**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici

**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft

**Band:** 54 (1979)

**Artikel:** Sur le spectre des opérateurs elliptiques à bicaractéristiques toutes les périodiques.

**Autor:** Verdière, Yves Colin de

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-41593

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 08.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

Comment. Math. Helvetici **54** (1979) 508–522 Birkhäuser Verlag, Basel

# Sur le spectre des opérateurs elliptiques a bicaractéristiques toutes periodiques

YVES COLIN DE VERDIÈRE

## Introduction

Dans cet article, nous détaillons les démonstrations et résultats annoncés dans [*CV*2]. Rappelons de quoi il s'agit: $X$ est une variété $C^\infty$ compacte de dimension $d$ munie d'une densité $C^\infty$ $dx$; $P$ est un opérateur pseudo-différentiel (OPD en abrégé) elliptique autoadjoint positif d'ordre 1 opérant sur les fonctions sur $X$. On note $p \in C^\infty(T^*X\backslash 0, \mathbf{R}^+\backslash 0)$ le symbole principal de $P$ et on suppose que le symbole sous-principal de $P$ est nul. Soit $H_p$ le gradient symplectique de $p$ par rapport *à* la structure symplectique canonique de $T^*X\backslash 0$, l'hypothèse principale notée ($C$) est que les trajectoires du flot de $H_p$ (les bicaractéristiques) sont $2\pi$ périodiques: $\varphi_{2\pi} = \mathrm{Id}$; si $2\pi$ est la plus petite période de chaque bicaractéristique, on dira que $P$ vérifie l'hypothèse ($SC$). L'opérateur $P$ admet un spectre discret $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \ldots$, chaque valeur propre étant répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité; on notera $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une base orthonormée de fonctions propres ($P\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$) de $L^2(X, dx)$. Duistermaat et Guillemin ([D–G)] ont obtenu une information très intèressante sur ce spectre qui a été précisée dans certains cas par Weinstein ([W1]): si on note $\alpha$ (entier) l'indice de Maslov commun à toutes ces bicaractéristiques $2\pi$-périodiques, les valeurs propres $\lambda_n$ s'accumulent autour de la progression arithmétique $k + (\alpha/4)(k \in \mathbf{N})$. Avant de préciser les résultats obtenus dans notre article, donnons quelques exemples de la situation décrite plus haut.

*Exemple* 1. $X$ est une variété riemannienne à géodésiques toutes $2\pi$-périodiques, $dx$ est l'élément de volume riemannien et $P = \Delta^{1/2}$ où $\Delta$ est le laplacien associé à la métrique de $X$. Pour une étude détaillée de ces variétés, on pourra consulter le livre [BE]. Comme exemples, signalons les espaces symétriques compacts de rang 1 munis de leur métrique canonique, les quotients de tels espaces par un groupe fini d'isométries (espaces lenticulaires); enfin, sur les sphères, on sait construire des métriques non canoniques ayant cette propriété (surfaces de Zoll).

*Exemple* 2. $X$ est comme dans l'exemple 1, $V$ est une fonction $C^\infty$ réelle sur $X$ et $c \in \mathbf{R}$ tel que $V + c > 0$ partout; on pose alors $P = (\Delta + V + c)^{1/2}$. Les valeurs

propres de $P$ sont alors reliées simplement à celles de l'opérateur de Schrödinger $H=\Delta+V$ (cf. [CV 1] et [W4]).

Décrivons maintenant le contenu de l'article: dans le paragraphe 1, on précise le résultat de Duistermaat et Guillemin de la façon suivante: il existe un $M>0$ tel que si

$$I_k=\left[\left(k+\frac{\alpha}{4}\right)^2-M,\left(k+\frac{\alpha}{4}\right)^2+M\right],$$

alors Spectre $(P^2)\subset\bigcup_{k=0}^{\infty} I_k$; on peut alors définir la multiplicité approchée par $d_k=\text{Cardinal}\ \{n|\lambda_n^2\in I_k\}$ et le résultat principal est une description du comportement de la suite $d_k$: par exemple, sous l'hypothèse (SC), il existe $k_0\in\mathbf{N}$ tel que, pour $k\geq k_0$, $d_k$ est une fonction polynômiale de $k$. On donne ensuite quelques exemples et propriétés de ces polynômes lorsque $P^2$ est un opérateur différentiel.

Dans le paragraphe 2, on montre comment les résultats sur la multiplicité permet de trouver certains théorèmes géométriques d'intégralité très proches de ceux de Weinstein ([W2] et [W3]).

Dans le paragraphe 3, on étudie la dispersion des $\lambda_n^2$ autour des valeurs $(k+(\alpha/4)^2$; supposant qu'on ait écrit toutes les valeurs propres de $P^2$ sous la forme $\lambda_n^2=(k+(\alpha/4))^2+\mu_{k,l}$ avec $1\leq l\leq d_k$ et $-M\leq\mu_{k,1}\leq\cdots\leq\mu_{k,d_k}\leq M$, on s'intéresse aux mesures $\mu_k=\sum_{l=1}^{d_k}\delta(\mu_{k,l})$ et à leur répartition limite lorsque $k\to+\infty$, on précise ainsi certains résultats de [W4].

Enfin dans le paragraphe 4, on étudie les relations entre les résultats précédents et le développement asymptotique de Minakschisundaram-Pleijel pour $Z(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-t\lambda_n^2}$ lorsque $t\to 0^+$. Cela donne entre autres une preuve d'une conjecture due à Chachère ([CH]) sur la valeur moyenne des $\mu_k$ lorsque $k\to+\infty$ dans le cas d'une métrique de Zoll sur $S^2$.

*Remarque.* Tous les opérateurs pseudo-différentiels (OPD) et opérateurs intégraux de Fourier considérés dans cet article sont classiques.

*Remerciements.* Je tiens à remercier A. Hirschowitz pour des discussions sur la propriété de transmission ainsi que pour la preuve de la proposition 1.9.; je remercie aussi le referee qui m' a signalé façon plus élémentaire de finir la preuve du théoréme 1.4 et une incorrection dans l'énoncé 3.1.

## 1. Les multiplicités

On étudie le spectre de l'opérateur $P$ en le perturbant de façon à obtenir un opérateur ayant pour spectre une progression arithmétique, plus précisément, on

a le

THEOREME 1.1. *Il existe un OPD $Q_1$ d'ordre $-1$ avant mêmes fonctions propres que $P$ (et donc commutant avec $P$), unique à opérateur régularisant de rang fini près tel que* Spectre $(P+Q_1)\subset\{k+(\alpha/4)|k\in\mathbf{N}\}$ *où $\alpha\in\mathbf{N}$ est l'indice de Maslov commun aux bicaractéristiques $2\pi$-périodiques de $P$.*

COROLLAIRE 1.2. *Il existe $M>0$ tel que, si*

$$I_k=\left[\left(k+\frac{\alpha}{4}\right)^2-M,\left(k+\frac{\alpha}{4}\right)^2+M\right]$$

*alors* Spectre $(P^2)\subset\bigcup_{k=0}^{+\infty}I_k$ *(comparer avec* [D–G] *et* [W1])

Ces résultats ont été prouvés indépendamment par Weinstein ([W4]) et par V. Guillemin ([G2]).

*Preuve du corollaire* 1.2. On a $P^2=(P+Q_1)^2-Q$ où $Q$ est un OPD d'ordre 0, donc borné dans $L^2(X,dx)$. Soit $M$ la norme de cet opérateur; désignons par $\mu_0\leq\mu_1\leq\cdots\leq\mu_n\leq\cdots$ les valeurs propres de $(P+Q_1)^2$, on a: $\mu_n-M\leq\lambda_n\leq\mu_n+M$ d'après la caractérisation variationnelle de la $n$-ième valeur propre d'un opérateur autoadjoint (minimax). On en déduit aisément 1.2.

*Preuve du théorème* 1.1. D'après [D–G], on a:

$$\exp\left(-2\pi i\left(P-\frac{\alpha}{4}\right)\right)=Id+C,$$

où $C$ est un OPD d'ordre $-1$, de plus $C\varphi_n=c_n\varphi_n$ avec

$$c_n=\exp\left(-2\pi i\left(\lambda_n-\frac{\alpha}{4}\right)\right)-1$$

comme $C$ est un opéateur compact, $c_n\to 0$ quand $n\to+\infty$. Soit $n_0$ tel que, si $n\geq n_0$, on ait $|c_n|\leq\frac{1}{2}$, on définit un opéateur $Q_2$ par

$$Q_2\varphi_n=\frac{1}{2i\pi}\operatorname{Log}(1+c_n)\varphi_n,$$

où l'on prend une détermination quelconque de Log pour $n<n_0$ et la

détermination principale pour $n \geq n_0$. Alors si $C = C_1 + C_2$ avec

$$C_1\varphi_n = \begin{cases} c_n\varphi_n & \text{pour} \quad n < n_0, \\ 0 & \text{pour} \quad n \geq n_0, \end{cases}$$

on a $Q_2 = 2i\pi \operatorname{Log}(Id + C_1) + 2i\pi \operatorname{Log}(Id + C_2)$,

le premier opérateur étant régularisant de rang fini; le second étant un OPD d'ordre $-1$ car défini par la série

$$\frac{1}{2i\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{C_2^n}{n}$$

qui converge normalement et au sens des OPD. Donc $Q_2$ est un OPD d'ordre $-1$ et il est clair que

$$\exp\left(-2i\pi\left(P + Q_2 - \frac{\alpha}{4}\right)\right) = Id$$

et donc

$$\text{Spectre } (P + Q_2) \subset \left\{k + \frac{\alpha}{4} \middle| k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Comme le symbole principal $p$ de $P + Q_2$ est $> 0$, il n'y qu'un nombre fini de valeurs propres $k + (\alpha/4)$ telles que $k < 0$: remplacer celles-ci par $\alpha/4$, revient á modifier $Q_2$ par un opérateur régularisant de rang fini, pour obtenir un opérateur $Q_1$ satisfaisant les propriétés requises. L'unicité est évidente: si $Q_1$ et $Q_1'$ sont deux tels opérateurs, le spectre de $Q_1 - Q_1'$ est formé d'entiers et comme cet opérateur est compact, il n'a qu'un nombre fini de valeurs propres non nulles.

Pour étudier les multiplicités, on définit $d_k$ comme étant la multiplicité de $k + (\alpha/4)$ comme valeur propre de $P + Q_1$; pour $k$ assez grand, on a évidemment aussi $d_k = \text{Cardinal } \{\text{Spectre } (P^2) \cap I_k\}$; $d_k$ n'est pas très bien défini à cause de l'ambiguité sur $Q_1$, mais est bien défini comme germe au voisinage de l'infini; d'autre part, si $Q_1$ et $Q_1'$ sont comme plus haut, on a: $\sum_{k=0}^{+\infty}(d_k - d_k') = 0$ (à cause du minimax).

Avant d'énoncer le résultat fondamental de ce paragraphe, on doit faire quelques remarques géométriques. Si $p$ vérifie la condition $(C)$ il peut y avoir des bicaractéristiques ayant comme périodes $(2\pi/m_j)$, $(m_j \in \mathbf{N},\ m_j \geq 2)$, $j = 1, 2, \ldots, N$.

PROPOSITION 1.3. *L'ensemble des points de $T^*X\backslash 0$ ayant $(2\pi/m_j)$ comme période sous l'actrion du flot $\varphi_t$ de $H_p$ est une sous-variété conique $W_j$ de $T^*X\backslash 0$ de*

*dimension paire* $2d_j$. *Les* $W_j$ *sont des variétés de points fixes "clean" (au sens de* [D–G]) *pour l'action de* $2\pi q/m_j (q \in \mathbf{Z})$.

En effet, comme $\varphi_{t+2\pi} = \varphi_t$, le flot $\varphi_t$ définit une action $C^\infty$ de $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ sur la variété compacte $Z = p^{-1}(\{1\})$. Les $W_j$ correspondent à la stratification de $Z$ suivant les types d'orbites de cette action. La parité de la dimension est une conséquence facile du fait que le sous-espace invariant par un sous-groupe compact du groupe symplectique réel est de dimension paire, car à conjugaison près, il s'agit d'un sous-groupe du groupe unitaire.

On peut maintenant énoncer le

THÉORÈME 1.4. *Il existe un polynôme* $R(t)$ *de la forme* $R(t) = b_1 t^{d-1} + d_3 t^{d-3} + b_4 t^{d-4} + \cdots + b_d$ *et un entier* $k_0$ *tel que pour* $k \geq k_0$, *on ait:*

$$d_k = R\left(k + \frac{\alpha}{4}\right) + \sum_{j=1}^{N} u_{j,k}$$

*où les suites* $u_{j,k}$ *sont de la forme* $u_{j,k} = \sum_{l=1}^{m_j - 1} (\omega_{j,l})^k R_{j,l}(k)$ *avec*

$$\omega_{j,l} = \exp\left(2\pi i \frac{l}{m_j}\right)$$

*et* $R_{j,l}$ *polynôme de degré* $d_j - 1$; *en particulier sous l'hypothèse* (*SC*), $d_k = R(k + \alpha/4)$.

*Remarque.* Le polynôme $R$ vient d'être calculé par Boutet de Monvel et Guillemin ([B–G]) à l'aide de la formule d'Atiyah-Singer (voir aussi [B]).

*Preuve du théorème* 1.4. Soit $Z(t) = \mathrm{Tr}(\exp(-it(P + Q_1))$, cette distribution sur $\mathbf{R}$ peut aussi s'écrire $Z(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k e^{-it(k+(\alpha/4)}$. Les $d_k$ sont donc les coefficients de Fourier de la distribution $e^{it(\alpha/4)} Z(t)$; leur comportement quand $k \to +\infty$ est déterminé par les singularités de $Z(t)$ qui sont analysées dans [H] et [D–G], rappelons en particulier que

$$\mathrm{Supp\ Sing}\,(Z(t)) \subset \left\{ \frac{2\pi l}{m_j} \middle| l \in \mathbf{Z}, j = 1, \ldots, N \right\}$$

et que la théorie de la clean intersection qui s'applique ici permet de savoir la forme précise de la singularité en ces points: si $\rho \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ est telle que

$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \rho(t-2\pi k)=1$ et que Support $(\rho)\subset ]-2\pi, 2\pi[$, on a: d'une part

$$d_k=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} (\rho Z)(t)e^{it(k+(\alpha/4)}\,dt$$

et d'autre part, d'après [D–G],

$$(\rho Z)(t)=\int e^{-it\tau}(b(\tau)+\sum_{j=1}^{N}\sum_{l\in\mathbf{Z}\setminus 0} e^{-2\pi i(l/mj)\tau}b_{l,j}(\tau))\,d\tau$$

où $b(\tau)=R(\tau)+0(\tau^{-1})$ et $b_{l,j}(\tau)=R'_{l,j}(\tau)+0(\tau^{-1})$ ($R$ étant un polynôme de la forme voulue par 1.4 et $R'_{l,j}$ des polynômes de degré $d_j-1$). On en déduit aisément:

$$d_k=R\left(k+\frac{\alpha}{4}\right)+\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{m_j-1}(\omega_{j,l})^k R_{j,l}(k)+\epsilon_k$$

avec $\epsilon_k\to 0$ quand $k\to\infty$. Il suffit donc de montrer que $\epsilon_k$ est nul pour $k$ assez grand. Comme on le verra en détail au paragraphe 2, $d'_k=d_k-\epsilon_k$ vérifie une équation de récurrence linéaire à coefficients entiers de la forme $A_0d'_k+A_1d'_{k+1}+\cdots+A_nd'_{k+n}=0$. On en déduit facilement que $\text{limite}_{k\to\infty}(A_0D_k+\cdots+A_nd_{k+n})=0$ et comme c'est un entier, il est nul pour $k\geq k_0$. On en déduit que $\epsilon_k$ satisfait pour $k\geq k_0$ ladite relation de récurrence, ce qui n'est possible que si $\epsilon_k=0$ pour $k\geq k_0$. en effet, les racines de l'équation caractéristique de cette récurrence sont de module 1. On a ainsi prouvé le théorème 1.4.

Il est intéressant de préciser la forme des polynômes $R$, $R_{j,l}$ sur des exemples:

*Exemple* 1.5. Le cas des espaces symétriques compacts de rang 1 simplement connexes.

Ces exemples vérifient la propriété ($SC$), et on peut donner un procédé de fabrication uniforme des polynômes $R$: $R$ est de la forme

$$R(t)=\frac{2j}{(d-1)!}tH_{l_1}(t)H_{l_2}(t)\quad\text{avec}\quad l_1+l_2=d-2,\ l_1=\frac{\alpha}{2}-1$$

et $H_l$ est le polynôme de degré $l$ défini par:

$$H_l(t)=\left(t-\frac{l-1}{2}\right)\left(t-\frac{l-3}{2}\right)\cdots\left(t+\frac{l-1}{2}\right);$$

$j$ est déterminé par la condition

$$d_0 = R\left(\frac{\alpha}{4}\right) = 1.$$

On verra plus bas que

$$j = \frac{\mathrm{vol}\,(X)}{\mathrm{vol}\,(S^d)}.$$

Rappelons dans un tableau les valeurs de $d$, $\alpha$, $j$ et des valeurs propres $\lambda_n^2$ du laplacien pour ces espaces:

| $X$ | $d$ | $\alpha$ | $\lambda_i^2$ | $j$ |
|---|---|---|---|---|
| $S^n$ | $n$ | $2(n-1)$ | $k(k+n-1)$ | 1 |
| $P^n\mathbf{C}$ | $2n$ | $2n$ | $k(k+n)$ | $\frac{2n-1!}{n!n-1!}$ |
| $P^n\mathbf{H}$ | $4n$ | $4n+2$ | $k(k+2n+1)$ | $\frac{4n-1!}{2n-1!2n+1!}$ |
| $P^2\mathbf{C}a$ | 16 | 22 | $k(k+11)$ | 39 |

On peut remarquer que ces polynômes $R$ possède plusieurs propriétés remarquables, notamment celle d'avoir tous leurs zéros dans $\mathbf{Z}/2$, et celle d'être de la parité de $d+1$. De plus, sur ces exemples, $R$ est entièrement déterminé par $d$ et $\alpha$ et donc $j$ aussi.

*Exemple* 1.6. L'espace lenticulaire $\mathrm{S0}(3)/\mathbf{Z}_2$.

Pour cet espace muni de la métrique canonique qui donne aux géodésiques la période $2\pi$ (sauf une de période $\pi$) on a $d=3$ et $\alpha=2$, les valeurs propres du laplacien sont de la forme $k(k+1)$ et la multipli-cité $d_k$ vaut $d_k = \frac{1}{2}((2k+1)^2+(-1)^k)$.

*Exemple* 1.7. Un opérateur $P$ sur $S^2$ tel que $P^2$ n'est pas un opérateur différentiel.

Soit

$$P = 2\sqrt{\Delta_0 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

où $\Delta_0$ est le laplacien canonique sur $S^2$ et $(\partial/\partial\theta)$ le champ de vecteur des rotations

infinitésimales autour de $Oz$. Toutes les bicaractéristiques sont $2\pi$-périodique, sauf une qui se projette sur l'équateur et a la période $2\pi/3$. On a $d=2$ et $\alpha=4$, les valeurs propres sont de la forme $k+1$, $k\geq 0$ et on a:

$$d_k=\left[\frac{2k}{3}\right]+1=\frac{2}{3}(k+1)+u_k \quad \text{avec} \quad u_{3k}=\frac{1}{3}=-u_{3k+1} \text{ et } u_{3k+2}=0.$$

*Le cas où $P^2$ est un opérateur différentiel.* Dans ce case, on va prouver que la propriété de parité du polynôme $R$ est toujours satisfaite. La preuve utilise la propriété de transmission telle qu'elle a été introduite par Boutet de Monvel et étudiée en liaison avec la théorie des opérateurs intégraux de Fourier par Hirschowitz et Piriou ([H–P]).

THÉORÈME 1.8. *Si $P^2$ est un opéateur différentiel, le polynôme $R$ a la parité de $d+1$.*

Ce théorème se décompose en deux propositions:

PROPOSITION 1.9. *Si $P^2$ est un OPD de transmission (en particulier, si c'est un opérateur différentiel), l'OPD $P_1^2=P^2+Q=(P_1+Q)^2$* (cf. th. 1.1) *est aussi de transmission.*

PROPOSITION 1.10. *Si $P_1^2$ est de transmission, la singularité à l'origine de $\mathrm{Tr}(e^{-itP_1})=Z_1(t)$ est telle que pour $\rho\in C_0^\infty$, à support assez voisin de* 0, *on ait: $(\rho Z_1)(t)=\int e^{-it\tau}b(\tau)\,d\tau$ avec $b(\tau)\cong b_1\tau^{d-1}+b_3\tau^{d-3}+b_5\tau^{d-5}+\cdots$.*

La proposition 1.10 est prouvée dans [D–G] sous l'hypothèse que $P_1^2$ est un opérateur différentiel, mais l'hypothèse qui intervient dans la démonstration est que $P_1^2$ est de transmission.

*Preuve de la proposition* 1.9. Il suffit de prouver que $Q$ est de transmission, c'est-à-dire que $\tau Q=Q$, où $\tau$ désigne la transformation qui au symbole $\sum_{j=0}^\infty a_{m-j}(x,y,\xi)$ associe le symbole $(-1)^m\sum_{j=0}^\infty(-1)^j a_{m-j}(x,y,\xi)$. La démonstration se décompose en plusieurs lemmes:

LEMME 1.11. *Les seules transmisssions globales sur les OPD sur une variété connexe de dimension $d\geq 2$ sont $+\tau$ et $-\tau$.*

Cela résulte aisément du corollaire 1.19 de [H–P]: ici $\Lambda=N^*(\Delta)\backslash 0$, où $\Delta$ est la diagonale de $X\times X$, est une variété connexe; les seules fonctions antisymétriques localement constantes de $\Lambda$ dans $\mathbf{R}/4\mathbf{Z}$ sont constantes et donc égales à 0 et +2.

LEMME 1.12. *$Q$ est caractérisé (modulo régularisant) par les propriétés:* $\cos 4\pi\sqrt{P^2+Q} = \pm Id$, $[P, Q]=0$ *et $Q$ est un OPD d'ordre* 0.

En effet, si $(\lambda_n^2, \varphi_n)$ est la décomposition spectrale de $P^2$ et que l'on pose $Q\varphi_n = \mu_n\varphi_n$, $\mu_n$ est bornée et $\cos 4\pi\sqrt{\lambda_n^2+\mu_n} = \pm 1$ et donc $\lambda_n^2+\mu_n = (k'/4)^2 (k' \in \mathbf{Z})$ et comme $\lambda_n^2 \in I_{k_n}$, on voit que pour $n$ assez grand $\mu_n = (k_n + (\alpha/4))^2 - \lambda_n$.

LEMME 1.13. $\cos 4\pi\sqrt{P^2+\tau Q} = \pm \mathrm{Id}$.

En effet, soit $E_Q$ le noyau de $\cos t\sqrt{P^2+Q}$, caractérisé par:

$$\begin{cases} (\partial_t^2 + P^2 + Q)E_Q = 0 \\ \gamma_0 E_Q = \mathrm{Id} \\ \gamma_1 E_Q = 0 \end{cases}$$

où $\gamma_0 = \restriction_{t=0}$ et $\gamma_1 = \partial/\partial t \restriction_{t=0}$. Soit $\omega$ la transmission introduite dans la proposition 9.5 de [H–P], on a $E_{\tau Q} = \pm\omega E_Q$, en effet: $(\partial_t^2 + P^2 + \tau Q)\omega E_Q = \tau \circ \omega(\partial_t^2 + P^2 + Q)E_Q = 0$ (théorème 5–6 de [H – P]) $\gamma_0\omega E_Q = (\theta \circ \omega)\gamma_0 E_Q = \pm \mathrm{Id}$ où $\theta$ est la transmission telle que $\theta\gamma_0 = \gamma_0$; en effet $\theta \circ \omega = \pm\tau$ d'après le lemme 1.11 et $\tau\ \mathrm{Id} = \mathrm{Id}$,

$$\gamma_1\omega E_Q = (\theta \circ \omega)\gamma_1 E_Q = 0.$$

On a maintenant si $R_{4\pi}$ est l'opérateur de restriction à $t = 4\pi$, $\cos 4\pi\sqrt{P^2+\tau Q} = R_{4\pi} \circ E_{\tau Q} = \pm R_{4\pi} \circ \omega E_Q$ et si $\xi$ est une transmission telle que $\xi R_{4\pi} = R_{4\pi}$, on a: $\cos 4\pi\sqrt{P^2+\tau Q} = \pm(\xi \circ \omega)\,\mathrm{Id} = \pm \mathrm{Id}$.

On conclut alors aisément que $\tau Q$ vérifie les propriétés de lemme 1.12 et donc $\tau Q = Q$: $Q$ est de transmission.

*L'indice.* D'après le théorème, $d_k$ est donné pour $k \geq k_0$ par la formule $d'_k = R(k + (\alpha/4) + \cdots$; on pose $i = \sum_{k=0}^{\infty} d_k - d'_k$.

PROPOSITION ET DÉFINITION 1.14. *L'indice $i$ ne dépend pas du choix de $Q_j$, en fait il ne dépend que du symbole $p$ de $P$. On appelle $i$ l'indice de $P$.*

*Remarque* 1.15. $i = 0$ dans tous les exemples précédents.

## 2. Théorémes d'integralité

Dans le cas (SC), on a le

THÉORÈME 2.1. *Sous l'hypothèse* (SC), *le cofficient dominant $b_1$ de $R(t)$*

*satisfait* $b_1(d-1)! \in \mathbf{Z}$ *et*

$$b_1\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{d}{2}\right)(d-1)! \in \mathbf{Z}$$

*En particulier, si* $\alpha+2d$ *n'est pas multiple de* 4, $b_1(d-1)!$ *est un entier pair.*

COROLLAIRE 2.2. *Dans le cas riemannien,* $b_1(d-1)! = (2\,\mathrm{vol}\,(X))/(\mathrm{vol}\,(S_d))$ *est un entier et même un entier pair si* $\alpha+2d$ *n'est pas multiple de* 4.

*Remarque* 2.3. A. Weinstein a prouvé dans [W2] par des méthodes géométriques directes que $(\mathrm{vol}\,(X))/(\mathrm{vol}\,(S_d))$ est un entier.

*Preuve du théorème* 2.1. C'est une conséquence du lemme bien connu suivant:

LEMME 2.4. *Soit* $(d_k)_{k\geq k_0}$ *une suite d'entiers qui soit une fonction polynomiale de* $k$ *de degré* $d-1$, *alors* $d_k$ *est une combinaison à coefficients entiers des polynômes*

$$U_j(k) = \frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!} \quad \textit{avec } 0 \leq j \leq d-1.$$

*De ce lemme, on déduit que*:

$$b_1\left(k+\frac{\alpha}{4}\right)^{d-1} + b_3\left(k+\frac{\alpha}{4}\right)^{d-3} + \cdots = A_0 U_{d-1}(k) + A_1 U_{d-2}(k) + \cdots$$

Identifiant les termes en $k^{d-1}$ et $k^{d-2}$, il vient: $b_1(d-1)! = A_0$ et

$$b_1(d-1)!\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{d}{2}\right) = A_0 + A_1,$$

d'où l'on déduit 2.1. Le corollaire 2.2 est une conséquence générale de l'expression de $b_1$ donnée dans [H] et [D–G]: $b_1 = (2\pi)^{-d}\,\mathrm{vol}\,\{p=1\}$, ce qui dans le cas riemannien se traduit par $b_1 = (2\pi)^{-d}\,\mathrm{vol}\,(S^{d-1})\,\mathrm{vol}\,(X)$, dont on déduit 2.2.

*Dans le cas où l'hypothèse* (*C*) *seule est satisfaite,* il faut faire appel à un argument un peu plus compliqué sur les suites récurrentes d'entiers pour obtenir le:

THÉORÈME 2.5. *Sous l'hypothèse* (*C*) *et avec les notations du paragraphe* 1, *soit* $N = \mathrm{ppcm}(m_j^{d_j})$, *alors* $b_1 N(d-1)!$ *est un entier.*

*Remarque* 2.6. Ce théorème est à comparer à celui de A. Weinstein ([W3]) qui, dans le cas riemannien, affirme que si $N_1 = \mathrm{ppcm}(m_j^{d_j-1})$ (on a toujours, $N$ divise $N_1$), alors $N_1 \cdot (\mathrm{vol}\,(X))/(\mathrm{vol}\,(S^d))$ est un entier, ce qui équivaut à dire que $b_1 N_1 (d-1)!$ est un entier pair.

Ce théorème est une conséquence de 1.4 et du:

LEMME 2.7. *Soit* $d_k = R(k) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{m_j-1} (\omega_{j,l})^k R_{j,l}(k)$ (*où* $\omega_{j,l} = \exp 2\pi i(l/m_j)$, $R$ *polynôme de degré* $d-1$ *et* $R_{j,l}$ *polynôme de degré* $d_j - 1$) *une suite d'entiers pour* $k \geq k_0$, *alors si* $R(t) = b_1 t^{d-1} + b_2 t^{d-2} + \cdots + b_d$ *et si* $N = \mathrm{ppcm}(m_j^{d_j})$, *on a* $N b_1 (d-1)! \in \mathbf{Z}$.

*Preuve de* 2.7. A toute relation de récurrence sur les suites $(u_k)_{k \geq k_0}$ de la forme $c_0 u_k + c_1 u_{k+1} + \cdots + c_{n-1} u_{k+n-1} = 0$, on associe son polynôme caractéristique $B(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_{n-1} t^{n-1}$; il est classique que les solutions de la relation de récurrence sont de la forme $u_k = \sum_j (\alpha_j)^k R_j(k)$ où les $\alpha_j$ sont zéros de $B$ et $R_j$ est un polynôme dont le degré $\mu_j$ est égal à l'ordre du zéro $\alpha_j$ diminué de 1. Soit

$$B(t) = \mathrm{ppcm} \left( \frac{t^{m_j} - 1}{t - 1} \right)^{d_j},$$

on a $B(t) = B_1(t) \cdots B_r(t)$ avec $B_k(t) = 1 + \cdots + t^{\nu_k - 1}$ où $\nu_k = \mathrm{ppcm}\,\{m_j \mid d_j \geq k\}$, en particulier $B(1) = \mathrm{ppcm}\,(m_j^{d_j})$. Ce polynôme à coefficients entiers est le polynôme caractéristique d'une relation de récurrence du type précédent dont $d_k - R(k)$ est solution: en effet les $\omega_{i,l}$ sont des zéros d'ordre $d_i$ de $B$; soit $T(u_k) = c_0 u_k + \cdots + c_{n-1} u_{k+n-1}$ cette relation, on a: $T(d_k) = T(R(k)) = v_k$ est une suite d'entiers, or $T(R(k)) = Q(k)$ est un polynôme de degré $d-1$ de $k$ dont le coefficient dominant est $T(1) b_1$, c'est-à-dire $B(1) b_1$, ce qui prouve le lemme 2.7 grâce à 2.4.

## 3. La dispersion

Si $d_k$ est la multiplicité de $k + (\alpha/4)$ comme valeur propre de $P_1 = P + Q_1$, on peut écrire les valeurs propres de $P^2$ sous la forme $\lambda_{k,l}^2 = (k + (\alpha/4))^2 + \mu_{k,l}$ avec $-M \leq \mu_{k,l} \leq \cdots \leq \mu_{k,d_k} \leq M$, on introduit alors les mesures $\mu_k$ à support dans $[-M, +M]$ définies par $\mu_k = \sum_{l=1}^{d_k} \delta(\mu_{k,l})$ et on s'intéresse au comportement asymptotique des $\mu_k$ lorsque $k \to +\infty$. Cette étude a été entreprise par A. Weinstein dans [W4] dont nous allons préciser certains résultats:

THÉORÈME 3.1. *Il existe des symboles classiques* $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{R}_{j,l}$ (*d'ordre* $d-1$ *et*

*$d_j - 1$ respectivement) à valeurs dans les distributions à support dans $[-M, +M]$ de la forme $\mathcal{R}(t) \sim \nu_1 t^{d-1} + \nu_3 t^{d-3} + \nu_4 t^{d-4} + \cdots$ tels que, si $\rho \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, on ait:*

$$\int \rho \, d\mu_k = \int \rho \, d\mathcal{R}\left(k + \frac{\alpha}{4}\right) + \sum \int \rho \, d\mathcal{R}_{j,l}(k)(\omega_{j,l})^k.$$

*Preuve.* Elle est très proche de celle du théorème 1.4: on introduit $Z_\rho(t) = \sum_k \mu_k(\rho) e^{-it(k+(\alpha/4)} = \mathrm{Tr}\,(\rho(Q)e^{-itP_1})$, où $P^2 = P_1^2 + Q$. Les $\mu_k(\rho)$ sont donc les coefficients de Fourier de $e^{it(\alpha/4)} Z_\rho(t)$, il reste donc à étudier les singularités de $Z_\rho(t)$; il suffit alors de savoir que $\rho(Q)$ est un OPD d'ordre 0 de symbole sous principal nul: l'analyse faite de la trace de $e^{-itP_1}$ dans [D–G] est basée sur le fait que le noyau de cet opérateur est un opérateur intégral de Fourier d'un certain ordre associé à une variété lagrangienne $\Lambda$, ce qui reste toujours vrai après composition avec l'OPD $\rho(Q)$. L'assertion relative à la nullité de $\nu_2$ peut s'obtenir en adaptant les raisonnements du paragraphe 2 de [D–G] au problème

$$\begin{cases} \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial u}{\partial t} + P_1 u = 0 \\ u(0) = \rho(Q) f. \end{cases}$$

Un problème difficile et non résolu en général est d'identifier les distributions $\nu_1$, $\nu_3$, etc $\cdots$ (voir cependant la réponse pour $\nu_1$ dans le cas où $P^2 = \Delta_0 + V$, $\Delta_0$ laplacien pour la métrique canonique sur un espace symétrique compact de rang 1 dans [W4]; une étude plus fine de la convergence de $(1/k^{d-1})\mu_k$ vers $\nu_1$ est entreprise dans [CV1]).

Par analogie avec le théorème 1.8, on a le:

THÉORÈME 3.2. *Si $P^2$ est de transmission (en particulier si c'est un opérateur différentiel, on a $\nu_2 = \nu_4 = \cdots = \nu_{2k} = 0$ ($\forall k \in \mathbf{N}$).*

*Preuve.* On a vu (proposition 1.8) que $P_1^2$ et $Q$ sont de transmission. Les $\nu_k(\rho)$ sont tels que, au voisinage de 0,

$$\mathrm{Tr}\,(\rho(Q)e^{-itQ_1}) = \int_0^{+\infty} e^{-it\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k(\rho) \tau^{d-k} \, d\tau \text{ (modulo } C^\infty);$$

ce sont aussi, d'après [D–G], à des coefficients universels près, les résidus aux points $(d+1-k)/2$ du prolongement $B$ méromorphe de la fonction $\zeta_\rho(s) = \mathrm{Tr}\,(\rho(Q)P_1^{-2s})$. Or, d'après Seeley ([S]), si $B = \rho(Q)(P_1^2 - \lambda)^{-1}$ (calculée au sens de

[S]), $B$ a un symbole $b(\lambda, x, \xi) \cong \sum_{j=0}^{+\infty} b_{-2-j}(x, \zeta, \lambda)$, et on a:

$$\text{Résidu}\left(\zeta_\rho, \frac{d-k+1}{2}\right) = c \int_\Gamma \int_{p=1} \lambda^{(d+1-k)/2} b_{-(k+1)}(x, \xi, \lambda)\, d\lambda \cdot \frac{dx\, d\xi}{dp}.$$

Il suffit donc de vérifier que $b_{-(k+1)}(x, -\xi, \lambda) = (-1)^{k+1} b_{-(k+1)}(x, \xi, \lambda)$, c'est-à-dire que $B$ est de transmission: c'est clair pour $(P_1^2 - \lambda)^{-1}$ d'après les formules de [S] p.290 et d'autre part $\rho(Q)$ est de transmission comme limite de polynômes de $Q$.

## 4. Relations avec le developpement de Minakschisundaram-Pleijel

Rappelons ([B–G–M]) que, si $P^2 = \Delta$ (ou $\Delta + V$) est un opérateur différentiel, la fonction $Z(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-t\lambda_n^2}$ admet quand $t \to 0^+$ un développement asymptotique de la forme:

$$Z(t) \cong (4\pi t)^{-d/2}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots),$$

dont les coefficients $a_0$, $a_1$, $a_2$ et même $a_3$ ont été calculés.

*Etudions d'abord le cas de $S^2$*

Soit g une (SC) métrique sur $S^2$, on sait ([BE]) que $\alpha = 2$, vol $(S^2, g) = 4\pi$ et donc $d_k = 2k+1$ pour $k \geq k_0$. On note i l'indice de ce spectre et $\lambda_{k,l}^2 = k(k+1) + \mu_{k,l}$, $l = 1, \ldots, d_k$ les valeurs propres du laplacien. On a donc:

$$\sum_{l=1}^{2k+1} \mu_{k,l} = c_1(2k+1) + c_3(2k+1)^{-1} + O(k^{-3})$$

$$\sum_{l=1}^{2k+1} \mu_{k,l}^2 = f_1(2k+1) + f_3(2k+1)^{-1} + O(k^{-3})$$

où $c_j = \int t\, d\nu_j$ et $f_j = \int t^2\, d\nu_j$. D'autre part, on a le développement asymptotique de $Z(t)$: $\sum e^{-t\lambda_{k,l}^2} \cong (4\pi t)^{-1}(\text{vol } X + \frac{1}{3}\int \tau v_g + \cdots)$ où $\tau$ est la courbure scalaire; utilisant la formule de Gauss Bonnet, il vient:

$$\sum e^{-t\lambda_{k,l}^2} \cong t^{-1} + \frac{1}{3} + a_2 t + \cdots.$$

On a donc:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-tk(k+1)} \sum_{l=1}^{d_k} e^{-t\mu_{k,l}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{2k+1}^{d_k} e^{-t(k(k+1)+\mu_{k,l})}$$

$$+ \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-tk(k+1)}(2k+1-t\sum \mu_{k,l} + \frac{t^2}{2} \sum \mu_{k,l}^2 + \cdots).$$

Donc, si $Z_0(t) = \sum (2k+1)e^{-tk(k+1)}$ et $W_0(t) = \sum (2k+1)^{-1} e^{-tk(k+1)}$,

$$Z(t) = Z_0(t) + \sum_{k=0}^{+\infty} (d_k - (2k+1)) - tc_1 Z_0 + \frac{t^2}{2} f_1 Z_0 - tc_3 W_0 + \frac{t^2}{2} f_3 W_0 + \cdots).$$

On a donc:

$$Z(t) = Z_0(t)(1 - tc_1) + i + c_3 t \log t + O(t).$$

D'où l'on déduit:

$$i - Bc_1 = 0 \quad \text{et} \quad c_3 = 0.$$

THÉORÈME 4.1. *Sous les hypothèse précédentes,*

$$\sum_{l=1}^{2k+1} \mu_{k,l} = (2k+1)i + O(k^{-3}).$$

*En particulier dans le cas d'une métrique obtenue par déformation de la métrique canonique* $g_0$, *on obtient*

$$\frac{1}{d_k} \sum_{l=1}^{d_k} \mu_{k,l} = O(k^{-4})$$

(*résultat conjecturé par Chachère* ([CH])).

*Dans le cas général,* la même méthode conduit à un résultat dans le cas de déformations de métriques vérifiant $(C)$:

THÉORÈME 4.2. *Soit* $g(t)$ *une famille de métriques riemanniennes à géodésiques* $2\pi$*-périodiques sur une variété* $X$ *de dimension* $d > 2$, *on sait que* $\mathrm{vol}\,(X, g(t))$ *est indépendant de* $t$, *soit* $a_1(t)$ *le coefficient de développement de*

*Minakschisundaram-Pleijel pour la métrique* $g(t)$ *et* $c_1(t) = \int t\, d\nu_1$ *pour la métrique* $g(t)$, *on a*: $a_1(t) + \mathrm{vol}\,(X, g(0)) \times c_1(t) = \text{constante}$.

## BIBLIOGRAPHIE


[B] BOUTET de MONVEL L., *Nombre de valeurs propres d'im opérateur elliptique et polynôme de Hilbert-Samuel* (Sém. Bourbaki, n° 532 (1979)).

[B-G-M] BERGER M., GAUDUCHON P. et MAZET E., *Le spectre d'une variété riemannienne. Lecture* Notes in Math. 194, Springer (1971).

[BE] BESSE A., *Manifolds all of whose geodesics are closed.* Ergebnisse der Math. und Grenzgebrite, Springer (1978).

[B-G] BOUTET de MONVEL L., et GUILLEMIN V., *The spectral theory of Toeplitz operators* (à paraitre)

[CH] CHACHÈRE G., *Numerical experiments concerning the eigenvalues of the Laplacian on a Zoll surface.* Ph. D. Thesis, U.C. Berkeley (1977).

[CV1] COLIN DE VERDIÈRE Y., *Spectre joint d'OPD qui commutent,* I et II. Preprints (1978). (I à parître dans Duke Math. Journal (1979)).

[CV2] COLIN DE VERDIÈRE Y., *Sur le spectre des opéateurs elliptiques à bicaractéristiques toutes périodiques.* Comptes rendus Ac. Sciences Paris *286,* série A, (1978), 1195–1197.

[D-G] DUISTERMAAT H., GUILLEMIN V., *The spectrum of elliptic operators and periodic geodesics,* Invent. Math. *29,* (1975), 184–269.

[G1] GUILLEMIN V., *Some spectral results on rank one symetric spaces,* Adv. in Math. *28* (1978), 129–137.

[G2] GUILLEMIN V., *Lectures on the spectral theory of elliptic operators.* Duke Math. J. *44* (1977), 485–517.

[H] HÖRMANDER L. *The spectral function of an elliptic operator.* Acta Math. *121* (1968), 193–218.

[H-P] HIRSCHOWITZ A., PIRIOU A., *Propriétés de transmission pour les opérateurs intégraux de Fourier.* Preprint Nice (1978).

[S] SEELEY R., *Complex powers of an elliptic operator.* Proc. Symp. AMS Pure Math. *10* (1967), 288–307.

[W1] WEINSTEIN A., *Fourier integral operators, quantization and the spectra of Riemannian manifolds.* C.N.R.S. symposium, Aix en Provence (1974).

[W2] WEINSTEIN A., *On the volume of manifolds all of whose geodesics are closed.* Journal of Diff. Geom. *9,* (1974), 513–517.

[W3] WEINSTEIN A., *Symplectic V-manifolds,...* Comm. in pure and applied math. *30* (1977), 265–271.

[W4] WEINSTEIN A., *Asymptotic of eigenvalue clusters for the Laplacian plus a potential.* Duke Math. Journal *44* (1977), 883–892.


(29.9.78)


Laboratoire de Mathématiques Pures – Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HÈRES (France)


Reçu le 12 octobre 1978