Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 54 (1979)

Artikel: Dichtepunkte im Spektrum Riemannscher Flächen.
Autor: Buser, Peter
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41588

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici **54** (1979) 431–439 Birkhäuser Verlag, Basel

Dichtepunkte im Spektrum Riemannscher Flächen

PETER BUSER

Wir betrachten eine Folge $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ von kompakten Riemannschen Flächen mit festem Geschlecht $g(F_n)=g\geqslant 2$. Die Flächen versehen wir mit der konform verträglichen Poincaré-Metrik der konstanten Krümmung -1. Im Spektrum des Laplace-Beltrami-Operators Δ_{Fn} dieser Flächen spielt die Zahl $\frac{1}{4}$ eine spezielle Rolle. Bedeutet nämlich $A_{Fn}[x, y]$ für $0\leqslant x<y$ die Anzahl der Eigenwerte von Δ_{Fn} im Intervall $[x, y]$, gezählt mit ihren Vielfachheiten, so ist mit $0\leqslant x<\frac{1}{4}$ für alle n [1]

$$A_{F_n}[x, \tfrac{1}{4}]\leqslant 4g-2 \tag{1}$$

während $A_{Fn}[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}+\varepsilon]$ mit $n\to\infty$ für jedes $\varepsilon>0$ beliebig gross wird, sobald die *Länge* $\mu(F_n)$ *der kürzesten geschlossenen Geodätischen von* F_n gegen Null konvergiert. Man kann sich nun fragen, was rechts von der Stelle $\frac{1}{4}$ passiert. Nach dem asymptotischen Gesetz von Weyl gilt für festes n

$$A_{Fn}[0, y]\sim y(g-1), \qquad \text{wenn } y\to\infty.$$

Man könnte deshalb vermuten, dass man eine Ungleichung der Form (1) auch für weitere Intervalle rechts von $\frac{1}{4}$ beweisen kann, und dass der beschriebene Verdichtungseffekt nur bei $x=\frac{1}{4}$ auftritt. Ueberraschenderweise ist jedoch das Gegenteil der Fall: Wenn sich das Spektrum der Schar $\{F_n\}$ bei $x=\frac{1}{4}$ in der genannten Weise verdichtet, dann auch an jeder weiteren Stelle rechts von $\frac{1}{4}$, und das Mass der Verdichtung lässt sich sogar explizit angeben. Um diese Behauptung zu präzisieren, führen wir folgende Bezeichnung ein:

DEFINITION. Eine Zahl $x\geqslant 0$ heisst *Dichtepunkt* für die Spektren der Folge $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, wenn $\lim_{n\to\infty} A_{Fn}[x-\varepsilon, x+\varepsilon]=+\infty$ für alle $\varepsilon>0$. Sind x, y zwei Dichtepunkte, so heisst

$$\rho(y; x):=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{A_{Fn}[y-\varepsilon, y+\varepsilon]}{A_{Fn}[x-\varepsilon, x+\varepsilon]}$$

die *relative Dichte* von y bezüglich x, sofern der Grenzwert existiert, andernfalls ist die relative Dichte nicht erklärt.

Nach (1) kann $x<\frac{1}{4}$ nie Dichtepunkt sein, aber $x=\frac{1}{4}$ *ist stets einer, wenn* $\mu(F_n)\to 0$. Für *Beispiele* hierzu siehe [1]. Wir zeigen nun umgekehrt:

SATZ. *Wenn die Folge* $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ *einen Dichtepunkt besitzt, so gilt* (*mit* $n\to\infty$)
(a) $\mu(F_n)\to 0$.
(b) *Jedes* $x\geqslant\frac{1}{4}$ *ist Dichtepunkt der Folge.*
(c) *Für* $\frac{1}{4}\leqslant x<y$ *ist die relative Dichte erklärt und beträgt*

$$\rho(y;x)=\left(\frac{4x-1}{4y-1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis von (a). Es sei $x>0$ und $\{\mathcal{F}_k\}_{k=1}^{\infty}=\{F_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ eine Teilfolge mit $\mu(\mathcal{F}_k)\geqslant\mu_0$ für ein $\mu_0>0$. Wir zeigen, dass x nicht Dichtepunkt ist.

Einer Idee von Fejes-Tóth [4] folgend legen wir auf $\mathcal{F}=\mathcal{F}_k$ (k festgehalten) eine endliche Menge $\mathcal{P}$ von Punkten im gegenseitigen Abstand grösser oder gleich

$$r=\tfrac{1}{4}\min\{\mu_0,(x+1)^{-1/2}\},$$

und zwar so, dass $(q,\mathcal{P})<r$ für alle $q\in\mathcal{F}$ ist. Man nennt $\mathcal{P}$ *gesättigt bezüglich* r. Es sei $\mathcal{B}$ die Menge aller geodätischen Kreise auf $\mathcal{F}$, die in ihrem Innern keine, aber auf dem Rand mindestens drei Punkte von $\mathcal{P}$ enthalten. Für den Radius R eines solchen Kreises gilt offenbar

$$\tfrac{1}{2}r<R<r<\tfrac{1}{4}. \tag{2}$$

Die Punkte von $\mathcal{P}$, die auf ein und demselben kreis $K\in\mathcal{B}$ liegen, sind Eckpunkte eines konvexen geodätischen Polygons mit Umkreis K. Da für je zwei solche Polygone *beide* Umkreise im Innern frei sind von Eckpunkten, und weil nach (2) die Umkreisradien kleiner sind als der halbe Injektivitätsradius von $\mathfrak{F}$, so ist der Durchschnitt zweier Polygone immer entweder leer, eine Ecke oder eine gemeinsame Seite. Weiter überdecken die Polygone ganz $\mathcal{F}$. Zerlegt man deshalb jedes Polygon durch Diagonalen in geodätische Dreiecke, so ist dadurch auf $\mathcal{F}$ eine Triangulierung definiert, bei der jedes Dreieck eine Seitenlänge grösser oder gleich r und nach (2) einen Umkreisradius kleiner als r besitzt. Der Flächeninhalt dieser Dreiecke ist deshalb stets grösser oder gleich dem Flächeninhalt des gleichseiten Dreiecks mit Seitenlänge r in der hyperbolischen Ebene, also wegen $r<\frac{1}{4}$ stets grösser als $\frac{1}{3}r^2$. Der Inhalt von $\mathcal{F}$ ist nach Gauss-Bonnet gleich $4\pi(g-1)$. Folglich besteht die Triangulation aus höchstens $12\pi(g-1)/r^2$ Dreiekken. Nun wurde in [1] gezeigt, dass *der kleinste positive Eigenert* $\eta(D)$ *des*

Neumannproblems

$$\Delta_{\mathcal{F}} u = \eta \cdot u \text{ auf } D, \qquad * du \mid \partial D = 0 \tag{3}$$

auf jedem solchen Dreieck D grösser ist als $\frac{1}{4}\operatorname{ctgh}^2 r > x+1$. Also folgt aus dem zweiten Minimaxprinzip von Courant, dass $A_{\mathcal{F}k}[0, x+1] \leqslant 12\pi(g-1)/r^2$ für alle k. Das bedeutet aber gerade, dass x kein Dichtepunkt ist, was zu zeigen war.

Für den Beweis von (b) und (c) ist es nötig zu wissen, wie sich der kleinste positive Eigenwert von (3) verändert, wenn man das Gebiet leicht verzerrt. Es seien dazu für den Moment etwas allgemeiner D, $\tilde{D}$ zwei beliebige berandete Flächen, $\eta(D)$, $\eta(\tilde{D})$ die kleinsten positiven Eigenwerte von (3) und $\Phi : D \to \tilde{D}$ ein in beiden Richtungen stückweise differenzierbarer Homöomorphismus. Wenn für eine Zahl $\sigma \geqslant 1$ und für alle $p, q \in D$ die Ungleichung

$$\tfrac{1}{\sigma}\operatorname{dist}(p, q) \leqslant \operatorname{dist}(\Phi p, \Phi q) \leqslant \sigma \operatorname{dist}(p, q)$$

erfüllt ist, so heisst Φ eine *σ-quasi-Isometrie*, und es gilt

LEMMA 1. $\sigma^{-4}\eta(D) \leqslant \eta(\tilde{D}) \leqslant \sigma^4 \eta(D)$.

Beweis. Da mit Φ auch Φ^{-1} eine σ-quasi-Isometrie ist, genügt es, die Ungleichung rechts zu beweisen. Wir betrachten dazu eine Eigenfunktion u von (3) zum Eigenwert $\eta = \eta(D)$. Wegen $\int_D u = \eta^{-1} \int_D \Delta u = 0$ sind die offenen Teilmengen

$$D_+ = \{p \in D \mid u(p) > 0\}, \qquad D_- = \{p \in D \mid u(p) < 0\}$$

nicht leer, und u ist auf beiden Teilmengen eine Eigenfunktion zur gemischten Randbedingung $u * du \mid \partial D \pm = 0$. Es folgt aus der Greenschen Formel

$$\int_{D\pm} \|\operatorname{grad} u\|^2 = \eta \int_{D\pm} u^2. \tag{4}$$

Auf $\tilde{D}\pm := \Phi(D\pm)$ erfüllt die Hilfsfunktion $v := u \circ \Phi^{-1}$ die Ungleichungen

$$\int_{\tilde{D}\pm} \|\operatorname{grad} v\|^2 \leqslant \sigma^2 \int_{D\pm} \|\operatorname{grad} u\|^2, \qquad \int_{D\pm} u^2 \leqslant \sigma^2 \int_{\tilde{D}\pm} v^2. \tag{5}$$

Es gibt eine solche Zahl $\alpha > 0$, dass die Funktion $f_\alpha(p) := v(p)$ für $p \in \overline{\tilde{D}_+}$ $f_\alpha(p) := \alpha v(p)$ für $p \in \tilde{D}_-$ die Bedingung $\int_{\tilde{D}} f_\alpha = 0$ erfüllt. Für f_α gilt dann das

Rayleighsche Extremalprinzip, also wegen (4) und (5)

$$\eta(\tilde{D}) \leqq \frac{\int_{\tilde{D}} \|\operatorname{grad} f_\alpha\|^2}{\int_{\tilde{D}} f_\alpha^2} \leqq \sigma^4 \frac{\int_D \|\operatorname{grad} u\|^2}{\int_D u^2} = \sigma^4 \eta(D), \quad \text{q.e.d.}$$

Beweis von (b) *und* (c). Wir betrachten zwei feste Zahlen a, b mit $\frac{1}{4} < a < b$ und setzen zur Abkürzung für $0 < t < 1$:

$$\mu_0 = \frac{1}{6(b+1)^{\frac{1}{2}}}, \qquad x_0 = x_0(t) = \tfrac{1}{2} \log 6/t, \qquad \omega_t = \frac{x_0(t)+120}{\mu_0^2}(g-1). \tag{6}$$

Wegen (1) reduzieren sich beide Behauptungen unmittelbar auf den folgenden Hilfssatz:

LEMMA 2. *Zu jedem t mit $0 < t < \min\{1, a-\frac{1}{4}\}$ existiert eine Zahlenfolge $\{L_{t,n}\}_{n=1}^{\infty}$ mit $\lim_{n\to\infty} L_{t,n} = +\infty$, sodass für alle $\xi \in [a, b]$ und $n \in \mathbf{N}$ gilt*

$$L_{t,n} \cdot (\xi(1-t) - \tfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}} - \omega_t \leqq A_{Fn}[0, \xi] \leqq \omega_t + L_{t,n}(\xi(1+t) - \tfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis. Es se $F = F_n$, n festgehalten. Das Lemma stützt sich ganz wesentlich auf den folgenden *Satz über Kragen* [2], [6]:

Für jede einfachgeschlossene Geodätische γ auf F mit Länge $l(\gamma)$ ist die Umgebung

$$Z(\gamma) = \{p \in F \mid \operatorname{dist}(p, \gamma) \leqq d_\gamma\}, \qquad d_\gamma = \operatorname{arcsinh}\{\operatorname{cosech} \tfrac{1}{2} l(\gamma)\}$$

topologisch ein Zylinder, der sich durch Fermikoordinaten $p = (x, y)$ mit γ als y-Achse beschreiben lässt in der Form

$$Z(\gamma) = \{(x, y) \mid x \in [-d_\gamma, d_\gamma], \quad y \in \mathbf{R}/[y \mapsto y + 2\pi]\} \tag{7}$$

mit dem Masstensor

$$ds^2 = dx^2 + [l(\gamma) \cdot \cosh x]^2 \, dy^2. \tag{8}$$

Ist $\tilde{\gamma}$ eine weitere einfachgeschlossene Geodätische, die γ nicht schneidet, so sind die Zylinder $Z(\gamma)$ und $Z(\tilde{\gamma})$ disjunkt.

Es seien nun $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$; $k = k(n)$, sämtliche einfachgeschlossenen Geodätischen auf F der Länge $l(\gamma_i) \leqslant 4\mu_0$, $i = 1, \ldots, k$. Wegen $\mu_0 < \frac{1}{6}$ ist $l(\gamma_i) < 2d_{\gamma_i}$, also sind nach dem Satz über Kragen die γ_i paarweise disjunkt, und es ist sogar

$$Z(\gamma_i) \cap Z(\gamma_j) = \varnothing; \qquad i \neq j, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant k. \tag{9}$$

Von der Flächentopologie her ist bekannt, dass dabei

$$k = k(n) \leqslant 3g - 3 \tag{10}$$

sein muss. Wir betrachten nun einen der Zylinder $Z(\gamma_i)$ und setzen zur Abkürzung

$$x_i := \operatorname{arccosh}\left\{\frac{\sinh \frac{1}{2}\mu_0}{\sinh \frac{1}{16} l(\gamma_i)}\right\} > 7\mu_0, \qquad L_i := \max\{x_i - x_0 - \mu_0; 0\},$$

$$L_{t,n} := \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{k(n)} L_i. \tag{11}$$

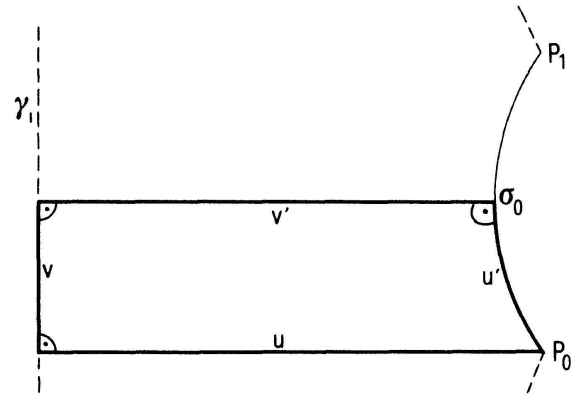
Mit Hilfe der einfachen Beobachtung, dass $x^{-1} \sinh x < 2$ für $|x| < 2$ rechnet man nach, dass

$$x_i + \mu_0 < d_{\gamma_i}, \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{12}$$

Wir können deshalb auf jedem der Zylinder $Z(\gamma_i)$ die folgenden sechzehn Punkte auszeichnen:

$$P_{ij}^{\pm} = \left(\pm x_i, \frac{\pi j}{4}\right), \qquad j = 0, \ldots, 7; \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{13}$$

Hier haben wir die Koordinaten (7) verwendet. Wir verbinden $P_{ij}^{\pm}$ mit $P_{ij+1}^{\pm}$ durch ein geodätisches Segment $\sigma_{ij}^{\pm}$, $j = 0, \ldots, 7 \pmod 8$, den Index i lassen wir aber wenn es geht weg, ebenso schreiben wir P_j statt P_{ij}^{+} usw. Um die Länge und den Abstand dieser Segmente von γ_i auszurechnen, fällen wir z.B. von P_0 aus das Lot u an γ_i (innerhalb von $Z(\gamma_i)$), ebenso vom Mittelpunkt des Segmentes σ_0 aus das gemeinsame Lot v' von σ_0 und γ_i. Die Lote zusammen mit σ_0 und γ_i bilden ein *Spitzeck*, das ist ein geodätisches Viereck mit drei rechten Winkeln, den aufeinanderfolgenden Seiten u, v, v', u' und einem spitzen Winkel bei P_0 zwischen u und



Figur 1

u' (Figur 1). Für solche Spitzecke gilt allgemein [5] p. 79

$$\sinh u' = \cosh u \cdot \sinh v, \qquad \sinh u = \cosh u' \cdot \sinh v'. \tag{14}$$

In unserem Fall ist $u = x_i$, $v = \frac{1}{16} l(\gamma_i)$, $v' = \operatorname{dist}(\sigma_0, \gamma_i)$, $u' = \frac{1}{2} l(\sigma_0)$, also wie beabsichtigt

$$l(\sigma_{ij}^{\pm}) = \mu_0, \qquad j = 0, \ldots, 7; \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{15}$$

Wegen $v' < u$ ist $\max\{1 + u - v'; u/v'\} < \sinh u / \sinh v'$, und es folgt aus der zweiten Gleichung (14), da $\mu_0 < 1/6$:

$$\operatorname{dist}(\sigma_{ij}^{\pm}, \gamma_i) \geqslant \max\left\{\frac{x_i}{\sqrt{2}}, x_i - \frac{1}{8}\mu_0\right\}, \qquad i = 0, \ldots, 7. \tag{16}$$

Die acht Segmente σ_{ij}^{+} bzw. σ_{ij}^{-} definieren je einen zu γ_i homotopen Weg γ_i^{+} bzw. γ_i^{-}. Es sei $W_i^{\pm}$ der durch γ_i und $\gamma_i^{\pm}$ berandete Zylinder und $W_i := W_i^{-} \cup W_i^{+} \subset Z(\gamma_i)$; $i = 1, \ldots, k$. Endlich bezeichnet F' den Abschluss von $F - \bigcup_{i=1}^{k} W_i$. Aus (9) folgt

F ist die bis auf Ränder disjunkte Vereinigung $F = F' \cup W_1 \cup \cdots \cup W_k$. (17)

Weiter wird behauptet

Der Injektivitätsradius ist auf F' überall grösser als $2\mu_0$. (18)

Beweis. Wenn der Injektivitätsradius in einem Punkt $p \in F$ kleiner ist oder gleich $2\mu_0$, so gibt es eine in p gebrochene geschlossene Geodätische σ der Länge $l(\sigma) \leqslant 4\mu_0$, die offenbar zu einem der γ_i frei homotop ist und mit γ_i zusammen

einen Zylinder S berandet. Dieser wird durch das gemeinsame Lot v' von σ nach γ_i und durch das Lot u von p aus an γ_i in zwei kongruente Spitzecke mit den aufeinanderfolgenden Seiten $u = \operatorname{dist}(p, \gamma_i)$, $v = \frac{1}{2} l(\gamma_i)$, $v' = \operatorname{dist}(\sigma, \gamma_i)$, $u' = \frac{1}{2} l(\sigma) \leqslant 2\mu_0$ zerlegt. Aus (14) folgt wegen $\mu_0 < 1/6$, dass $\cosh\{u + \mu_0\} \leqslant \cosh x_i$. Also liegt p im Zylinder W_i, q.e.d.

Es gibt eine Triangulierung von F' in $m \leqslant 12\pi^2 \mu_0^{-2}(g-1)$ geodätische Dreiecke D_ν mit $\eta(D_\nu) > \xi$, $\nu = 1, \ldots, m$. (19)

Beweis. Wegen (9), (11), (12) und (15) liegen keine zwei der Punkte $P_{ij}^{\pm}$ aus (13) näher beieinander als μ_0. Die Punkte (13) lassen sich deshalb zu einem bezüglich μ_0 gesättigten System $\mathcal{P}$ auf F' ergänzen, das wegen (18) auf dieselbe Weise wie im Beweis von (a) die verlangte Triangulation liefert, q.e.d.

Wir zerlegen jetzt die Zylinder W_i ebenfalls in geeigneter Weise. Dazu führen wir folgende Abkürzungen ein (siehe (11)), das Symbol [.] ist die Gaussklammer, $[x] = \max\{z \in \mathbf{Z} \mid z \leqslant x\}$.

$$r = \pi(\xi(1+t) - \tfrac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}, \qquad r' = \pi(\xi(1-t) - \tfrac{1}{4})^{-\frac{1}{2}},$$

$$m_i = \left[\frac{L_i}{r}\right] + 1, \qquad m_i' = \left[\frac{L_i}{r'}\right], \qquad m_0 = \left[\frac{x_0}{\mu_0}\right] + 1.$$

Es gibt eine Zerlegung $W_i = W_{i1} \cup \cdots \cup W_{in_i}$ in $n_i \leqslant 2m_0 + 2m_i$ bis auf Ränder disjunkte Bereiche mit $\eta(W_{i\nu}) \geqslant \xi$, $\nu = 1, \ldots, n_i$. (20)

Beweis. Es sei zuerst $x_i > x_0 + \mu_0$. Mit den Koordinaten (7) definieren wir auf W_i^+ die Bereiche

$$A_\nu = \left\{(x, y) \in W_i^+ \mid \frac{x_0}{m_0}(\nu - 1) \leqslant x \leqslant \frac{x_0}{m_0}\nu\right\}, \qquad \nu = 1, \ldots, m_0;$$

$$B_\nu = \left\{(x, y) \in W_i^+ \mid x_0 + \frac{L_i}{m_i}(\nu - 1) \leqslant x \leqslant x_0 + \frac{L_i}{m_i}\nu\right\}, \qquad \nu = 1, \ldots, m_i;$$

$$C = \{(x, y) \in W_i^+ \mid x \geqslant x_i - \mu_0\}.$$

Nach (8), (16) und wegen $\mu_0 < 1/6$ lässt sich jeder der Bereiche $A_1, \ldots, A_{m_0}$ und C $\sqrt{2}$-quasi-isometrisch auf einen flachen Zylinder $\mathcal{Z} = [0, \alpha] \times \mathbf{R}/[y \mapsto y + \beta]$ versehen mit der Metrik $ds^2 = dx^2 + dy^2$ abbilden mit $\alpha \leqslant \mu_0$, $\beta \leqslant l(\gamma_i) \cdot \cosh x_i < 9\mu_0$. Nun ist bekanntlich $\eta(\mathcal{Z}) = \min\{\pi^2/\alpha^2; 4\pi^2/\beta^2\}$, also ist nach Lemma 1

$$\eta(C) > \xi, \qquad \eta(A_\nu) > \xi, \qquad \nu = 1, \ldots, m_0.$$

Wegen $1<2e^{-x}\cosh x<1+t/6$ für $x\geq x_0=x_0(t)$ (siehe (6)), lässt sich jeder Bereich B_ν $(1+t)^{\frac{1}{4}}$-quasi-isometrisch abbilden auf einen Zylinder

$$B'_\nu=\left[0,\frac{L_i}{m_1}\right]\times\mathbf{R}/[y\mapsto y+2\pi],$$

versehen mit der Metrik

$$ds^2=dx^2+f^2(x)\,dy^2,\qquad f(x)=\frac{l(\gamma_i)}{2\pi}\cosh\left\{x_0+\frac{L_i}{m_i}(\nu-1)\right\}\cdot e^x.$$

Auf B'_ν ist das Eigenwertproblem (3) lösbar, und zwar kann man folgendes zeigen (z.B. [3] Lemmata 7, 8, 9): *Der Ansatz* $u(x,y)=v(x)\cdot w(y)$ *liefert sämtliche Eigenwerte von* (3). *Ist dabei* $w\neq$ const., *so ist der zugehörige Eigenwert* $\geq\min\{f^{-2}(x)\mid x\in[0,L_i/m_i]\}$. *Ist* $w=$ const., *so ist* v *eine Lösung der Schwingungsgleichung* $v''+v'+\eta v=0$ *auf* $[0,L_i/m_i]$ *zur Randbedingung* $v'(0)=v'(L_i/m_i)=0$.

In unserem Fall ist $f(x)<3\mu_0$, also ist $\eta(B'_\nu)=\frac{1}{4}+\pi^2m_i^2L_i^{-2}\geq\xi(1+t)$. Nach Lemma 1 heisst das, es ist

$$\eta(B_\nu)\geq\xi,\qquad \nu=1,\ldots,m_i.$$

Indem wir auf W_i^- analog verfahren, ist die Behauptung im Falle $x_i>x_0+\mu_0$ bewiesen. Für $x_i\leq x_0+\mu_0$ verläuft aber der Beweis genau gleich, nur dass dann die Bereiche B_ν nicht vorkommen.

Für einen Bereich D auf F bezeichnet $\lambda(D)$ den kleinsten positiven Eigenwert des Randwertproblems $\Delta_F u=\lambda\cdot u$ auf D, $u\mid\partial D=0$.

Auf jedem Zylinder $Z(\gamma_i)$ *gibt es bis auf Ränder disjunkte Bereiche* $Z_{i1},\ldots,Z_{im'_i}$ *mit* $\lambda(Z_{i\nu})\leq\xi$, $\nu=1,\ldots,2m'_i$. (21)

Beweis. Wir setzen $Z_{i\nu}=\{(x,y)\in Z(\gamma_i)\mid a_\nu\leq x\leq a_\nu+r'\}$, $a_\nu:=x_0+r'(\nu-1)$, $\nu=1,\ldots,m'_i$. Die Hilfsfunktion $f(x,y)=f(x):=e^{-\frac{1}{2}x}\sin\{\pi(x-a_\nu)/r'\}$ verschwindet auf dem Rand von $Z_{i\nu}$, und es gilt wegen $x\geq x_0$ nach (8)

$$\frac{\int_{Z_{i\nu}}\|\operatorname{grad}f\|^2}{\int_{Z_{i\nu}}f^2}<(1+t)\frac{\int_{a_\nu}^{a_\nu+r'}f'^2(x)e^x\,dx}{\int_{a_\nu}^{a_\nu+r'}f^2(x)e^x\,dx}=(1-t^2)\xi.$$

Folglich ist $\lambda(Z_{i\nu}) < \xi$ nach dem Rayleighschen Extremalprinzip. Indem wir auf der linken Seite von $Z(\gamma_i)$ entsprechend verfahren, ist (21) bewiesen.

Der Beweis von Lemma 2 und damit von (b) und (c) ist nun nicht mehr schwer. Nach dem bereits bewiesenen Teil (a) des Satzes gilt $\mu(F_n) \to 0$, wenn $n \to \infty$, also $L_{t,n} \to \infty$. Die Ungleichung rechts in Lemma 2 folgt mit (10), (17), (19) und (20) aus dem zweiten Minimaxprinzip von Courant, die Ungleichung links mit (10) und (21) aus dem ersten Minimaxprinzip. Damit ist alles bewiesen.

LITERATUR

[1] BUSER, P., *Riemannsche Flächen mit Eigenwerten in* $(0, \frac{1}{4})$, Comment. Math. Helv. *52* (1977), 25–34.
[2] ——, *The collar theorem and examples*, manuscripta math. *25* (1978), 349–357.
[3] ——, *Beispiele für* λ_1 *auf Mannigfaltigkeiten*, erscheint in Math. Z.
[4] FEJES TÓTH, L., *Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene*, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae *4* (1953). 103–110.
[5] PERRON, O., *Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene*, (Stuttgart, Teubner, 1962).
[6] RANDOL, B., *Cylinders in Riemann surfaces*, Comment. Math. Helv. *54* (1979), 1–5.

Sonderforschungsbereich
Theoretische Mathematik
Universität Bonn, Beringstrasse 4
D-53 *Bonn*

Eingegangen den 7. Juli 1978