**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 54 (1979)

**Artikel:** Courbure et singularités complexes.
**Autor:** Langevin, Rémi
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-41558

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 08.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

Comment. Math. Helvetici **54** (1979) 6–16 Birkhäuser Verlag, Basel

# Courbure et singularités complexes

RÉMI LANGEVIN

Soit $C$ une hypersurface complexe algébrique d'équation $f(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_d) = 0$ de dimension complexe $d$ et admettant l'origine comme point singulier isolé. Soit $C_\lambda$ l'hypersurface d'équation $f = \lambda$.

N. A'Campo m'a suggéré d'interpréter les propriétés de courbure de $C_\lambda$ au voisinage du point singulier.

Le plongement $C_\lambda \subset \mathbf{C}^{d+1} \simeq \mathbf{R}^{2d+2}$ munit $C_\lambda$ d'une métrique; soit $dv$ la forme volume de $C_\lambda$, $K$ est la fonction qui vérifie la formule de Gauss-Bonnet généralisée:

$$\int_M K\, dv = c_{2d}\chi(M)$$

pour toute variété $M$ de dimension $2d$, où $c_{2d} = (2\pi)^d/_{1.3.5\ldots(2d-1)}$ est la moitié du volume de la sphère $S^{2d}$. Dans la suite de l'article nous appellerons $K$ simplement "courbure gaussienne".

Quand il n'y a pas d'ambiguité, nous omettrons la forme volume dans une intégrale.

A chaque point singulier isolé, B. Teissier associe les nombres $\mu^{(d+1)}, \ldots, \mu^{(0)}$. Le premier, $\mu^{(d+1)}$ est le nombre de Milnor de la singularité (cf. [6]); Teissier démontre que le nombre de Milnor $\mu^{(i)}$ de la singularité obtenue en coupant $C$ par un $i$-plan $\mathscr{H}$ passant par l'origine est constant lorsque $\mathscr{H}$ évite un fermé analytique.

Teissier donne aussi dans l'appendice de [11] une interprétation géométrique de la somme $\mu^{(d+1)} + \mu^{(d)}$ qui est le point de départ de notre travail.

Dans [7], Milnor relie une intégrale de courbure au nombre de points critiques de projections orthogonales sur des droites réelles. A l'aide de méthodes analogues, nous démontrons le résultat suivant:

THEOREME 1.

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lim_{\lambda \to 0} \oint_{B_\epsilon \cap C_\lambda} (-1)^d K = (\mu^{(d+1)} + \mu^{(d)}) c_{2d}$$

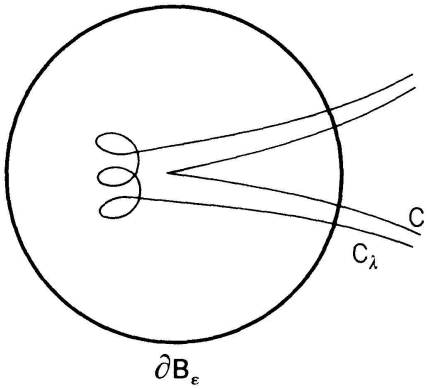


Figure 1

*où $B_\epsilon$ est la boule de centre* 0 *et de rayon* $\epsilon$.

(Cette intégrale est égale à l'intégrale $\int |K|$ car la fonction $(-1)^d K$ est positive sur une hypersurface complexe).

La démonstration du théorème 1 se fait en deux étapes.

## I. Courbe polaire associee a une direction d'hyperplan

(cf. [9], [11], [12] et figure 2).

Soit $H$ un hyperplan complexe contenant l'origine. $\tau(C_\lambda \cap B_\epsilon, H)$ est le nombre de points, fini pour presque tout $H$, où l'hyperplan tangent à $C_\lambda \cap B_\epsilon$ est parallèle à $H$. On note $G_d$ (ou $G_d(\mathbf{C})$) la grassmannienne complexe ensemble des hyperplans de $\mathbf{C}^{d+1}$ contenant l'origine.

Soit $(\xi_0, \ldots, \xi_d)$ un système de coordonnées locales de $(\mathbf{C}^{d+1}, 0)$ tel que $H$ ait pour équation $\xi_0 = 0$. Pour que l'hyperplan tangent à $C_\lambda$ en un point régulier $x$ soit parallèle à $H$, il faut et il suffit que grad $(f-\lambda)(x)$ soit un vecteur orthogonal à $H$, c'est-à-dire que:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_1}(x) = \frac{\partial f}{\partial \xi_2}(x) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial \xi_d}(x) = 0. \tag{1}$$

Soit $\Gamma_H$ la courbe complexe définie par (1). Soit $(C_\lambda, \Gamma_H)_x$ l'indice d'intersection de $C_\lambda$ et $\Gamma_H$ au point $x$. Posons

$$\tau(C_\lambda \cap B_\epsilon, H) = \sum_{x \in B_\epsilon} (C_\lambda, \Gamma_H)_x.$$

Pour presque tout $H$, on a : $\tau(C_\lambda \cap B_\epsilon, H) = \text{card}\ (\Gamma_H \cap C_\lambda \cap B_\epsilon)$.

La courbe $\Gamma_H$ coupe la courbe singulière $C$ en 0. Dans [8], Teissier démontre le résultat suivant:

THEOREME 2. *Il existe un fermé analytique strict de dimension* $d-1$: $X \subset G_d$, *tel que, pour tout hyperplan* $H$ *appartenant à* $G_d - X$, *le nombre d'intersection en* $0 \in \mathbf{C}^{d+1}$ *de la courbe* $\Gamma_H$ *et de l'hypersurface singulière* $C$ *est* $\mu^{(d+1)} + \mu^{(d)}$:

$$(\Gamma_H \cdot C)_0 = \mu^{(d+1)} + \mu^{(d)}$$

*où* $\mu^{(d+1)}$ *est le nombre de Milnor de la singularité* $(C, 0)$ *et* $\mu^{(d)}$ *le nombre de Milnor de l'intersection* $(C \cap H), 0) \subset (H, 0)$ *qui est aussi une hypersurface admettant l'origine de* $H$ *comme point singulier isolé.*

*Remarque.* La notation $\mu^{(d)}$ a un sens car ce dernier nombre ne dépend pas du choix de $H \in G_d - X$ [11]. Rappelons que le nombre de Milnor de la singularité isolée 0 de l'hypersurface d'équation $f(\xi_0, \ldots, \xi_d) = 0$ est la dimension

$$\dim_{\mathbf{C}} \left[ \mathbf{C}[\xi_0, \ldots, \xi_d] \Big/ \left( f, \frac{\partial f}{\partial \xi_0} \cdots \frac{\partial f}{\partial \xi_d} \right) \right].$$

Le théorème de Teissier implique que, lorsque $\lambda$ tend vers l'origine, $(\mu^{(d+1)} + \mu^{(d)})$ points d'intersection de $\Gamma_H$ et $C_\lambda$ tendent vers l'origine (cf. [11]; donc, pour un hyperplan $H$ appartenant à $G_d - X$:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lim_{\lambda \to 0} \tau(C_\lambda \cap B_\epsilon, H) = \mu^{(d+1)} + \mu^{(d)}. \tag{2}$$

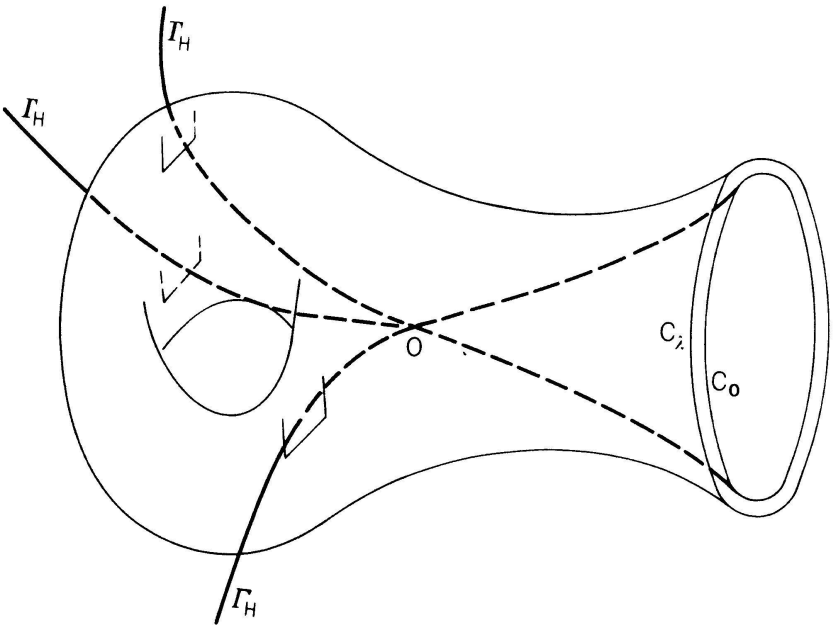


Figure 2

Avant de poursuivre la démonstration du théorème, donnons quelques exemples:

a) L'originie n'est pas singulière, on a $\mu^{(d+1)} = \mu^{(d)} = 0$; pour toute direction d'hyperplan qui n'est pas celle de l'hyperplan tangent en 0, on a, pour $\epsilon$ assez petit $\tau(C \cap B_\epsilon, H) = 0$ et donc pour $\epsilon$ et $\lambda$ assez petits $\tau(C_\lambda \cap B_\epsilon, H) = 0$.

b) Considérons la courbe de $\mathbf{C}^2$ d'équation $x^2 - y^2 = 0$; on a:

$$\mu^{(1)} = 1$$

$$\mu^{(2)} = 1$$

et donc

$$\mu^{(2)} + \mu^{(1)} = 2.$$

La trace réelle de la situation est, pour $\lambda$ réel,

c) pour trouver $\mu^{(2)} + \mu^{(1)} = p$, on peut considérer la singularité $x^p - y^2 = 0$.

Considérons sur $G_d(\mathbf{C})$ la densité kaelhérienne usuelle qui est la mesure proportionnelle à la mesure image de la mesure de Lebesgue de $S^{2d+1}$, sphère unité de $\mathbf{R}^{2d+2} \simeq \mathbf{C}^{n+1}$ par la projection

$$\pi : S^{2d+1} \to G_d(\mathbf{C})$$

$$z \mapsto (\text{espace complexe orthogonal à l'espace complexe engendré par } z).$$

Pour cette mesure, le volume total de $G_d$ est: $\mathrm{vol}(S^{2d+1})/\mathrm{vol}(\text{fibre}) = \pi^d/d!$.

Les hypersurfaces $C_\lambda$ sont de degré $\delta = \text{degré } (f)$, elles sont donc toutes de classe majorée par $\delta(\delta-1)^d$ (cf. [9]). En effet, les points où le plan tangent à $C_\lambda$ est, par exemple, horizontal sont solution des équations:

$$f - \lambda = \frac{\partial f}{\partial z_1} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial z_n} = 0$$

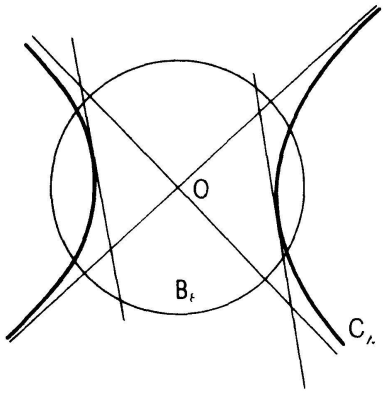


Figure 3

et, par le théorème de Bezout, sont au nombre de $\delta(\delta-1)^d$ au plus. On a donc:

$$\tau(C_\lambda \cap B_\epsilon, H) \leq \delta(\delta-1)^d.$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue appliqué à la fonction dépendant de $\lambda$:

$$H \mapsto \tau(B_\epsilon \cap C_\lambda, H)$$

et donc:

$$\lim_{\lambda\to 0} \int_{G_d} \tau(C_\lambda \cap B_\epsilon, H) = \int_{G_d} \lim_{\lambda\to 0} \tau(C_\lambda \cap B_\epsilon, H).$$

Appliquons une deuxième fois ce théorème à la fonction dépendant de $\epsilon$: $\lim_{\lambda\to 0} \tau(C_\lambda \cap B_\epsilon, H)$:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{G_d} \lim_{\lambda\to 0} \tau(C_\lambda \cap B_\epsilon, H) = \int_{G_d} \lim_{\epsilon\to 0} \lim_{\lambda\to 0} \tau(C_\lambda \cap B_\epsilon, H)$$

et donc l'égalité (2) implique que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \lim_{\lambda\to 0} \int_{G_d} \tau(C_\lambda \cap B_\epsilon, H) = (\pi^d/d!)[\mu^{(d+1)} + \mu^{(d)}] \tag{2'}$$

## II. Application de Gauss complexe

On sait que pour une hypersurface réelle $M^{2p} \subset \mathbf{R}^{2p+1}$ l'application de Gauss $\gamma : M \to \mathbf{P}_{2p}$

$$x \mapsto N_x$$

qui, à un point, fait correspondre la direction normale à $M$ au point a pour jacobien la courbure gaussienne de $M$ en ce point.

Plus généralement, Fenchel [2] calcule la courbure gaussienne d'une sous-variété de dimension paire immergée dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^N$. Ce calcul a un résultat simple si la sous-variété est une hypersurface complexe.

Soit $\gamma_C : C \to G_d$ l'application qui, à un point régulier $x$ de $C^* = C - \{\text{points singuliers}\}$, fait correspondre l'hyperplan complexe tangent en $x$ à $C$.

On a alors, si dp est la forme volume de $G_d$ et dv celle de $C$:

THEOREME [Milnor[1]].

$$(-1)^d K\, dv = \frac{2.4\ldots 2d}{1.3.5\ldots(2d-1)} \cdot \gamma_C^* \, dp = a_d \gamma_C^* \, dp. \tag{4}$$

La démonstration de ce théorème se fait en trois étapes.

LEMME 1. *Si $A$ et $B$ sont des matrices $d \times d$ à coefficients réels, on a:*

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & -A \end{bmatrix} = (-1)^d \, |\det (A + iB)|^2. \tag{5}$$

*Démonstration.* Il suffit de considérer le cas où les coefficients de $A$ sont des indéterminées, $A$ est alors une matrice non singulière. Multiplions les deux membres par $\det \left[\begin{smallmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{smallmatrix}\right] = \det A^{-1}]^2$. L'équation (5) est remplacée par l'équation équivalente:

$$\det \begin{bmatrix} I & C \\ C & -I \end{bmatrix} = (-1)^d \, |\det I + iC|^2 \quad \text{où} \quad C = A^{-1}B. \tag{6}$$

En remplaçant la "ligne" $[C, -1]$ par $[C, -I] - C\ [I, C]$ le terme de gauche devient:

$$\begin{aligned} \det(-I - C^2) &= (-1)^d \det(I + C^2) = (-1)^d \det(I + iC) \det(I - iC) \\ &= (-1)^d \, |\det I + iC|^2 \end{aligned}$$

□

LEMME 2. *Si une hypersurface $C$ de $C^{d+1}$ admet après un changement unitaire de coordonnées l'équation suivante au voisinage de* 0:

$$z_{d+1} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{d} u_{jk} z_j z_k + \textit{termes de plus haut degré},$$

*la courbure gaussienne à l'origine est donnée par:*

$$(-1)^d \, |\det u_{jk}|^2 = \frac{1.3\ldots(2d-1)}{2.4\ldots(2d)} K = a_d K \tag{7}$$

---

[1]La démonstration de la relation (4) m'a été fournie par Milnor après une discussion à l'Université de Warwick. Elle permet d'éviter de démontrer le théorème 1 par un long calcul de géométrie riemannienne réelle.

*Démonstration.* Posons $u_{jk} = A + iB$. La forme quadratique $\mathrm{Re}\,(z_{d+1})$ a pour matrice: $\left[\begin{smallmatrix} A & -B \\ -B & -A \end{smallmatrix}\right]$. Le déterminant de cette matrice est $(-1)^d\,|\det u_{jk}|^2$.

Remplacer $z_{d+1}$ par $e^{i\theta}z_{d+1}$ ne change pas la valeur de ce déterminant. Fenchel démontre que la moyenne de $\det \mathrm{Re}\,(e^{i\theta}z_{d+1})$, lorsque $e^{i\theta}z_{d+1}$ décrit une fibre du fibré normal unitaire est

$$\frac{1.3\ldots(2d-1)}{2.4\ldots 2d}K,$$

ce qui démontre la formule (7), cf. [2].

La dernière étape démontre le

THEOREME. *$C^*$ et $K$ gardant la même signification, l'application de Gauss complexe*:

$$\gamma_C : C^* \to G_d$$

vérifie:

$$a_d\gamma^*(dp) = (-1)^d K\,dv, \qquad \text{où } a_d = \frac{2.4\ldots 2d}{1.3.5\ldots(2d-1)}$$

*Démonstration.* Choisissons comme précedemment des coordonnées locales. $\gamma_C$ envoie le point de $C$ de coordonnées $z_1, \ldots, z_d$ sur le point de $G_d$ de coordonnées

$$\frac{\partial z_{d+1}}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial z_{d+1}}{\partial z_d}.$$

La matrice jacobienne complexe de cette application est $[u_{j,k}]$ tandis que la matrice jacobienne de l'application réelle correspondante est $\left[\begin{smallmatrix} A & B \\ -B & A \end{smallmatrix}\right]$ et a donc pour déterminant

$$|\det u_{jk}|^2 = (-1)^d \frac{1.3\ldots(2d-1)}{2.4\ldots 2d} K = (-1)^d a_d^{-1} K.$$

Il suffit maintenant d'un dernier lemme pour démontrer le théorème 1.

LEMME

$$\int_{C_\lambda \cap B_\epsilon} a_d^{-1}\,|K| = \int_{G_d} \tau(C_\lambda \cap B_\epsilon, H)$$

*Démonstration.* L'ensemble des points critiques de l'application $\gamma_{\mathbf{C}}$ est précisément l'ensemble des points où la courbure gaussienne est nulle. Soit $Y = \gamma_{\mathbf{C}}\{x \mid K(x) = 0\}$ l'ensemble des valeurs critiques de $\gamma_{\mathbf{C}}$. Le théorème de Sard implique que $Y$ est de mesure 0. L'ensemble $\gamma_{\mathbf{C}}^{-1}(Y) - \{x \mid K(x) = 0\}$ est aussi de mesure nulle puisque c'est un ensemble de points réguliers de $\gamma_{\mathbf{C}}$ dont l'image est contenue dans l'ensemble de mesure nulle $Y$. On a donc, puisque

$$\gamma_{\mathbf{C}}^{-1}(Y) = \{x \mid K(x) = 0\} \cup \{\gamma_{\mathbf{C}}^{-1} Y - \{x \mid K(x) = 0\}\},$$

$$\int_{C_\lambda \cap B_\epsilon} |K| = \int_{C_\lambda \cap B_\epsilon - \{x \mid K(x)=0\}} |K| = \int_{C_\lambda \cap B_\epsilon - \gamma_{\mathbf{C}}^{-1}(Y)} |K|.$$

Soit

$$A_i = \{H \in G_d - Y \mid \tau(C_\lambda \cap B_\epsilon, H) = i;\ i > 0;\ i \in \mathbf{N}\}.$$

On a:

$$\int_{C_\lambda \cap B_\epsilon} a_d^{-1} |K| = \int \gamma_{\mathbf{C}}^* \, dp = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\gamma_{\mathbf{C}}^{-1}(A_i)} \gamma^* \, dp = \sum i \int_A dp$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \tau(C_\lambda \cap B_\epsilon, H) = \int_{G_d - Y} \tau(C_\lambda \cap B_\epsilon, H) = \int_{G_d} \tau(C_\lambda \cap B_\epsilon, H) \qquad \square$$

En reportant ce résultat dans la formule (2′), on obtient l'énoncé du théorème 1. $\square$

## III. Courbes Algebriques

L. Ness démontre dans sa thèse le résultat suivant:

THEOREME [9]. *Soit $C$ une courbe de degré de $\delta$ de $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ admettant $(0, 0, 1)$ comme point singulier isolé, $C_i$ une suite de courbes de degré $\delta$ non singulières qui convergent vers $C_0$.*

*$\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ est muni de la métrique kaehlérienne usuelle et $C_i$ de la métrique induite par l'inclusion $C_i \subset \mathbf{P}_2\mathbf{C}$. La courbure gaussienne de $C_i$ munie de cette dernière métrique est notée $K$.*

Alors

$$\lim_{i \to \infty} \operatorname*{Inf}_{C_i} K = -\infty.$$

Nous pouvons à partir du théorème 1 retrouver ce résultat pour les courbes $C_\lambda$ de $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ d'équation $f(x, y) = \lambda$ dans la carte affine $z \neq 0$.

*Proposition.* $\lim_{\lambda \to 0} \operatorname{Inf}_{C_\lambda} K = -\infty$.

En effet (cf. [9]), le théorème de Wirtinger permet décrire, si $dv$ est la forme volume induite par le plongement $C_\lambda \hookrightarrow \mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ muni de sa forme volume canonique:

$$\frac{1}{\pi} \int_{C_0} dv = \frac{1}{\pi} \int_{C_\lambda} dv = \delta.$$

Comme $\lim_{\epsilon \to 0} \int_{C_0 \cap B_\epsilon} dv = 0$ et que $C_\lambda$ converge uniformément vers $C_0$ à l'extérieur de la boule $B_\epsilon$, on a:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left[ \sup_\lambda \int_{C_1 \cap B_\epsilon} dv \right] = 0$$

et donc, pour la forme $dv$ induite par le plongement $C_\lambda \hookrightarrow \mathbf{C}^2$ muni de sa forme volume canonique, on a aussi:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left[ \sup_\lambda \int_{C_\lambda \cap B_\epsilon} dv \right] = 0.$$

Donc, si $K_1$ est la courbure gaussienne provenant du plongement $C_\lambda \hookrightarrow \mathbf{C}^2$:

$$\lim_{i \to 0} \left[ \sup_{C_\lambda} |K_1| \right] = +\infty$$

puisque

$$\int_{C_\lambda \cap B_\epsilon} |K_1| = [\mu^{(2)} + \mu^{(1)}] c_2 \neq 0.$$

Enfin, Linda Ness démontre l'inégalité [6; p. 8]

$$K \leq K_1 + 2 \quad (^2)$$

$$K_1 \leq 0.$$

---

(2)Linda Ness appelle courbure gaussienne le nombre $(-1)^d \, |\det u_{jk}|^2$ de notre Lemme 2.

En effet, la courbure gaussienne de la courbe $C$ d'équation dans la carte affine $z \neq 0$, $y = y(x)$, pour la métrique induite par l'inclusion de $C$ dans $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ s'écrit:

$$K(x, y(x)) = 2 - \frac{(1+|y|^2+|x|^2)^3}{\left(\left|x\frac{dy}{dx} - y\right|^2 + \left|\frac{dy}{dx}\right|^2 + 1\right)} \cdot \left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|^2 \qquad ([9], \text{p. } 6)$$

La courbure gaussienne au point $x$, $y(x)$ de $C$ pour la métrique induite sur $C$ par le p l'inclusion dans $\mathbf{C}^2$ muni de la métrique plate est:

$$K_1(x, y(x)) = -\frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|^2}{1 + \left|\frac{dy}{dx}\right|^2)} \quad (^2) \qquad ([9], \text{p. } 8)$$

L'inégalité

$$\frac{1+|y|^2+|x|^2}{1 + \left|\frac{dy}{dx}\right|^2 + \left|x\frac{dy}{dx} - y\right|^2} \geq \frac{1}{1 + \left|\frac{dy}{dx}\right|^2}$$

implique l'inégalité cherchée: $K - 2 \leq K_1 \leq 0$.

On a donc $\lim_{\lambda \to 0} \operatorname{Inf}_{C_\lambda} K = -\infty$.

*Remarque.* Toujours en s'appuyant sur les travaux de Lê Dung Trang et Teissier, on peut redémontrer géométriquement par des méthodes analogues des formules de Plücker [3].

(2) cf la note au bas de le page précédeute.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. S. Chern and R. K. Lashof, *On the total curvature of immersed manifold I and II*, American Journal of Math. *79* (1957), p. 306–318 et Michigan Math. Journal *5* (1958), p. 5–12.
[2] W. Fenchel, *On total curvature of Riemann manifolds I*, J. London Math. Soc. *15*, p. 15–22.
[3] R. Langevin, *Classe moyenne d'une sous-variété d'une sphère ou d'un espace projectif*, à paraître.
[4] —— et H. Rosenberg, *On curvature integrals and knots*, Topology, vol. *15* (1976), p. 405–416.
[5] Le Dung Trang, *Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe*, Ann. Inst. Fourier, *2, 3, 4* (1973). p. 261–270.
[6] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Princeton University Press, 1968.
[7] —— *On the total curvature of knots*, Annals of Math., vol. *52*, n° 2 (1950), p. 289–296.
[8] —— and J. Stasheff, *Caracteristic classes*, Appendix 2, Princeton University Press.
[9] L. Ness, *Curvature on algebraic plane curves*, thesis, Harvard, 1975.

[10] M. SPIVAK, *A comprehensive introduction to differential geometry*, Publish or Perish, Boston.
[11] B. TEISSIER, *Sur diverses conditions d'équisingularité des familles de courbes*, Preprint juin 1975.
[12] —— *Variétés polaires des hypersurfaces, à paraître.*

*Rémi Langevin*
*Université de Paris XI*
*Centre d'Orsay*
*Mars 1978*

*Reçn le 5 novembre* 1976/27 *april* 1978