omega)$

ist Lösung des linearen gleichmäßig elliptischen Differentialgleichungssystems

2.10.2 $\mathfrak{B}_{\bar{w}}=\kappa\mathfrak{B}_w-\overline{\bar{\kappa}\mathfrak{B}_w}$ in Ω.

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, daß $\mathfrak{B}$ tatsächlich eine Distribution ist. $\mathfrak{B}$ ist natürlich auf $\mathfrak{D}(\Omega)$ definiert und linear. Dies folgt aus der Linearität von P und der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichung 2.7.1. Zu zeigen bleibt also die Beschränktheit.

Sei Ω' kompakt enthalten in Ω. Dann ist

$$\left|\iint B(w)\varphi(w)\,d\delta_w\right| \leqq \sup_{w\in\Omega'} |\varphi(w)| \cdot \sup_{w\in\Omega'} |B(w)| \cdot |\Omega'|,$$

$|\Omega'|$ das zweidimensionale LEBESGUE-Maß von Ω', und

$$\left|\frac{1}{\pi}\iint H(w,\varphi)\,\mathrm{Re}\,[2i\kappa(w)B'(w)]\,d\delta_w\right|$$

$$\leqq \|H(w,\varphi\|_{L_p} \cdot \sup_{w\in\operatorname{supp}\kappa} |B'(w)| \cdot |\operatorname{supp}\kappa|^{1/q}$$

mit $1/p+1/q=1$, $2<p\leqq 2+\varepsilon_0$. Für $\|H(w,\varphi)\|_{L_p}$ folgt aus 2.7, 1.18

$$\|H(w,\varphi)\|_{L_p} \leqq \frac{\pi\cdot\|P\varphi\|_{L_p}}{1-q'} \leqq \frac{\pi}{1-q'}\,C(p,\Omega') \sup_{w\in\Omega'} |\varphi(w)|,$$

$C(p,\Omega')$ eine nur von p und Ω' abhängige Konstante (z.B. kann

$$C(p,\Omega') = 4\pi R'(\pi R'^2)^{1/p} + 2\pi R'[(p-1)(2R')^{p-1}]^{-1/p}$$

gesetzt werden, R' gleich dem Durchmesser von Ω'. Dies ergibt insgesamt

2.11 $\quad |\mathfrak{B}(\varphi)| \leqq C \cdot \sup_{w\in\Omega'} |\varphi(w)|,$

C eine nur von Ω' und p abhängige Konstante, $2<p\leqq 2+\varepsilon_0$. Damit ist $\mathfrak{B}$ beschränkt in $\mathfrak{D}(\Omega)$ (und sogar von O-ter Ordung).

Das Bestehen des Differentialgleichungssystems 2.10.2, d.h. der Relation

2.12 $\quad \mathfrak{B}(\varphi_{\bar w}) = \mathfrak{B}((\kappa\varphi)_w) - \overline{\mathfrak{B}((\kappa\bar\varphi)_w)},$

ergibt sich aus der Definition von $\mathfrak{B}$ sowie aus den Beziehungen 2.8, 2.9. Damit ist Satz 2.10 bewiesen.

Satz 2.10 besagt mit anderen Worten:

2.13 *Jede analytische Distribution* $\iint B(w)\varphi(w)\,d\delta_w \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *wird durch die "singuläre Distribution"* $H(w, \varphi)$ *gemäß Formel* 2.10.1 *in eine Lösung des Differentialgleichungssystems* 2.10.2 *transformiert.*

Zerlegt man $\mathfrak{B}$ in Real- und Imaginärteil, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_R + i\mathfrak{B}_I$, so werden $\mathfrak{B}_R$ und $\mathfrak{B}_I$ jeweils Lösungen einer elliptischen Differentialgleichung 2. Ordnung mit Koeffizienten aus C^∞. Folglich sind $\mathfrak{B}_R$, $\mathfrak{B}_I$ und damit auch $\mathfrak{B}$ Funktionen aus $C^\infty(\Omega)$,

2.14 $$\mathfrak{B}(\varphi) = \iint \mathfrak{B}(w)\varphi(w)\,d\delta_w \text{ mit } \mathfrak{B}(w) \in C^\infty(\Omega),\ \mathfrak{B}_{\bar{w}} = 2i \operatorname{Im} \kappa(w)\mathfrak{B}_w$$

(siehe z.B. [2], Teil II, §4.2). $\mathfrak{B}(w)$ ist also das Bild der analytischen Funktion $B(w)$ unter einer durch 2.10.1 definierten Transformation, die durch $\mathfrak{K}$ bezeichnet werden soll,

2.15 $$\mathfrak{B}(\mathrm{w}) = \mathfrak{K}B(\mathrm{w}).$$

Um folgenden wird noch eine weitere Transformation $\mathfrak{L}$ wichtig, nämlich

2.16 $$\mathfrak{L}B'(w) = \frac{\partial \mathfrak{K}B(w)}{\partial w} = \mathfrak{B}_w(w).$$

$B(w)$ und Ω mögen wieder die in Zusammenhang mit Satz 2.10 genannten Bedingungen erfüllen.

2.17 Satz: *Sei* Ω' *eine offene Teilmenge von* Ω *und* $\Omega' \subset E_w \backslash \operatorname{supp} \kappa$. *Für alle* $w \in \Omega'$ *gilt*

2.17.1 $$\mathfrak{K}B(w) = \mathfrak{B}(w) = B(w) + \frac{1}{\pi} \iint \Phi(\tau, w) \operatorname{Re}[2i\kappa(\tau)B'(\tau)]\,d\delta_\tau,$$

2.17.2 $$\mathfrak{L}B'(w) = \mathfrak{B}'(w) = B'(w) + \frac{1}{\pi} \iint \Psi(\tau, w) \operatorname{Re}[2i\kappa(\tau)B'(\tau)]\,d\delta_\tau.$$

Dabei sind Φ *und* Ψ *die in* 2.4, 2.5 *genannten Funktionen.*

Beweis. Sei w_1 ein beliebiger, aber fester Punkt aus Ω' und $\delta > 0$ so klein, daß $\{|w - w_1| < \delta\} \subset \Omega'$ ist. $\varphi_n(w, w_1)$ sei eine Folge von Funktionen aus C^∞, die nur von $|w - w_1|$ abhängen, mit $\varphi_n(w, w_1) \geqq 0$ für alle w, $\varphi_n(w, w_1) = 0$ für $|w - w_1| > 1/n$, $\iint \varphi_n(w, w_1)\,d\delta_w = 1$ für alle n mit $1/n < \delta$. Für irgendeine in $\{|w - w_1| < \delta\}$ analytische

Funktion $f(w)$ gilt dann $\iint f(w)\varphi_n(w, w_1)\, d\delta_w = f(w_1)$. Da $\mathfrak{B}(w)$ insbesondere für $|w-w_1|<\delta$ analytisch ist, gilt

$$\iint \mathfrak{B}(w)\varphi_n(w, w_1)\, d\delta_w = \mathfrak{B}(w_1) = B(w_1) + \frac{1}{\pi}\iint H(\tau, \varphi_n)\, \mathrm{Re}\,[2i\kappa(\tau)B'(\tau)]\, d\delta_\tau,$$

$$-\iint \mathfrak{B}(w)\varphi_{nw}(w, w_1)\, d\delta_w = \mathfrak{B}'(w_1) = B'(w_1) + \frac{1}{\pi}\iint \dot{H}(\tau, \varphi_n)\, \mathrm{Re}\,[2i\kappa(\tau)B'(\tau)]\, d\delta_\tau$$

mit den in 2.7 definierten Funktionen (man beachte auch 2.8)

$$H(w, \varphi_n) = i\iint \frac{\varphi_n(t, w_1)}{w-t}\, d\delta_t + \mathfrak{T}H(\cdot, \varphi_n) = \frac{i}{w-w_1} + \mathfrak{T}H(\cdot, \varphi_n)$$

$$\dot{H}(w, \varphi_n) = i\iint \frac{\varphi_n(t, w_1)}{(w-t)^2}\, d\delta_t + \mathfrak{F}\dot{H}(\cdot, \varphi_n) = \frac{i}{(w-w_1)^2} + \mathfrak{F}\dot{H}(\cdot, \varphi_n),$$

letzteres, weil (bei festem w) $(w-t)^{-k}$, k eine reelle ganze Zahl, analytisch in t ist für $|t-w_1|<\delta$, solange $|w-w_1|>\delta$ ist. Folglich ist $H(w, \varphi_n) = \Phi(w, w_1)$ und $\dot{H}(w, \varphi_n) = \Psi(w, w_1)$ für $|w-w_1|>1/n$ auf Grund der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichungen 2.4, 2.5 in $\{|w-w_1|>1/n\}$. Damit ist Satz 2.17 bewiesen. 2.17 bedeutet, daß die Transformationen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ für $w \in E \backslash \mathrm{supp}\, \kappa$ durch Integraltransformationen mit Hilfe der singulären Kerne $\Phi(t, w)$, $\Psi(t, w)$ dargestellt werden können. (Mit ewas mehr Aufwand, aber sonst analog zum Beweis von 2.17 läßt sich zeigen, daß 2.17.1 für alle $w \in \Omega$ gilt. Dagegen kann vorerst nichts über die Existenz von $\Psi(w, w_1)$ für beliebiges w_1 gesagt werden, geschweige denn über die Gültigkeit von 2.17.2 für beliebiges $w \in \Omega$, wobei dann $\mathfrak{B}'(w)$ durch $\mathfrak{B}_w(w)$ zu ersetzen wäre.)

Sei nun $A(w)$ eine rationale Funktion mit einem Pol in w_1, $w_1 \notin \mathrm{supp}\, \kappa$. Es ist

$$\mathfrak{L}A(w) = A(w) + \frac{1}{\pi}\iint \Psi(\tau, w)\, \mathrm{Re}\,[2i\kappa(\tau)A(\tau)]\, d\delta_\tau$$

in einer hinreichend kleinen Umgebung von w_1 analytisch (und natürlich eindeutig). Dies folgt sofort aus 2.10, 2.14, 2.17, indem man dort $B'(w) = A(w)$ setzt und eine evtl. aufgeschnittene Umgebung von w_1 betrachtet. Weiter ist

$$\iint \Psi(\tau, w)\, \mathrm{Re}\,[2i\kappa(\tau)A(\tau)]\, d\delta_\tau$$

beschränkt in einer Umgebung von w_1. Also gilt:

2.18 *Sei $A(w)$ eine rationale Funktion, deren sämtliche Pole außerhalb von supp κ liegen. Dann hat*

$$\mathfrak{A}(w)=\mathfrak{L}A(w)$$

dieselben Singularitäten wie $A(w)$.

Sei $A(w)$ nun eine in $\Omega \supset \operatorname{supp} \kappa$ eindeutige meromorphe Funktion mit der(nicht notwendig eindeutigen) Stammfunktion $B(w)$, und alle Pole von $A(w)$ in Ω (sofern vorhanden) mögen außerhalb des supp κ liegen. Dann hat $\mathfrak{B}(w)=\mathfrak{K}B(w)$ auf Grund des Darstellungstheorems für Lösungen gleichmäßig elliptischer Differentialgleichungssysteme (siehe z.B. [2], Teil II, §6.4) nur endlich viele Nullstellen in jedem kompakten Teilgebiet Ω' von Ω oder ist identisch 0. Es gilt aber noch mehr:

2.19 $\mathfrak{A}(w)=\mathfrak{L}A(w)$ *hat nur endlich viele Nullstellen in jedem kompakten Teilgebiet von Ω oder ist identisch* 0.

Denn wegen $\mathfrak{B}(w)$, $\kappa(w) \in C^\infty$ kann die komplexe Differentialgleichung 2.10.2 auf beiden Seiten partiell nach w differenziert werden. Dies liefert für $\mathfrak{A}(w)=\mathfrak{B}_w(w)$ das gleichmäßig elliptische Differentialgleichungssystem

2.20 $$\mathfrak{A}_{\bar{w}}=\frac{\kappa}{1-|\kappa|^2}\mathfrak{A}_w-\frac{\bar{\kappa}^2}{1-|\kappa|^2}\overline{\mathfrak{A}_w}+\frac{\kappa_w+\bar{\kappa}\kappa_{\bar{w}}}{1-|\kappa|^2}\mathfrak{A}-\frac{\bar{\kappa}\overline{\kappa_w}+\overline{\kappa_{\bar{w}}}}{1-|\kappa|^2}\bar{\mathfrak{A}}.$$

Aus dem Darstellungstheorem folgt dann die Behauptung 2.19.

3. Die Variationsformeln

Wegen $\|o(\lambda)/l\|_{L_p(G')} \to 0$ für $\lambda \to 0$ mit dem $o(\lambda)$ aus1.29 und wegen 2.3 gilt

3.1 $$s(w, w_0, \alpha, \lambda)=s(w, w_0, \alpha)+\frac{o(\lambda)}{l}, \quad w_0 \in c \subset \partial f(G_z)$$

mit $o(\lambda)/l \to 0$ in $L_p(G^\kappa)$ für $l \to 0$, wobei $s(w, w_0, \alpha)$ Lösung der Integralgleichung

3.2 $$s(w, w_0, \alpha)= -\frac{e^{i\alpha}}{(w-w_0)^2}+\mathfrak{T}s(\cdot, w_0, \alpha)$$

in $L_p(G^\kappa)$ mit $|p-2| \leqq \varepsilon_0$ und G^κ ein kompaktes Teilgebiet von $G_w = f(G_z)$ ist, das supp κ enthält. Aus 2.3 folgt dann weiter

3.3 $s(w, w_0, \alpha) = s(w, w_0, 0) \cos \alpha + s(w, w_0, \pi/2) \sin \alpha.$

Wie bei 1.30 erkennt man sofort aus 3.2, daß

3.4 $\operatorname{Im} s(w, w_0, \alpha) = \operatorname{Re} ([\operatorname{Im} s(w, w_0, 0) - i \operatorname{Im} s(w, w_0, \pi/2)] e^{i\alpha})$

Lösung der Gleichung

$$h(w) = -\operatorname{Im} \frac{e^{i\alpha}}{(w-w_0)^2} + \mathfrak{T}h = \operatorname{Re} \frac{ie^{i\alpha}}{(w-w_0)^2} + \mathfrak{T}h$$

ist. Folglich ist $\operatorname{Im} s(w, w_0, 0) - i \operatorname{Im} s(w, w_0, \pi/2)$ Lösung der Integralgleichung

3.5 $h(w) = \dfrac{i}{(w-w_0)^2} + \mathfrak{T}h,$

und wegen der eindeutigen Bestimmtheit der Lösung dieser Integralgleichung in $L_p^{loc}(E \setminus \{w_0\})$ gilt unter Beachtung von 2.5

3.6 $\Psi(w, w_0) = \operatorname{Im} s(w, w_0, 0) - i \operatorname{Im} s(w, w_0, \pi/2).$

Zusammen mit 1.25–1.28, 3.1, 3.4 erhält man hieraus

3.7 $\mathfrak{F}(w, \lambda) = w + \dfrac{\lambda}{w-w_0} - \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\iint \dfrac{2i\kappa(\tau) \operatorname{Re} [\lambda \Psi(\tau, w_0)]}{\tau - w} \, d\delta_\tau + o(\lambda),$

3.8 $\mathfrak{F}_w(w, \lambda) = 1 - \dfrac{\lambda}{(w-w_0)^2} - \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\iint \dfrac{2i\kappa(\tau) \operatorname{Re} [\lambda \Psi(\tau, w_0)]}{(\tau - w)^2} \, d\delta_\tau + o(\lambda),$

wobei für $o(\lambda)$ in 3.7 wieder gilt $o(\lambda)/\lambda \to 0$ für $\lambda \to 0$ gleichmäßig in G' und für $o(\lambda)$ in 3.8 $\|o(\lambda)/\lambda\|_{L_p(G')} \to 0$ für $\lambda \to 0$, $|p-2| \leqq \varepsilon_0$, für jedes kompakt in G_w liegende Gebiet G', $w_0 \in \partial G_w$. Mit Hilfe der CAUCHYschen Integralformel folgt natürlich aus 3.7 auch für das in 3.8 genannte $o(\lambda)$

3.9 $o(\lambda)/\lambda \to 0$ für $\lambda \to 0$ gleichmäßig in jeder kompakten Teilmenge irgendeiner offenen Menge $\subset G_w$, in der $\kappa(w) \equiv 0$ ist.

Für die gesuchten Variationen $f(z,\lambda)=\mathfrak{F}(f(z),\lambda)$ zu einer (festen) Abbildung $f\in\mathfrak{Q}$ erhält man aus 3.7 die asymptotische Darstellung

3.10 $$f(z,\lambda)=f(z)+\frac{\lambda}{f(z)-w_0}-\frac{1}{\pi}\iint\frac{2i\kappa(\tau)\,\mathrm{Re}\,[\lambda\Psi(\tau,w_0)]}{\tau-f(z)}\,d\delta_\tau+o(\lambda)$$

mit $(o(\lambda))/\lambda\to 0$ für $\lambda\to 0$ gleichmäßig in jedem Gebiet G'_z, das kompakt in G_z enthalten ist, und wegen $f_z(z,\lambda)=\mathfrak{F}_w(f(z),\lambda)f_z+\mathfrak{F}_{\bar w}(f(z),\lambda)\bar{f}_{\bar z}$, 1.6.1, 3.8 und 2.5

3.11 $$f_z(z,\lambda)=f_z(z)-\frac{\lambda f_z(z)}{(f(z)-w_0)^2}-\frac{f_z(z)}{\pi}\iint\frac{2i\kappa(\tau)\,\mathrm{Re}\,[\lambda\Psi(\tau,w_0)]}{(\tau-f(z))^2}\,d\delta_\tau$$
$$+2i\kappa(f(z))\overline{f_{\bar z}}\cdot\mathrm{Re}\,[\lambda\Psi(f(z),w_0)]+o(\lambda)$$

mit $\|o(\lambda)/\lambda\|_{L_p(G'_z)}\to 0$ für $\lambda\to 0$, G'_z wie bei 3.10 und p eine beliebige reelle Zahl mit $|p-2|\leqq(\varepsilon_0^2)/2(1+\varepsilon_0)$. Analog zu 3.8, 3.9 gilt: Wenn $\nu(z)=\mu(z)\equiv 0$ ist in einer Umgebung eines Punktes $z_1\in G_z$ (dann ist $\kappa(w)=0$ in einer Umgebung von $w_1=f(z_1)$), so gilt für jede (feste) natürliche Zahl $n=1,2,\ldots$

3.12 $$f^{(n)}(z_1,\lambda)=f^{(n)}(z_1)+\lambda\left.\frac{d^n\dfrac{1}{f(z)-w_0}}{dz^n}\right|_{z=z_1}+\frac{1}{\pi}\iint 2i\kappa(\tau)$$
$$\times[\mathrm{Re}\,\lambda\Psi(\tau,w_0)]\left.\frac{d^n\dfrac{1}{f(z)-\tau}}{dz^n}\right|_{z=z_1}d\delta_\tau+o(\lambda)$$

mit $(o(\lambda)/\lambda)\to 0$ für gleichmäßig in einer Umgebung von z_1. *Die Beziehungen* 3.10–3.12 *sind die gesuchten Variationsformeln für die* $g(z,\lambda)$.

4. Charakterisierung der Funktionale und ihrer Extremalfunktionen

Sei $K(z)$ eine beschränkte meßbare Funktion in G_z mit $1\leqq K(z)$ für alle $z\in G_z$, $K(z)\equiv 1$ für $|z|>R$. $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}(K(z))$ sei die Klasse der hydrodynamisch normierten quasikonformen Abbildungen $f(z)$ mit

4.1 $$D_f(z)=\frac{|f_z|+|f_{\bar z}|}{|f_z|-|f_{\bar z}|}\leqq K(z) \text{ für fast alle } z\in G_z.$$

χ sei ein auf einer solchen Klasse $\boldsymbol{Q}(K(z))$ definiertes oberhalb stetiges Funktional (insbesondere ist dann χ auch auf der Klasse der hydrodynamisch normierten konformen Abbildungen von G_z definiert).

Die mit Hilfe der konformen Randvariationen $F(w, \lambda)$ von $f(G_z)$ (siehe 1.7) gebildeten variierten Funktionen

4.2 $f_\lambda(z) = F(f(z), \lambda)$

führen (bei beliebigem, aber festem $K(z)$ mit den oben genannten Eigenschaften) nicht aus $\boldsymbol{Q}(K(z))$ heraus. Eine wesentliche Eigenschaft der Funktionale χ vom GRÖTZSCH-TEICHMÜLLERschen Typ besteht nun darin, daß für Variationen 4.2 eine asymptotische Beziehung

4.3 $\chi[f_\lambda] = \chi[f] + \operatorname{Re} \lambda A(w_0, f) + o(\lambda)$

gilt mit einer gewissen in w analytischen Funktion $A(w, f)$ mit geeignetem Definitionsbereich, die bei (geeignetem) festgehaltenem w ein Funktional in f ist, und $o(\lambda)/\lambda \to 0$ für $\lambda \to 0$. $A(w, f)\, dw^2$ ist dann das zu χ "an der Stelle f" gehörige TEICHMÜLLERsche quadratische Differential.

Bei vorgegebenem $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}(\nu, \mu)$ findet man natürlich $K(z)$ mit obigen Eigenschaften, so daß

$$\mathfrak{Q}(\nu, \mu) \subset \boldsymbol{Q}(K(z))$$

ist, d.h. wenn χ auf $\boldsymbol{Q}$ definiert ist, so erst recht natürlich auf $\mathfrak{Q}$. In $\mathfrak{Q}$ kann aber nicht konform variiert werden, sondern man hat die variierten Funktionen zu $f(z) \in \mathfrak{Q}$ mit Hilfe der zu ν, μ und f gehörigen κ-konformen Randvariationen $\mathfrak{F}(w, \lambda)$ durch

4.4 $f(z, \lambda) = \mathfrak{F}(f(z), \lambda)$

zu bilden. Es wird nun definiert:

4.5 DEFINITION. Das Funktional χ heißt vom GRÖTZSCH-TEICHMÜLLERschen Typ bezüglich $\mathfrak{Q}(\nu, \mu)$, wenn χ auf $\mathfrak{Q}(\nu, \mu)$ definiert und oberhalb stetig ist und wenn es zu jedem $f \in \mathfrak{Q}(\nu, \mu)$ eine Funktion $\mathfrak{B}(w, f)$ gibt, die

4.5.1 Lösung von $\mathfrak{B}_{\bar{w}} = 2i \operatorname{Im} \kappa \mathfrak{B}_w$ für fast alle w ist, $\kappa = \kappa(w) = \kappa_f(w)$ (siehe 1.6.2),

4.5.2 die Darstellung $B(w, f) = g_f \circ h_f(w)$ besitzt, wobei $h_f(w)$ ein quasikonformer Homöomorphismus der vollen w-Ebene und g_f Stammfunktion einer rationalen Funktion $\not\equiv 0$ ist, und für die gilt

4.5.3 $\chi[f(\cdot, \lambda)] = \chi[f] + \mathrm{Re}\, \lambda \mathfrak{A}(w_0, f) + o(\lambda)$ mit $\mathfrak{A}(w, f) = \mathfrak{B}_w(w, f) \neq \infty\ \forall w \in \partial f(G_z)$, $o(\lambda)/\lambda \to 0$ für $\lambda \to 0$ bei jedem festen $f \in \mathfrak{Q}(\nu, \mu)$.

Natürlich könnte man die Definition analog zu [13] etwas weiter fassen und anstelle von 4.5.1, 4.5.2 nur fordern, daß $\mathfrak{B}(w, f)$ nur in einer Umgebung des Randes von $f(G_z)$ die obige komplexe Differentialgleichung erfüllt und in keiner Komponente einer solchen Umgebung des Randes konstant ist oder Singularitäten hat. Bei gewissen, und keineswegs pathologischen Funktionalen (siehe z.B. 4.17 unten) wird man in der Tat sich mit solchen "verkürzten" $\mathfrak{B}(w, f)$ und $\mathfrak{A}(w, f)$ begnügen müssen. Ein χ mit solch einem verkürzten $\mathfrak{A}(w, f)$ soll vom verkürzten GRÖTZSCH-TEICHMÜLLERschen Typ heißen. Der Einfachheit halber soll hier noch vorausgesetzt werden, daß die geforderte Umgebung des Randes (d.h. eine offene Menge O_f mit $\partial f(G_z) \subset O_f$), in der $\mathfrak{A}(w, f)$ existiert und die geforderten Eigenschaften hat, stets nur aus endlich vielen Komponenten bestehen soll.

Da $\mathfrak{Q}(\nu, \mu)$ kompakt bezüglich gleichmäßiger Konvergenz in kompakten Teilgebieten von G_z ist, hat das Extremalproblem $\chi[f] \to \max$ in $\mathfrak{Q}(\nu, \mu)$ stets mindestens eine Lösung $f_0(z)$. Eine direkte Folgerung aus dem SCHIFFERschen Lemma (siehe [15], [7]) unter Beachtung des Beweises zu 2.19 ist der folgende

4.6 SATZ. *Sei χ vom verkürzten GRÖTZSCH-TEICHMÜLLERschen Typ bezüglich $\mathfrak{Q}(\nu, \mu)$. Unter den in Abschnitt 1 gemachten Voraussetzungen an ν, μ bildet jede Extremalfunktion f_0 von χ in $\mathfrak{Q}(\nu, \mu)$ das Gebiet G_z auf ein Schlitzgebiet ab, dessen Randschlitze mit Ausnahme endlich vieler Punkte auf den Trajektorien des auf $\partial f_0(G_z)$ analytischen quadratischen Differentials $\mathfrak{A}(w, f_0)dw^2 > 0$ liegen.*

Durch $\mathfrak{A}(w, f)\, dw^2 > 0$ wird im ganzen Definitionsgebiet von $\mathfrak{A}(w, f)$ (also z.B. in der gesamten w-Ebene mit Ausnahme endlich vieler Punkte, wenn $\mathfrak{A}(w, f)$ aus einem rationalen $A(w, f)$ hervorgeht, siehe 4.11, 4.14, 4.15.1 unten) ein Richtungsfeld definiert. Diesem Richtungsfeld entsprechen nach Satz 4.6 auch die Randschlitze des Bildgebiets von G_z bei einer Extremalfunktion f. Ein anderes Richtungsfeld, das jedoch unter den hier über ν, μ gemachten Voraussetzungen in einer Randzone von $f(G_z)$ mit dem durch $\mathfrak{A}(w, f)\, dw^2 > 0$ definierten übereinstimmt, wird durch

$$d\mathfrak{B} \cdot dw = [\mathfrak{A}(w, f)\, dw + \mathfrak{B}_{\bar{w}}(w, f)\, d\bar{w}]\, dw > 0$$

gegeben. Welches von beiden Richtungsfeldern nun das "richtige" ist bzw. ob überhaupt eines von beiden (und dann in welchem Sinne) das richtige ist, muß hier offen bleiben. Im Hinblick auf 4.5.3, 4.6 und 4.15.1 unten scheint unter den hier getroffenen Voraussetzungen über ν, μ folgende Definition angebracht:

4.7 DEFINITION. Der Ausdruck $\mathfrak{A}(w, f)\, dw^2$ mit dem in 4.5.3 genannten $\mathfrak{A}(w, f)$ heiße verallgemeinertes quadratisches Differential des Funktionals χ in $\mathfrak{Q}(\nu, \mu)$.

Es sollen nun einige Beispiele für Funktionale vom GRÖTZSCH-TEICH-MÜLLERschen Typ bezüglich $\mathfrak{Q}(\nu, \mu)$ betrachtet werden. Sei als erstes Beispiel

4.8 $\chi[f] = \operatorname{Re} a_1$,

a_1 der Koeffizient von $1/z$ in der Entwicklung 1.3 *von $f(z)$ für $|z| > R$. Wegen* 3.10 *ist*

4.9 $$x[f(\cdot, \lambda)] = \operatorname{Re} a_1 + \operatorname{Re} \lambda + \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \iint 2i\kappa(\tau) \operatorname{Re}[\lambda \Psi(\tau, w_0)]\, d\delta_\tau + o(\lambda)$$

$$= \chi[f] + \operatorname{Re} \lambda \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \iint \Psi(\tau, w_0) \operatorname{Re}[2i\kappa(\tau) \cdot 1]\, d\delta_\tau \right\} + o(\lambda).$$

Setzt man also (siehe 2.15)

4.10 $\mathfrak{B}(w, f) = \mathfrak{R} B(w) = \mathfrak{R}(id)(w)$,

d.h. $B(w) = w$, so erfüllt dieses $\mathfrak{B}(w, f)$ für jedes $f \in \mathfrak{Q}(\nu, \mu)$ wegen 2.14, dem Darstellungstheorem, 2.17.1 und der daraus sofort ablesbaren Tatsache, daß $\mathfrak{B}(w, f)$ in ∞ einen einfachen Pol besitzt, also nicht konstant sein kann, die Bedingungen 4.5.1, 4.5.2, und wegen 2.17.2 und 4.9 kann man mit diesem $\mathfrak{B}(w, f)$ schreiben

$$\chi[f(\cdot, \lambda)] = \chi[f] + \operatorname{Re} \lambda \mathfrak{A}(w_0, f) + o(\lambda) \text{ mit}$$

4.11 $\mathfrak{A}(w, f) = \mathfrak{B}_w(w, f) = \mathfrak{L}(1)(w)$.

Aus 4.9, 1.6.2 und Satz 4.6 ergibt sich gleich noch das folgende Resultat.

4.12 *Seien ν, μ meßbare Funktionen mit $|\nu| + |\mu| \leqq q < 1$ für fast alle $z \in G_z \supset \{|z| > R\}$, $\nu = \mu \equiv 0$ für $|z| > R$, μ reell für alle $z \in G_z$ und $\mu(z) \equiv 0$ in einer Umgebung des Randes von G_z. Dann bildet jede Lösung f_0 des Extremalproblems* Re $a_1 \to$ *max in $\mathfrak{Q}(\nu, \mu)$ das Gebiet G_z auf ein Parallelschlitzgebiet mit horizontalen Randschlitzen ab. Wenn G_z darüberhinaus endlich vielfach zusammenhängend ist, so gibt es genau eine Extremalfunktion in $\mathfrak{Q}(\nu, \mu)$, nämlich* *die (dann eindeutig bestimmte) hydrodynamisch normierte Abbildung von G_z auf ein Parallelschlitzgebiet mit horizontalen Randschlitzen, die das Differentialgleichungssystem* 1.1 *erfüllt.*

(Glattheitsvoraussetzungen an ν, μ sind hier deswegen nicht nötig, weil man in diesem Spezialfall keine distributionentheoretischen Betrachtungen anstellen muß, um die notwendigen Eigenschaften von $\mathfrak{B}(w,f)$ und $\mathfrak{A}(w,f)$ zu ergründen. Aus 4.9 folgt nämlich hier sofort $\mathfrak{A}(w,f)\equiv 1$.)

Mit Hilfe von zumindest für endlich vielfach zusammenhängende Gebiete G_z auf der Hand liegenden Approximationsbetrachtungen kann man sich auch noch von der Voraussetzung $\mu=0$ in einer Umgebung von ∂G_z befreien und erhält:

4.12′ *Wenn G_z endlich vielfach zusammenhängend ist und sonst alle Voraussetzungen des Satzes* 4.12 *erfüllt sind außer der Voraussetzung $\mu=0$ in einer Umgebung des Randes von G_z, so gibt es unter den Extremalfunktionen zum Extremalproblem* $\operatorname{Re} a_1 \to \max$ *in* $\mathfrak{Q}(\nu,\mu)$ *mindestens eine, die G_z hydrodynamisch normiert auf ein Parallelschlitzgebiet mit horizontalen Randschlitzen abbildet.*

Mit anderen Worten, dann ist die (eindeutig bestimmte) hydrodynamisch normierte Abbildung von G_z auf ein Parallelschlitzgebiet mit horizontalen Randschlitzen Lösung des Extremalproblems $\operatorname{Re} a_1\to\max$ in $\mathfrak{Q}(\nu,\mu)$. (Für endlich vielfach zusammenhängende Gebiete ergibt sich 4.12, 4.12′ auch aus einem allgemeineren Resultat in [10], Satz 2, worauf mich Herr R. KÜHNAU hinwies. Dort ist allerdings, die Existenz der Parallelschlitzabbildung gesondert zu zeigen, während sie hier gleich mitgeliefert wird.)

Das nächste Beispiel sei das GOLUSINsche Funktional

$$4.13 \quad \chi[f]=\operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^{N}\gamma_{ij}\log\frac{f(z_i)-f(z_j)}{z_i-z_j},$$

wobei die $z_1,\ldots,z_N$ fest vorgegebene Punkte aus G_z sind und der jeweilige Zweig des Logarithmus wie in [4] gewählt werden soll. Bei $\gamma_{ii}\neq 0$ ist mit $(f(z_i)-f(z_i))/(z_i-z_i)$ stets $f'(z_i)$ gemeint. Die γ_{ij} sind beliebige komplexe Zahlen. Es muß lediglich vorausgesetzt werden, daß die Matrix $\Gamma=((\gamma_{ij}))$ nicht schiefsymmetrisch ist, $\Gamma\neq-\Gamma^T$. Die Koeffizienten ν, μ des Differentialgleichungssystems 1.1 mögen außer den in (I) genannten Bedingungen noch $\nu(z)=\mu(z)\equiv 0$ für $|z-z_i|<r$ erfüllen mit einem festen positiven r, $i=1,\ldots,N$.

Aus 3.12 erhält man (vgl. [12], Extremalproblem 2) wieder eine asymptotische Entwicklung 4.5.3 mit

$$4.14 \quad \mathfrak{A}(w,f)=\mathfrak{L}A(\cdot,f)(w),\ A(w,f)=\sum_{i,j=1}^{N}\frac{-\gamma_{ij}}{(w-f(z_i))(w-f(z_j))}.$$

Wegen 2.18, 2.19 hat $\mathfrak{A}(w,f)$ nur endlich viele Nullstellen in der w-Ebene. Das GOLUSINsche Funktional ist also auch vom GRÖTZSCH-TEICHMÜLLERschen Typ bezüglich $\mathfrak{Q}(\nu,\mu)$ mit obigen ν, μ.

4.15 *Bemerkung.* Die Beziehungen 4.11, 4.14 (und auch 4.19 unten) sind Ausdruck eines "*Ähnlichkeitsprinzipes*" für die verallgemeinerten quadratischen Differentiale $\mathfrak{A}(w,f)\,dw^2$ in $\mathfrak{Q}(\nu,\mu)$: Wenn $A(w,f)\,dw^2$ das quadratische Differential von χ in der Klasse der konformen hydrodynamisch normierten Abbildungen (oder einer entsprechenden konform variierbaren Klasse von Abbildungen) eines Gebietes G_z ist, so ist $\mathfrak{A}(w,f)\,dw^2$ mit

4.15.1 $\mathfrak{A}(w,f)=\mathfrak{L}A(\cdot,f)(w)$

das verallgemeinerte quadratische Differential von χ in $\mathfrak{Q}(\nu,\mu)$. ($\mathfrak{L}$ hängt natürlich über κ von ν, μ und f ab.) Auf Grund von 2.18 bedeutet dies auch eine Übertragung des TEICHMÜLLERschen Prinzipes (über die Lage der Singularitäten der quadratischen Differentiale $A(w,f)\,dw^2$) auf die verallgemeinerten quadratischen Differentiale $\mathfrak{A}(w,f)\,dw^2$.

Dieses Ähnlichkeitsprinzip kann für große Klassen von Funktionalen bewiesen werden, z.B. ohne nennenswerte Schwierigkeiten für alle Funktionale χ der Form

4.16 $\chi[f]=F(f(z_1),\ldots,f(z_N),\,f'(z_1),\ldots,f'(z_N),\ldots,f^{(n)}(z_1),\ldots,f^{(n)}(z_N)),$

wobei F eine stetig partiell nach u_{ij}, v_{ij} differenzierbare Funktion $F(w_{01},\ldots,w_{0N},$ $w_{11},\ldots,w_{1N},\ldots,w_{n1},\ldots,w_{nN})$ in den $w_{ij}=u_{ij}+iv_{ij}$ ist, $i=0,\ldots,n$, $j=1,\ldots,N$, mit

$$\sum_{i,j}\left|\frac{\partial F}{\partial w_{ij}}\right|>0 \text{ für alle } w_{ij} \text{ mit } w_{ij}=f^{(i)}(z_j),\ f\in\mathfrak{Q}(\nu,\mu),$$

und wo ν, μ neben den in (I) genannten Bedingungen noch die Bedingung $\nu=\mu\equiv 0$ in einer Umgebung der fest vorgegebenen $z_1,\ldots,z_N\in G_z$ erfüllen sollen.

Ein weiteres Beispiel sei

4.17 $\chi[f]=\operatorname{Re}\iint\rho(z)f(z)\,d\delta_z,$

wobei $\rho(z)$ eine beschränkte meßbare Funktion mit beschränktem Träger $\operatorname{supp}\rho\subset G_z$ sein soll, die außerdem (der Einfachheit halber) die Bedingung

$\operatorname{supp}\rho \cap \operatorname{supp}\mu = \varnothing$ erfüllen soll. Dann gilt

$$\chi[f(\cdot,\lambda)] = \operatorname{Re}\iint \rho(z)\left[f(z) + \frac{\lambda}{f(z)-w_0} - \frac{1}{\pi}\iint \frac{2i\kappa(\tau)\operatorname{Re}[\lambda\Psi(\tau,w_0)]}{\tau - f(z)}\,d\delta_\tau + o(\lambda)\right] d\delta_z$$

$$= \chi[f] + \operatorname{Re}\lambda\left[\iint \frac{\rho(z)}{f(z)-w_0}\,d\delta_z + \frac{1}{\pi}\iint\left(\iint \Psi(\tau,w_0)\operatorname{Re}\frac{2i\kappa(\tau)\rho(z)}{f(z)-\tau}\,d\delta_\tau\right)d\delta_z\right] + o(\lambda).$$

Nun ist für $w \in E\backslash\operatorname{supp}\kappa$ (d.h. also insbesondere für die w aus einer Umgebung von $\partial f(G_z)$)

4.18 $$\iint\left(\iint \Psi(\tau,w)\operatorname{Re}\frac{2i\kappa(\tau)\rho(z)}{f(z)-\tau}\,d\delta_\tau\right)d\delta_z = \iint \Psi(\tau,w)\operatorname{Re}\left[2i\kappa(\tau)\iint\frac{\rho(z)}{f(z)-\tau}\,d\delta_z\right]d_\tau.$$

Man erkennt dies leicht, indem man unter Beachtung von $\nu, \mu \in C^\infty$ die Integrationsvariable z rechts in 4.18 durch $w = f(z)$ in die w-Ebene transformiert, wobei dann die Anwendung des Satzes von FUBINI möglich wird. Also gilt für das Funktional 4.17 wieder eine Entwicklung 4.5.3 mit

4.19 $$\mathfrak{A}(w,f) = \mathfrak{L}A(\cdot,f)(w), \quad A(w,f) = \iint \frac{\rho(z)}{f(z)-w}\,d\delta_z,$$

und dieses $A(w,f)$ gehört zu χ im konformen Falle. Um zu sichern, daß $\mathfrak{A}(w,f) \not\equiv 0$ ist in einer Umgebung einer jeden Randkomponente, müssen hier über $\rho(z)$ noch zwei weitere Voraussetzungen gemacht werden, nämlich daß ein Gebiet G_ρ in der z-Ebene existiert mit

4.20 $\infty \in G_\rho$, $\partial G_z \subset G_\rho$ und $\operatorname{supp}\mu \subset G_\rho \subset E\backslash\operatorname{supp}\rho$,

und

4.21 $$\iint \rho(z)\,d\delta_z = -a_1(\rho) \neq 0.$$

Unter diesen Voraussetzungen ist $\mathfrak{A}(w,f)\,dw^2$ das verallgemeinerte quadratische Differential zu einem Funkional vom verkürzten GRÖTZSCH-TEICHMÜLLERschen Typ. Denn $A(w,f)$ ist außerhalb von $f(\operatorname{supp}\rho)$ eine analytische Funktion in w mit

$$A(w,f) = \frac{a_1(\rho)}{w} + \frac{a_2}{w^2} + \cdots$$

für w aus einer Umgebung von ∞. Da $\iint \Psi(\tau, w) \operatorname{Re}[2i\kappa(\tau)A(\tau, f)]\, d\delta_\tau$ in $w=\infty$ mindestens eine zweifache Nullstelle hat, wie man sofort aus 2.5 auf Grund von 2.1 abliest (man wähle dort ein beschränktes G^κ), hat $\mathfrak{A}(w, f)$ in einer Umgebung von ∞ eine Entwicklung

$$\mathfrak{A}(w, f) = \frac{a_1(\rho)}{w} + \frac{\mathfrak{a}_2}{w^2} + \cdots$$

und ist folglich $\neq 0$. Nun ist wieder 2.19 anwendbar, und Satz 4.6 tritt in Kraft.

LITERATUR

[1] L. V. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings.* Princeton 1966.

[2] L. Bers, F. John, M. Schechter, *Partial differential equations.* New York, London, Sydney 1964.

[3] P. R. Garabedian, M. Schiffer, *Convexity of domain functionals.* J. Analyse Math. *2,* 281–368 (1953).

[4] G. M. Golusin, *Eine Variationsmethode in der Theorie der konformen Abbildung.* Mat. Sb. *21,* 83–117 und 119–132 (1947) [Russ.].

[5] H. Grötzsch, *Über die Verzerrung bei nichtkonformen schlichten Abbildungen mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche.* Sitzungsber. Sächs. Akad. Wiss. Leizig. Math.-Natur. Kl. *82,* 69–80 (1930).

[6] L. Hörmander, *Linear partial differential operators.* Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963.

[7] J. A. Hummel, *Lectures on variational methods in the theory of univalent functions.* Lecture Note *8,* University of Maryland 1972.

[8] S. L. Kruškal', *Quasikonforme Abbildungen und Riemannsche Flächen.* Novosibirsk 1975 [Russ.].

[9] R. Kühnau, *Herleitung einiger Verzerrungseigenschaften konformer und allgemeinerer Abbildungen mit Hilfe des Argumentprinzipes.* Math. Nachr. *39,* 249–275 (1969).

[10] ——, *Zur Methode der Randintegration bei quasikonformen Abbildungen.* Ann. Polon. Math. *31,* 269–289 (1976).

[11] O. Lehto, *Quasiconformal mappings and singular integrals.* Symposia Math. Istituto Nazionale di Alta Matematica *18,* 429–453 (1976).

[12] H. Renelt, *Modifizierung und Erweiterung einer SCHIFFERschen Variationsmethode für quasikonforme Abbildungen.* Math. Nachr. *55,* 353–379 (1973).

[13] ——, *Extremalprobleme bei quasikonformen Abbildungen unter höheren Normierungen.* Math. Nachr. *66,* 125–143 (1975).

[14] ——, *Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung.* Math. Nachr., im Druck.

[15] M. Schiffer, *A method of variation within the family of simple functions.* Proc. London Math. Soc. *44,* 432–449 (1938).

[16] ——, *The span of multiply connected domains.* Duke Math. J. *10,* 209–216 (1943).

[17] G. Schober, *Univalent functions – selected topics.* Lecture Notes in Mathematics vol. 478, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1975.

Martin-Luther-Universität DDR-401 Halle/S., Universitätsplatz 6
Sektion Mathematik

Eingegangen den 2. April 1978