Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 54 (1979)

Artikel: Ueber den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Flächen.

Autor: Buser, Peter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41591

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici **54** (1979) 477–493 Birkhäuser Verlag, Basel

Ueber den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Flächen

PETER BUSER

1. Einleitung

Es sei λ_1 der kleinste positive Eigenwert des Laplace-Beltramioperators $\Delta = -\operatorname{div} \operatorname{grad}$ auf einer kompakten Fläche M. Dabei verstehen wir unter einer *Fläche* eine zweidimensionale unberandete Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Problemstellung der Riemannschen Geometrie im Grossen ist die Frage, welchen Einfluss geometrische Invarianten auf λ_1 ausüben. Man versucht deshalb λ_1 mit diesen Invarianten zu vergleichen. Abschätzungen nach unten sind schwieriger. Ein allgemeingültiges Prinzip in dieser Richtung ist die *Ungleichung von Cheeger* [6]

$$\lambda_1 \geqslant \frac{h^2(M)}{4}, \tag{A}$$

wo $h = h(M)$ eine isoperimetrische Konstante bedeutet, die folgendermassen definiert ist:

$$h(M) = \inf_{\mathscr{C}} J(\mathscr{C}), \qquad J(\mathscr{C}) = \frac{l(\mathscr{C})}{\min\{\operatorname{vol}(M_1), \operatorname{vol}(M_2)\}}.$$

Dabei durchläuft $\mathscr{C}$ die Menge $\Sigma(M)$ aller Wegzyklen der Form $\mathscr{C} = \gamma_1 + \cdots + \gamma_m$ mit $\gamma_j : S^1 \to M$ differenzierbar, welche M in zwei offene disjunkte Gebiete M_1 und M_2 mit dem gemeinsamen Rand $\mathscr{C} = \partial M_1 = \partial M_2$ zerlegen, [2] p. 196, [3] p. 11, [12] p. 489. Hier bedeuten $l(\mathscr{C}) = l(\gamma_1) + \cdots + l(\gamma_m)$ die *Länge* von $\mathscr{C}$ und vol (.) das *zweidimensionale Lebesguemass* bezüglich der Riemannschen Metrik von M.

Die Konstante h lässt sich auch für höhere Dimension definieren, und (A) bleibt richtig. Während aber dort h schwer in den Griff zu bekommen ist, lässt sich diese Grösse für Flächen direkt auf geometrischem Wege angehen. Als erstes werden wir mit Hilfe von (A) zeigen, dass es für Flächen eine untere Schranke für

λ_1 gibt, die nur den *Durchmesser* $d = \sup\{\text{dist}\,(p, q) \mid p, q \in M\}$ und die *untere Schranke* $-\kappa^2$ *für die Gaussche Krümmung* K explizit enthält:

$$\sqrt{\lambda_1} \geqslant \frac{\kappa}{4\pi \sinh \frac{\kappa d}{2}}. \tag{B}$$

Dabei ist κ entweder reell mit $\kappa \geqslant 0$, oder κ ist rein imaginär mit $\kappa\sqrt{-1} < 0$. Dazu gilt die *Konvention*, dass $\kappa^{-1} \sinh \kappa x = x$ zu lesen ist, wenn $\kappa = 0$, und $\kappa^{-1} \sinh \kappa x = |\kappa|^{-1} \sin |\kappa| x$, wenn $\kappa\sqrt{-1} < 0$. Für andere Resultate dieser Art vergleiche man hierzu u.a. die Arbeiten von Aubin [1] Buser [5], Huber [8] und Yau [12].

Der Beweis von (B) ist wesentlich zweidimensional und benutzt, dass man den Inhalt der *r-Hülle*

$$\gamma^r := \{p \in M \mid \text{dist}\,(p, \gamma) \leqslant r\}$$

eines Weges $\gamma : S^1 \to M$ mit Hilfe der Weglänge *in vielen Fällen* (siehe (2.8)) nach oben abschätzen kann durch

$$\text{vol}\,(\gamma^r) \leqslant 2\pi l(\gamma) \frac{\sinh \kappa r}{\kappa}. \tag{C}$$

Diese Ungleichung liefert etwas überraschend auch eine Abschätzung von λ_1 mit Hilfe der Konstanten h nach oben:

$$\sqrt{\lambda_1} \leqslant \frac{\kappa}{\operatorname{arsinh} \frac{\kappa}{4\pi h}}, \tag{D}$$

die sich für kleine Werte von h noch verschärfen lässt (siehe (3.4)). Dabei gilt in (D) ähnlich wie in (B) die *Konvention*, dass $\kappa^{-1} \operatorname{arsinh} \kappa x = x$ zu lesen ist, wenn $\kappa = 0$, und $\kappa^{-1} \operatorname{arsinh} \kappa x = |\kappa|^{-1} \arcsin |\kappa| x$, wenn κ imaginär. Im Hinblick auf (A) taucht natürlich die Frage auf, ob man die Ungleichung (D) nicht unabhängig von κ machen kann. Dazu gibt es aber einfache Gegenbeispiele. Wir werden in Abschnitt 4 anhand des Torus *eine Schar von Flächen* herstellen *mit*

$$\text{vol}\,(M) = 1, \qquad \lambda_1 \to 4\pi^2 \quad \text{und} \quad h(M) \to 0. \tag{E}$$

Die untere Schranke für λ_1 in (B) ist für grosse d von der Ordnung $\exp(-d)$, wenn man als Krümmungsnormierung $\kappa = 1$, dh. $K \geqslant -1$ annimmt. Vergleicht

man diesen Wert etwa mit λ_1 auf einem flachen Torus, so scheint es, dass die Schranke weit von der Realität entfernt liegt. Wir werden aber zum Schluss am Beispiel einer geeigneten Riemannschen Fläche vom Geschlecht zwei (mit konstanter Krümmung $K=-1$) zeigen, dass eine untere Schranke für λ_1 unter den genannten Bedingungen sogar im Falle konstanter Krümmung bestenfalls von der Grössenordnung $\exp(-d/2)$ sein kann, (Vergleiche hierzu die Bemerkung in Aubin [1] p. 368).

Die vorliegende Arbeit ist ein Teil meiner Dissertation, für deren Zustandekommen ich Herrn Professor H. Huber meinen herzlichen Dank aussprechen möchte.

2. Beweis von (B)

In der ganzen Arbeit machen wir von folgenden Bezeichnungen Gebrauch: (M, g) bedeutet eine Mannigfaltigkeit M, versehen mit einem Riemannschen Masstensor g. Statt (M, g) schreiben wir meist nur M. Vermöge g ist auf M eine *Lebesgue-Integration*

$$f \mapsto \int_M f\,dM$$

erklärt, dM ist das *Volumenelement.* Den Tangentialraum von M im Punkt p bezeichnen wir mit M_p. Für einen Tangentialvektor $A \in M_p$ ist durch $\|A\| = \sqrt{g(A, A)}$ eine Norm definiert; dadurch wird M_p zu einem euklidischen Raum. Für eine differenzierbare Funktion f auf M ist grad f das Gradientenvektorfeld. Genügt f lediglich einer Lipschitzbedingung, so ist grad f immer noch fast überall (dh. bis auf eine Ausnahmemenge vom Mass null) definiert, und $\|\text{grad } f\|$ ist eine quadratisch integrierbare Funktion.

Es sei nun M eine kompakte Fläche mit Krümmung $K \geqslant -\kappa^2$ und $\mathscr{C} = \gamma_1 + \cdots + \gamma_m \in \Sigma(M)$. Durch $\mathscr{C}$ wird M in die beiden Gebiete M_1 und M_2 aufgeteilt. Wir *definieren*

$$r_{\mathscr{C}} = \min_{i=1,2} \max_{p \in M_i} \operatorname{dist}(p, \mathscr{C}). \tag{2.1}$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt

$$\operatorname{vol}(\mathscr{C}^r) \leqslant 2\pi l(\mathscr{C}) \frac{\sinh \kappa r}{\kappa} \quad \forall r \in (0, r_{\mathscr{C}}]. \tag{2.2}$$

Dabei ist $\mathscr{C}^r = \{p \in M \mid \operatorname{dist}(p, \mathscr{C}) \leq r\}$. Den *Beweis von* (2.2) führen wir in drei Schritten:

Zuerst sei $\gamma : [0, l] \to M$ mit $\|\dot{\gamma}\| = 1$ ein beliebiger differenzierbarer, nach der Bogenlänge parametrisierter Weg der Länge l auf M, und es sei bloss vorausgesetzt, dass die Fläche M vollständig ist. Weiter sei $r > 0$ vorgegeben mit der Einschränkung, dass

$$|\kappa| r < \pi/2, \qquad \text{falls } \kappa \text{ imaginär.}$$

Weiter braucht die Ungleichung $K \geq -\kappa^2$ nur auf $\gamma^{r+\varepsilon}$ zu gelten für ein $\varepsilon > 0$. Wir zeigen, dass unter diesen Umständen die folgende Ungleichung besteht:

$$\operatorname{vol}(\gamma^r) \leq 2\pi l(\gamma) \frac{\sinh \kappa r}{\kappa} + 2\pi \int_0^r \frac{\sinh \kappa \rho}{\kappa} \, d\rho. \tag{2.3}$$

Um dies einzusehen, wählen wir eine natürliche Zahl n so, dass $l/n < \varepsilon/2$ und so, dass $|\kappa|(r + 2l/n) < \pi/2$, falls κ imaginär. Wir betrachten die Punkte

$$p_i = \gamma(il/n), \qquad i = 0, \ldots, n$$

mit den Kreisbereichen

$$B_i = \{q \in M \mid \operatorname{dist}(p_i, q) \leq r + l/n\}.$$

Wegen $K \geq -\kappa^2$ liefert der Vergleichssatz von Rauch

$$\operatorname{vol}(B_0) \leq 2\pi \int_0^{r+l/n} \frac{\sinh \kappa \rho}{\kappa} \, d\rho. \tag{2.4}$$

Weiter ist wegen $\operatorname{dist}(p_i, p_{i+1}) \leq l/n$

$$\gamma^r \subseteq B_o \cup \cdots \cup B_{n-1}. \tag{2.5}$$

Nun sei G_i die sternförmige Umgebung des Nullpunktes im Tangentialraum M_{p_i}, welche durch die Exponentialabbildung exp (eingeschränkt auf M_{p_i}) diffeomorph auf das Innere $\exp(G_i)$ des *Schnittortes* $C(p_i)$ abgebildet wird. Es gibt einen Masstensor g_i auf G_i, für den die Abbildung $\exp \mid G_i$ zu einer Isometrie wird. Wir

definieren für $i=0, \ldots, n-1$

$$V_i = \{A \in M_{p_i} \mid r + l/n \leq \|A\| \leq r + 2l/n\} \cap G_i$$

und

$$K_i = C(p_i) \cup \exp(V_i).$$

Mit dem Vergleichssatz von Rauch erhalten wir, da der Schnittort $C(p_i) = M - \exp(G_i)$ eine Nullmenge ist,

$$\operatorname{vol}(K_i) = \operatorname{vol}(V_i) \leq 2\pi \int_{r+l/n}^{r+2l/n} \frac{\sinh \kappa\rho}{\kappa}\, d\rho < 2\pi \frac{l}{n} \frac{\sinh \kappa\left(r + \frac{2l}{n}\right)}{\kappa}. \tag{2.6}$$

Dabei bezieht sich vol (V_i) auf die Metrik g_i. Wenn $q \in B_{i+1} - (B_i \cup C(p_i))$, so ist $q = \exp(A)$ mit $A \in G_i$ und $r + l/n \leq \operatorname{dist}(p_i, q) = \|A\| \leq r + 2l/n$, also ist $q \in \exp(V_i)$. Das heisst, es gilt

$$B_{i+1} \subseteq B_i \cup K_i. \tag{2.7}$$

Aus (2.7) und (2.5) folgt

$$\gamma^r \subseteq B_0 \cup K_0 \cup \cdots \cup K_{n-1}.$$

Mit $n \to \infty$ folgt jetzt die Ungleichung (2.3) aus (2.4) und (2.6).

In einem zweiten Schritt zeigen wir, dass man in vielen Fällen den zweiten Summanden in (2.3) weglassen kann: Es sei jetzt M eine kompakte Fläche mit negativer Charakteristik χ. Darauf sei $\gamma : [0, l] \to M$ mit $\|\dot{\gamma}\| = 1$ und $\gamma(0) = \gamma(l)$ ein nicht nullhomotoper geschlossener Weg der Länge l. Die Ungleichung $K \geq -\kappa^2$ soll erfüllt sein auf $\gamma^{r+\varepsilon}$ für ein $\varepsilon > 0$, und wie oben soll $|\kappa| r < \pi/2$ gelten, falls κ imaginär ist. In diesem Falle gilt

$$\operatorname{vol}(\gamma^r) \leq 2\pi l \frac{\sinh \kappa r}{\kappa}. \tag{2.8}$$

Beweis. Es genügt, die Behauptung für orientierbare Flächen zu beweisen: Wenn M nicht orientierbar ist, so betrachte man die zweiblättrige Orientierungsüberlagerung M^* von M mit längentreuer Ueberlagerungsabbildung φ. Wenn γ

ein zweiufriger Weg ist, so gibt es in M^* einen geschlossenen Ueberlagerungsweg γ^* der Länge l mit der Eigenschaft, dass $\varphi \circ \gamma^* = \gamma$. Der Ueberlagerungsweg γ^* erfüllt auf M^* die Voraussetzungen für (2.8), und man erhält die Behauptung für γ aus derjenigen für γ^* wegen $\gamma^r \subseteq \varphi(\gamma^{*r})$. Wenn γ einufrig ist, so gibt es einen Ueberlagerungsweg γ^* der Länge $2l$ und eine Deckisometrie T mit $T(\gamma^*(t)) = \gamma^*(t+l)$. Für diese gilt $T(\gamma^{*r}) = \gamma^{*r}$, also ist vol $(\gamma^{*r}) = 2$ vol (γ^r), und wieder lässt sich die Behauptung von γ^* auf γ übertragen. Wir können jetzt voraussetzen, dass M *orientierbar* ist. Das heisst, M ist eine kompakte Fläche vom Geschlecht $g \geqslant 2$.

Es gibt nun eine differenzierbare Abbildung $\Pi : \mathbf{R}^2 \to M$ und einen differenzierbaren Weg $c : (-\infty, +\infty) \to \mathbf{R}^2$ mit den folgenden vier Eigenschaften:

Π ist Ueberlagerungsabbildung. (2.9)

Die Abbildung $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ mit $T(x, y) = (x+1, y)$ ist eine Decktransformation bezüglich Π. (2.10)

c ist ein Ueberlagerungsweg von $\gamma : \Pi \circ c = \gamma$ auf dem Intervall $[0, 1]$. (2.11)

Es gilt $T(c(t)) = c(t+1)$ für alle $t \in (-\infty, +\infty)$. (2.12)

Dies kann man folgendermassen einsehen: Wie man von der Theorie der Riemannschen Flächen vom Geschlecht $g \geqslant 2$ her weiss, ist M konform aequivalent zu einer Fläche der konstanten Krümmung -1, dh. wenn g der Masstensor von M ist: Es gibt eine auf M differenzierbare Funktion f, sodass der abgeänderte Masstensor $g' := fg$ die konstante Krümmung -1 besitzt. Bezüglich g' existiert nach Preissmann [11] p. 181 genau eine zu γ frei homotope geschlossene Geodätische $\sigma : [0, 1] \to M$. Ist $\Psi : H \to M$ bezüglich g' längentreue Ueberlagerrungsabbildung der hyperbolischen Ebene H auf M, so gibt es eine (orientierungserhaltende) Decktransformation $T' : H \to H$ bezüglich Ψ und eine gegenüber T' invariante Geodätische $\tilde{\sigma}$ in H mit $\Psi \circ \tilde{\sigma} = \sigma$ und $T'(\tilde{\sigma}(t)) = \tilde{\sigma}(t+1)$. Indem wir nötigenfalls die Metrik g' mit einem geeigneten konstanten Faktor multiplizieren, erreichen wir, dass $\|\dot{\tilde{\sigma}}\| = 1$. Die Homotopie $\gamma \sim \sigma$ lässt sich zu einer mit T' vertauschbaren Homotopie $\tilde{\gamma} \sim \tilde{\sigma}$ auf H heben mit einem geeigneten Ueberlagerungsweg $\tilde{\gamma}$ von γ. Aus $T'(\tilde{\sigma}(t)) = \tilde{\sigma}(t+1)$ folgt

$$T'(\tilde{\gamma}(t)) = \tilde{\gamma}(t+1).$$

Führt man auf H *Fermikoordinaten*

$$p \mapsto \Phi(p) = (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

mit $\tilde{\sigma}$ als x-Achse ein, so erfüllen

$$\Pi := \Psi \circ \Phi^{-1}, \qquad c := \Phi \circ \tilde{\gamma} \quad \text{und} \quad T := \Phi \circ T' \circ \Phi^{-1}$$

die Bedingungen (2.9) bis (2.12). O.B.d.A. können wir noch

$$c(0) = (0, y)$$

annehmen.

Auf $\mathbf{R}^2$ führen wir nun einen solchen Masstensor $\tilde{g}$ ein, dass $\Pi : (\mathbf{R}^2, \tilde{g}) \to (M, g)$ längentreu wird. Die Menge

$$c' = \{p \in (\mathbf{R}^2, \tilde{g}) \mid \operatorname{dist}(p, c([0, 1])) \leq r\}$$

ist kompakt, da $(\mathbf{R}^2, \tilde{g})$ vollständig ist. Es gibt deshalb eine natürliche Zahl m, sodass für alle Punkte $p = (x, y) \in c'$ gilt: $-m < x < m$. Wir setzen nun

$$c_n = c \mid [-m, m+n], \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Dann gilt für die Streifen

$$S_k = \{(x, y) \mid k \leq x < k+1\}$$

wegen (2.10) und (2.12):

$$c^r \cap S_k = c_n^r \cap S_k, \qquad 0 \leq k \leq n-1. \tag{2.13}$$

Wegen $T(c^r) = c^r$ gibt es zu jedem Punkt $p \in \gamma^r$ einen Punkt $\tilde{p} \in c^r \cap S_0$ mit $\Pi(\tilde{p}) = p$, also ist $\gamma^r \subseteq \Pi(c^r \cap S_k)$ für jedes k. Zusammen mit (2.13) erhalten wir $\gamma^r \subseteq \Pi(c_n^r \cap S_k)$, bzw.

$$\operatorname{vol}(\gamma^r) \leq \operatorname{vol}(c_n^r \cap S_k), \qquad k = 0, \cdots, n-1.$$

Wegen $S_k \cap S_j = \emptyset$ für $k \neq j$ erhalten wir nun mit (2.3)

$$\operatorname{vol}(\gamma^r) \leq 2\pi l \frac{n+2m}{n} \frac{\sinh \kappa r}{\kappa} + \frac{2\pi}{n} \int_0^r \frac{\sinh \kappa \rho}{\kappa} d\rho$$

für alle n. Mit $n \to \infty$ erhält man hieraus die Behauptung (2.8). Für den dritten und letzten Schritt benötigen wir noch einen Hilfssatz:

LEMMA. *Vorassetzung: $F \subseteq M$ eine abgeschlossene Teilmenge, $\rho > 0$ und*

$$D = \{p \in M \mid \operatorname{dist}(p, F) = \rho\}.$$

Behauptung: $\operatorname{vol}(D) = 0$.

Beweis. D ist abgeschlossen, also messbar. Deshalb ist fast jeder Punkt von D ein sogenannter *Dichtepunkt*, dh. es gilt

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\operatorname{vol}(U_\delta(p) \cap D)}{\operatorname{vol}(U_\delta(p))} = 1$$

für fast alle $p \in D$ [9] p. 184, dabei ist

$$U_\delta(p) = \{q \in M \mid \operatorname{dist}(p\, q) < \delta\}.$$

Es genügt demnach zu zeigen, dass D keine Dichtepunkte besitzt: Zu $p \in D$ existiert $p' \in F$ mit $\operatorname{dist}(p, p') = \rho$. Auf der kürzesten Geodätischen von p nach p' wählt man einen Punkt q so nahe bei p, dass sein Abstand r von p kleiner ist als der Injektivitätsradius von q. Jetzt gilt

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\operatorname{vol}(U_\delta(p) \cap U_r(q))}{\operatorname{vol}(U_\delta(p))} = \frac{1}{2}.$$

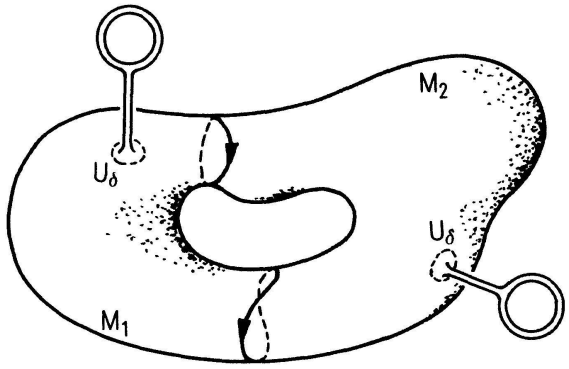
Aus $U_r(q) \subseteq U_\rho(p')$ und aus $U_\rho(p') \cap D = \varnothing$ folgt

$$\limsup_{\delta \to 0} \frac{\operatorname{vol}(U_\delta(p) \cap D)}{\operatorname{vol}(U_\delta(p))} \leq \frac{1}{2},$$

also ist p kein Dichtepunkt, womit das Lemma bewiesen ist.

Der dritte Schritt im Beweis von (2.2) ist nun leicht: Ist die Charakteristik von M negativ und besteht der Schnittzyklus $\mathscr{C} \in \Sigma(M)$ aus lauter nichtnullhomotopen Wegen, so ist die Behauptung wegen (2.8) bereits bewiesen, sogar für beliebiges $r > 0$, denn nach dem Satz von Gauss–Bonnet ist in diesem Fall $\kappa > 0$. Für den

allgemeinen Fall schliessen wir folgendermassen:



Figur 1

Wir wählen in jedem der Gebiete M_1, M_2 je einen Punkt p_i, $i=1,2$, der von $\mathscr{C}=\partial M_i$ maximalen Abstand besitzt. Es ist dann mit (2.1)

$$r_{\mathscr{C}}=\min\{\operatorname{dist}(p_1,\mathscr{C}),\operatorname{dist}(p_2,\mathscr{C})\}. \tag{2.14}$$

Ferner gilt

$$|\kappa|r_{\mathscr{C}}\leqslant\pi/2, \qquad \text{wenn } \kappa \text{ imaginär}, \tag{2.15}$$

denn wenn die Schnittkrümmung K nach unten beschränkt ist durch $|\kappa|^2>0$, so ist nach dem Satz von Myers [7] p. 212

$$|\kappa|\operatorname{dist}(p_1,p_2)\leqslant|\kappa|\,d\leqslant\pi. \tag{2.16}$$

Andererseits ist $\operatorname{dist}(p_1,\mathscr{C})+\operatorname{dist}(p_2,\mathscr{C})\leqslant\operatorname{dist}(p_1\,p_2)$, woraus (2.15) folgt.

Nun sei $0<\varepsilon<r_{\mathscr{C}}$. Es gibt ein $\delta\in(0,\varepsilon)$ mit der Eigenschaft, dass die Kreisumgebungen $U_\delta(p_i)$, $i=1,2$, einfachzusammenhängende Gebiete sind. Wir entfernen diese Umgebungen von M und fügen an deren Stelle mit den Methoden der Differentialtopologie je einen Torus an (siehe Figur 1). M geht dabei über in eine neue Fläche M' mit negativer Charakteristik. $\mathscr{C}$ kann man als Zyklus in M' mit $\mathscr{C}\in\Sigma(M')$ ansehen, und man sieht sofort, dass in M' keine der Wegkomponenten γ_i von $\mathscr{C}$ nullhomotop sein kann. Auf M' gibt es einen Riemannschen Masstensor g', der auf dem Teilbereich $M-(U_\delta(p_1)\cup U_\delta(p_2))\subset M'$ mit g übereinstimmt. Speziell ist

$$g=g' \quad \text{auf } \mathscr{C}_{\mathscr{C}}^{(r-\varepsilon)}. \tag{2.17}$$

Ist nun $r \in (0, r_{\mathscr{C}} - \varepsilon)$ beliebig vorgegeben, so sind wegen (2.15) die Voraussetzungen für (2.8) für jede der Komponenten von $\mathscr{C}$ erfüllt, also folgt

$$\operatorname{vol}(\mathscr{C}^r) \leq 2\pi l(\mathscr{C}) \frac{\sinh \kappa r}{\kappa}, \qquad 0 < r < r_{\mathscr{C}} - \varepsilon,$$

zunächst auf M', dann aber ebenso auf M selber wegen (2.17). Jetzt kann man ε gegen Null gehen lassen und gewinnt damit (2.2) für alle $r < r_{\mathscr{C}}$. Schliesslich ist (2.2) auch noch für $r = r_{\mathscr{C}}$ richtig auf Grund des oben bewiesenen Lemmas, da wegen der Totaladditivität des Lebesguemasses auf M

$$\operatorname{vol}(\mathscr{C}^{r_{\mathscr{C}}}) = \operatorname{vol}(\{p \in M \mid \operatorname{dist}(p, \mathscr{C}) = r_{\mathscr{C}}\}) + \lim_{m \to \infty} \operatorname{vol}(\mathscr{C}^{(r_{\mathscr{C}} - 1/m)}).$$

Damit ist (2.2) vollständig bewiesen. Die Ungleichung (2.2) liefert nun sofort einen *Beweis von* (B):

Ist nämlich $\mathscr{C} \in \Sigma(M)$ mit $M - \mathscr{C} = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \varnothing$, so ist $\min\{\operatorname{vol}(M_1), \operatorname{vol}(M_2)\} \leq \operatorname{vol}(\mathscr{C}^{r_{\mathscr{C}}})$, da $\mathscr{C}^{r_{\mathscr{C}}}$ mindestens eines der beiden Gebiete M_1, M_2 zudeckt. Wegen $r_{\mathscr{C}} \leq d/2$ folgt jetzt aus (2.2)

$$J(\mathscr{C}) \geq \frac{l(\mathscr{C})}{\operatorname{vol}(\mathscr{C}^{r_{\mathscr{C}}})} \geq \frac{\kappa}{2\pi \sinh \kappa r_{\mathscr{C}}} \geq \frac{\kappa}{2\pi \sinh \frac{\kappa d}{2}}. \tag{2.18}$$

Mit (2.18) und mit (A) ist (B) bewiesen, q.e.d.

Wir bemerken noch, dass man im Falle, wo M nichtpositive Krümmung besitzt, den Faktor π in (2.8) und a fortiori ebenso im Nenner von (B) weglassen kann (siehe [3] pp. 27, 28). Es ist anzunehmen, dass dies sogar allgemein gilt, doch liess sich bis jetzt kein Beweis dafür finden.

3. Abschätzung von λ_1 durch h nach oben

Wir wählen $\mathscr{C} \in \Sigma(M)$ und eine Zahl $\tau \in (0, 1)$ fest aus und definieren

$$r = \frac{1}{\kappa} \operatorname{arsinh} \frac{\kappa \tau}{2\pi J(\mathscr{C})},$$

wobei für $\kappa = 0$ und für $\kappa = \sqrt{-1} \cdot |\kappa|$ wieder die unter (D) getroffene Konvention gilt. Für den Fall, dass $\kappa = \sqrt{-1} \cdot |\kappa|$, beachte man, dass nach (2.16) und (2.18)

$J(\mathscr{C})$ nicht kleiner als $|\kappa|/2\pi$ sein kann, sodass auch in diesem Fall r wohldefiniert ist.

Für die beiden Gebiete M_i, in die $M-\mathscr{C}$ zerfällt, setzen wir $r_i = \max\{\operatorname{dist}(p, \mathscr{C}) \mid p \in M_i\}$ und betrachten wie in (2.1) den kleineren der beiden Abstände: $r_{\mathscr{C}} = \min\{r_1, r_2\}$. Nach (2.2) ist, wenn wir $\operatorname{vol}(M_1) \leq \operatorname{vol}(M_2)$ annehmen,

$$\operatorname{vol}(M_1) \leq \operatorname{vol}(\mathscr{C}^{r_{\mathscr{C}}}) \leq 2\pi l(\mathscr{C}) \frac{\sinh \kappa r_{\mathscr{C}}}{\kappa},$$

also gilt

$$r < r_{\mathscr{C}}.$$

Daraus folgt wieder mit (2.2) wegen $\tau < 1$

$$\operatorname{vol}(\mathscr{C}^r) \leq 2\pi l(\mathscr{C}) \frac{\sinh \kappa r}{\kappa} = \frac{\tau l(\mathscr{C})}{J(\mathscr{C})} < \operatorname{vol}(M_1). \tag{3.1}$$

Wir definieren für $i = 1, 2$:

$$f_i(q) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad q \notin M_i, \\ \operatorname{dist}(q, \mathscr{C}) & \text{für} \quad q \in M_i \quad \text{und} \quad \operatorname{dist}(q, \mathscr{C}) \leq r, \\ r & \text{für} \quad q \in M_i \quad \text{und} \quad \operatorname{dist}(q, \mathscr{C}) \geq r. \end{cases}$$

Da die Funktionen f_i einer Lipschitzbedingung genügen, ist die Funktion $\|\operatorname{grad} f_i\|$ fast überall definiert und stellt eine auf M quadratisch integrierbare Funktion dar. Dabei ist $\|\operatorname{grad} f_i\| \leq 1$, und auf $M - \mathscr{C}^r$ gilt sogar $\|\operatorname{grad} f_i\| = 0$. Deshalb ist (siehe (3.1))

$$\frac{\int_M \|\operatorname{grad} f_i\|^2 \, dM}{\int_M f_i^2 \, dM} \leq \frac{\operatorname{vol}(\mathscr{C}^r)}{r^2(\operatorname{vol}(M_1) - \operatorname{vol}(\mathscr{C}^r))} \leq \frac{\tau}{1-\tau} \left(\frac{\kappa}{\operatorname{arsinh} \dfrac{\kappa\tau}{2\pi J(\mathscr{C})}} \right)^2. \tag{3.2}$$

Es gibt eine Linearkombination $F = f_1 + \alpha f_2$, $\alpha \in \mathbf{R}$, mit $\int_M F \, dM = 0$. Wegen

$F^2 = f_1^2 + \alpha^2 f_2^2$ und wegen

$$\|\text{grad } F\|^2 = \|\text{grad } f_1\|^2 + \alpha^2 \|\text{grad } f_2\|^2$$

bleibt (3.2) richtig, wenn man dort f_i durch F ersetzt. Da F einer Lipschitzbedingung genügt, ist F für das Rayleighsche Extremalprinzip zugelassen [2] p. 186, also gilt

$$\lambda_1 \leqslant \frac{\tau}{1-\tau}\left(\frac{\kappa}{\operatorname{arsinh}\dfrac{\kappa\tau}{2\pi J(\mathscr{C})}}\right)^2 \tag{3.3}$$

für jeden Schnittzyklus $\mathscr{C} \in \Sigma(M)$ und für alle $\tau \in (0, 1)$. Geht man nun zu $h = \inf_{\mathscr{C}} J(\mathscr{C})$ über und setzt speziell $\tau = \frac{1}{2}$, so erhält man daraus die Ungleichung (D).

Für den Fall, dass $\kappa > 0$, lässt sich (3, 3) für kleine Werte von h besser auswerten. Dazu seien μ und β definiert durch $\mu \operatorname{arsinh}^{-2} \mu = \min_{t>0} t \cdot \operatorname{arsinh}^{-2} t := \beta$. Die numerischen Werte sind

$$\mu = 3.3198\ldots, \qquad \beta = 0.9052\ldots.$$

Wir setzen $\tau = \kappa^{-1} 2\pi\mu h$, wobei wir uns auf den Fall $h < \kappa/2\pi\mu$ einschränken. Aus (3.3) erhalten wir dann die folgende Abschätzung von λ_1 nach oben: *Für jede kompakte Fläche mit $K \geqslant -\kappa^2$ $(\kappa > 0)$ und mit $h < \kappa/2\pi\mu$ gilt*

$$\lambda_1 \leqslant \kappa^2 \frac{2\pi\beta h}{\kappa - 2\pi\mu h} \tag{3.4}$$

4. Ein Gegenbeispiel

In diesem Abschnitt konstruieren wir auf dem Torus eine Schar von Riemannschen Metriken, um zu zeigen, dass die isoperimetrische Konstante h beliebig nah bei Null sein kann, ohne dass dabei λ_1 klein sein muss. Auf Grund von (D) muss dabei der Betrag der Krümmung grosse Werte annehmen. Die Metriken normieren wir so, dass der Inhalt der Flächen gleich eins wird. Den Torus stellen wir folgendermassen dar:

Es sei $\Gamma : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ die Gruppe der Translationen $(x, y) \to (x+m, y+n)$, $m\, n \in \mathbf{Z}$, und T sei der Torus $T = \mathbf{R}^2/\Gamma$, versehen mit der *Standardmetrik* $dx^2 + dy^2$. In

natürlicher Weise identifizieren wir T mit dem Fundamentalbereich

$$\{p=(x, y)\in \mathbf{R}^2 \mid 0\leqslant x<1, \quad 0\leqslant y<1\}.$$

Ist χ eine positive periodische Funktion, $\chi\in C^\infty(\mathbf{R})$ mit der Periode 1, so ist durch

$$ds^2=\chi^2(x)[dx^2+dy^2] \tag{4.1}$$

eine zusätzliche Riemannsche Metrik auf T definiert. Wir wählen χ geeignet. Zu diesem Zwecke betrachten wir für jeden Parameterwert ε mit $0<\varepsilon<\frac{1}{4}$ eine periodische Funktion $\varphi\in C^\infty(\mathbf{R})$, die auf den Intervallen $[n/2+\varepsilon, (n+1)/2-\varepsilon]$, $n\in\mathbf{Z}$, den konstanten Wert 1 annimmt, während φ auf den Intervallen $[n/2-\varepsilon, n/2+\varepsilon]$ zuerst von 1 monoton auf $\varphi(n/2)=\varepsilon$ absinken, und anschliessend wieder so zunehmen soll, dass $\varphi(n/2-x)=\varphi(n/2+x)$ für alle x. Jetzt definieren wir

$$\chi(x)=\alpha\varphi(x) \quad \text{mit} \quad \alpha=\alpha(\varepsilon)=\left(\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx\right)^{-1/2}. \tag{4.2}$$

Es ist

$$\int_0^1 \chi^2(x)\,dx=1 \quad \text{und} \quad \chi(0)=\chi(\tfrac{1}{2})=\alpha\varepsilon. \tag{4.3}$$

Vermöge (4.1) und (4.2) ist auf T eine von ε abhängige Riemannsche metrik definiert. T versehen mit dieser Metrik bezeichnen wir mit T_ε. Volumenelement und Norm des Gradienten lauten auf T_ε.

$$dT_\varepsilon=\chi^2\,dT, \qquad \|\mathrm{grad}_\varepsilon f\|_\varepsilon^2=\frac{1}{\chi^2}\|\mathrm{grad}\, f\|^2, \tag{4.4}$$

wobei

$$dT=dx\,dy, \qquad \|\mathrm{grad}\, f\|^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

die entsprechenden Grössen bezüglich der Standardmetrik auf T bezeichnen.

Es sei nun f mit $\Delta_\varepsilon f=\lambda_{1,\varepsilon}f$ eine Eigenfunktion des Laplace-Operators Δ_ε auf

T_ε zum kleinsten positiven Eigenwert $\lambda_{1,\varepsilon}$ und

$$T_1 = \{p \in T \mid f(p) > 0\}, \qquad T_2 = \{p \in T \mid f(p) < 0\}.$$

Da die Funktion f auf beiden T_i eine Lösung des Randwertproblems $\Delta_\varepsilon f = \lambda f$, $f \mid \partial T_i = 0$ ist, gilt zusammen mit (4.4)

$$\lambda_{1,\varepsilon} = \frac{\int_{T_i} \|\mathrm{grad}_\varepsilon f\|_\varepsilon^2 \, dT_\varepsilon}{\int_{T_i} f^2 \, dT_\varepsilon} \geqslant \frac{\int_{T_i} \|\mathrm{grad}\, f\|^2 \, dT}{\alpha^2 \int_{T_i} f^2 \, dT}, \qquad i = 1, 2. \tag{4.5}$$

Definieren wir deshalb eine Funktion F durch

$$F(p) = \begin{cases} f(p) & \text{für} \quad p \in T_1, \\ \beta f(p) & \text{für} \quad p \in T_2, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei $\beta > 0$ so gewählt ist, dass $\int_T F \, dT = 0$, dann ist F für das Rayleighsche Extremalprinzip auf T zugelassen, und man erhält aus (4.5), wenn λ_1 den ersten Eigenwert des Laplace-Operators bezüglich der Standardmetrik bezeichnet,

$$\lambda_{1,\varepsilon} \geqslant \alpha^{-2} \lambda_1 = 4\pi^2 \alpha^{-2}. \tag{4.6}$$

Andererseits liefert das Rayleighsche Extremalprinzip auf T_ε, angewendet auf die Funktion $g(x, y) := \sin(2\pi x)$ die Ungleichung

$$\lambda_{1,\varepsilon} \leqslant \frac{4\pi^2}{1 - 4\varepsilon}. \tag{4.7}$$

Mit den beiden Wegen

$$t \to \gamma(t) = (0, t) \quad \text{und} \quad t \to \mu(t) = (\tfrac{1}{2}, t), \qquad t \in [0, 1],$$

ist $\mathscr{C} := \gamma + \mu \in \Sigma(T_\varepsilon)$ mit $J(\mathscr{C}) = 4\alpha\varepsilon$. Wegen $\lim_{\varepsilon \to 0} \alpha(\varepsilon) = 1$ gilt deshalb zusam-

men mit (4.3), (4.6) und (4.7), wenn $\varepsilon \to 0$:

$$\mathrm{vol}\,(T_\varepsilon) = 1, \qquad \lambda_{1,\varepsilon} \to 4\pi^2, \qquad h(T_\varepsilon) \to 0.$$

Das sind genau die in (E) gewünschten Eigenschaften.

5. Flächen mit kleinen Eigenwerten

Wir stellen in diesem Abschnitt eine Schar von Riemannschen Flächen her, deren Durchmesser d gegen Unendlich konvergiert, und deren Eigenwerte λ_1 mit der Ordnung $\exp(-d/2)$ klein werden. Dazu verwenden wir die in [4] beschriebene Methode der Y-Stücke.

Wir konstruieren zuerst in der hyperbolischen Ebene ein rechtwinkliges geodätisches Sechseck D, das aus sechs Spitzecken (das sind geodätische Vierecke mit drei rechten und einem spitzen Winkel) zusammengesetzt ist, wie in Figur 2 dargestellt. Die Bezeichnungen seien durch die Figur festgelegt. Dabei soll gelten:

$$\varphi = \pi/6, \qquad s = s' \quad \text{und} \quad r = r'.$$

Nach den Formeln der hyperbolischen Trigonometrie (z.B. Perron [10] p. 76–79) ist

$$\cos\varphi = \sinh r' \cdot \sinh r, \qquad \sinh s = \cosh s' \cdot \sinh r',$$

also

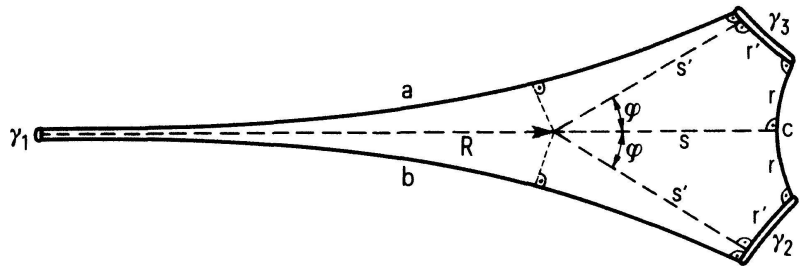
$$s = \operatorname{artanh}\sqrt{\cos\frac{\pi}{6}} = 1,66\ldots, \qquad r = \operatorname{arsinh}\sqrt{\cos\frac{\pi}{6}} = 0,83\ldots. \tag{5.1}$$

R ist ein Parameter, den wir nachher nach Unendlich laufen lassen werden.

Es sei nun D' ein zu D kongruentes Sechseck mit den entsprechenden Seiten a', b', c' (siehe Figur 2). Indem wir uns D und D' übereinander liegend vorstellen und die so zur Deckung gebrachten Seiten a mit a', b mit b', c mit c' identifizieren, nicht aber die verbleibenden drei Seiten, erhalten wir eine berandete Fläche Y der Signatur (0, 3). Die Fläche Y trägt in natürlicher Weise eine Metrik der konstanten Krümmung -1, und die drei Randkomponenten γ_1, γ_2, γ_3

sind differenzierbar geschlossene Geodätische. Dabei gilt

$$l(\gamma_2)=l(\gamma_3)>2r'; \qquad l(\gamma_1)\to 0 \qquad (R\to\infty).$$



Figur 2

Von Y stellen wir noch ein zweites Exemplar Y^* her mit den Randgeodätischen γ_1^*, γ_2^* γ_3^* und verkleben γ_2 mit γ_3, γ_2^* mit γ_3^* und schliesslich γ_1 mit γ_1^*. Auf diese Weise erhalten wir eine kompakte Fläche F vom Geschlecht zwei mit der konstanten Krümmung -1. Für den Durchmesser d von F berechnet man bei $R\to\infty$ bis auf Glieder höherer Ordnung

$$d=2(R+s+\log\cosh r)<2R+3{,}95.$$

Um λ_1 auf F nach oben abzuschätzen, betrachten wir die Hilfsfunktion

$$\psi(p)=\begin{cases}\sin\left\{\frac{\pi}{6}\operatorname{dist}(p,\gamma_1)\right\}, & \text{wenn } \operatorname{dist}(p,\gamma_1)\leq 3\\ 1, & \text{wenn } \operatorname{dist}(p,\gamma_1)\geq 3\end{cases}$$

und setzen

$$f(p)=\begin{cases}\psi(p), & \text{wenn } p\in Y\\ -\psi(p), & \text{wenn } p\in Y^*,\end{cases}$$

dann erfüllt f die Voraussetzungen für das Rayleighsche Extremalprinzip, und man erhält durch elementare Integration zusammen mit (5.1):

$$\lambda_1(F)\leq 0{,}393e^{-d/2}. \tag{5.2}$$

Es wäre interessant zu wissen, ob man zumindest auf Riemannschen Flächen mit

anderen Methoden eine untere Schranke für λ_1 finden kann, die von der Ordnung $\exp(-d/2)$ ist.

Schliesslich wollen wir noch bemerken, dass aus $d \to \infty$ für eine Schar von Riemannschen Flächen nicht immer $\lambda_1 \to 0$ folgt. Verklebt man nämlich die Flächen Y und Y^* anders herum, indem man λ_1 mit λ_1^* nun aber λ_2 mit λ_2^* und λ_3 mit λ_3^* identifiziert, so entsteht eine Fläche F' deren kürzester nullhomologer nicht trivialer Zyklus C aus geschlossenen Geodätischen gerade durch $C = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ gegeben ist, also die Länge $l(C) > 4r$ besitzt. Daraus folgert man unschwer, dass $h(F') > 2r/\pi > \frac{1}{2}$ (nach Gauss–Bonnet ist vol $Y = 2\pi$). Für diese Flächen gilt nun ebenfals $d \to \infty$, aber auf Grund der Ungleichung von Cheeger stets $\lambda_1 > \frac{1}{16}$.

LITERATUR

[1] AUBIN, TH., *Fonction de Green et valeurs propres du laplacien*, J. Math. pures et appl. *53* (1974), 347–371.

[2] BERGER, M., GAUDUCHON, P., und MAZET, E., *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lect. Notes Math. *194*, Berlin, Heidelberg, New York 1971.

[3] BUSER, P., *Untersuchungen über den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Flächen*, Dissertation, Basel 1976.

[4] ——, *Riemannsche Flächen mit Eigenwerten in* $(0, \frac{1}{4})$, Comment. Math. Helv. *52* (1977), 25–34.

[5] ——, *Eine untere Schranke für* λ_1 *auf Mannigfaltigkeiten mit fast negativer Krümmung*, Archiv Math. (Basel) *30* (1978), 528–531.

[6] CHEEGER, J., *A lower bound for the smallest eigenvalue of the laplacian*, Problems in Analysis, Symposium in Honor of Bochner, Princeton University, 1969.

[7] GROMOLL, D., KLINGENBERG, W., und MEYER, W., *Riemannsche Geometrie im Grossen*, Lect. Notes Math. *55*, Berlin, Heidelberg, New York 1968.

[8] HUBER, H., *Ueber den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Mannigfaltigkeiten konstanter negativer Krümmung*, Arch. Math. (Basel) *26* (1975), 178–182.

[9] MUNROE, M. E., *Measure and integration*, Reading Massachussets 1968.

[10] PERRON, O., *Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene*, Stuttgart 1962.

[11] PREISSMANN, A., *Quelques propriétés globales des espaces de Riemann*, Comment. Math. Helv. *15* (1942), 175–216.

[12] YAU, S. T., *Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold*, Annales Sc. École Nor, Sup. IV. sér. 8(1975), 487–507.

Sonderforschungsbereich 40 "*Theoretische Mathematik*" *Mathematisches Institut der Universität, Beringstrasse* 4, *D*-5300 *Bonn* 1.

Eingegangen den 10. August 1977