Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 54 (1979)

Artikel: Finitude du nombre des classes d'isomorphisme des structures isométriques entières.

Autor: Bayer, Eva / Michel, Francoise

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41585

Comment. Math. Helvetici **54** (1979) 378–396 Birkhäuser Verlag, Basel

Finitude du nombre des classes d'isomorphisme des structures isometriques entières[1]

EVA BAYER et FRANÇOISE MICHEL

Introduction

Selon un théorème classique, l'ensemble des classes d'isomorphisme des formes bilinéaires, symétriques, entières, non singulières de rang et de déterminant (non nul) fixés est fini (voir par exemple [M–H], Chapitre 2, Lemme (1,6)).

Dans cet article nous démontrons un théorème de finitude analogue concernant les structures isométriques entières. Ce problème trouve son origine en théorie des noeuds.

DÉFINITION. Une structure isométrique entière est un triplet (V, S, t) où:

1) V est un Z-module libre de rang fini

2) $S: V \times V \to Z$ est une forme bilinéaire ε-symétrique (où $\varepsilon = \pm 1$) non singulière

3) $t: V \to V$ un endomorphisme de V vérifiant $S(tx, ty) = a^2 S(x, y)$ pour tout x et y dans V, a étant un entier strictement positif (indépendant de x et de y). On dira que t est une a-isométrie.

La constante a, qui ne figure pas dans la définition classique d'une structure isométrique, est introduite pour obtenir de meilleures applications en topologie.

Le rang de V, l'entier positif a vérifiant $S(tx, ty) = a^2 S(x, y)$ et le déterminant de S sont des invariants de la classe d'isomorphisme de (V, S, t). Le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de t aussi. Nous obtenons dans cet article un critère de finitude qui dépend des propriétés du polynôme minimal de l'endomorphisme t.

Soit λ un polynôme à coefficients entiers. Fixons $\varepsilon = \pm 1$ et n et D deux entiers strictement positifs.

Notons $SI_\varepsilon(n, \lambda, D)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des structures isométriques (V, S, t) telles que $n = \mathrm{rang}_Z\, V$, $\lambda =$ le polynôme minimal de t et telles que le déterminant de S divise D.

[1] Cet article contient l'essentiel de la thèse des auteurs soutenue à l'Université de Genève.

DÉFINITION. Le polynôme λ est semi-simple s'il n'a pas de facteurs multiples dans sa décomposition en produit de facteurs irréductibles.

Le résultat algébrique de ce travail est:

THÉORÈME. *Si $SI_\varepsilon(n, \lambda, D)$ est non vide, $SI_\varepsilon(n, \lambda, D)$ est fini si et seulement si λ est semi-simple.*

Au paragraphe 6 nous déduirons, entre autres, de ce théorème le corollaire:

COROLLAIRE. *Si $q \geq 2$ et si λ est semi-simple, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isotopie de noeuds simples $S^{2q-1} \to S^{2q+1}$ de dimension $2q-1$ ayant λ pour polynôme d'Alexander.*

Remarque. Levine [L3] a montré qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes de Z-isomorphisme de structures isométriques (V, S, t) dans une classe fixée de Q-isomorphisme, ceci lorsque S est unimodulaire et antisymétrique. Le travail de Levine diffère donc du nôtre par le point de vue adopté (Levine étudie la S-équivalence) et par les techniques algébriques employées (Levine utilise la structure du groupe symplectique). Nous parlerons brièvement des applications topologiques du travail de Levine au §6 (Remarque 6).

Nous allons donner un plan succinct de la démonstration. Observons tout d'abord que le polynôme minimal λ d'une a-isométrie a une propriété de réciprocité: $\lambda = \lambda_a$, où:

$$\lambda_a(X) = (\lambda(0))^{-1} X^k \lambda(a^2 X^{-1}) \qquad \text{avec } k = \text{degré } \lambda.$$

En effet, si t est une a-isométrie d'une forme S, alors $S(\lambda(a^2t^{-1})(x), y) = S(x, \lambda(t)(y)) = 0$ pour tout x et y dans V. Il existe donc un entier non nul c tel que $X^k\lambda(a^2X^{-1}) = c\lambda(X)$. En développant cette égalité et en tenant compte du fait que λ est unitaire, on obtient: $\lambda(0) = c = \pm a^k$.

Nous pouvons maintenant décrire la façon dont cet article est composé. Dans les deux premiers paragraphes nous montrons la finitude de $SI_\varepsilon(n, \lambda, D)$ lorsque λ est irréductible. Pour cela nous associons à toute structure isométrique entière une forme ε-hermitienne à valeurs dans un ordre d'un corps de nombres (§1). Ensuite nous démontrons un théorème de finitude de l'ensemble des classes d'isomorphisme des formes ε-hermitiennes d'invariants fixés (§2).

Au §3 nous montrons la finitude de $SI_\varepsilon(n, \lambda, D)$ lorsque $\lambda = \gamma\gamma_a$ avec γ irréductible et $\gamma \neq \gamma_a$.

Dans le cas général on met en évidence un sous Z-module d'indice fini qui est somme orthogonale de structures isométriques dont le polynôme minimal est soit irréductible, soit de la forme $\gamma\gamma_a$ avec γ irréductible et $\gamma \neq \gamma_a$. Celà nous permet de montrer la finitude de $SI_\varepsilon(n, \lambda, D)$ lorsque λ est semi-simple (§4).

Au §5 nous montrerons que si λ n'est pas semi-simple, $SI_\varepsilon(n, \lambda, D)$ est vide ou infini.

Nous remercions, de son aide et de ses précieux conseils Michel Kervaire qui nous a proposé le sujet de ce travail et qui en a guidé toute l'évolution, ainsi que Jerome Levine et Claude Weber avec qui nous avons eu de fructueuses conversations.

1. Finitude de $SI_\varepsilon(n, \lambda, D)$ lorsque λ est irréductible

PROPOSITION 1. *Si λ est irréductible, $SI_\varepsilon(n, \lambda, D)$ est fini.*

Soit (V, S, t) une structure isométrique dont la classe est dans $SI_\varepsilon(n, \lambda, D)$, λ irréductible. Suivant une méthode de Milnor [M] nous associerons à (V, S, t) une forme ε-hermitienne sur un Λ-module, où Λ est un ordre d'un corps de nombres. Nous ramenerons ainsi la Proposition 1 à une proposition concernant ces formes ε-hermitiennes laquelle sera démontrée au §2.

Le corps de nombres sera $K = Q[X]/(\lambda) = Q(\tau)$, où τ est une racine de λ. Nous avons vu dans l'introduction que si t est une a-isométrie, alors $\lambda = \lambda_a$. Donc K est muni d'une Q-involution induite par $\bar{\tau} = a^2\tau^{-1}$. Si degré $\lambda > 1$, cette involution est non triviale. Mais si degré $\lambda = 1$, alors $\lambda(X) = X \pm a$, donc $t(x) = \pm ax$ pour tout x dans V, et $SI_\varepsilon(n, \lambda, D)$ est alors égal à l'ensemble des classes d'isomorphisme des formes Z-bilinéaires ε-symétriques sur un Z-module libre de rang n, dont le déterminant divise D. La finitude de cet ensemble est bien connue (voir par exemple [M–H] Chapitre 2 Lemme (1,6)). Nous pouvons donc supposer que l'involution est non triviale.

Posons $\Lambda = Z[\tau, a^2\tau^{-1}]$. Λ est un ordre de K invariant par l'involution. Munissons V d'une structure de $Z[\tau]$-module en posant $\tau \cdot x = t(x)$, puis posons $\Lambda V = \Lambda \otimes_{Z[\tau]} V$. ΛV est un Λ-module sans torsion car λ est irréductible, et ΛV est de rang $m = (n/\text{degré}\ \lambda)$ (le rang d'un Λ-module sans torsion W sera par définition la dimension sur K de $K \otimes_\Lambda W$).

Etendons S à $K \otimes_{Z[\tau]} V$, et prenons ensuite sa restriction à ΛV, appelons s cette restriction. L'égalité $s(a^2\tau^{-1}x, y) = S(x, \tau y)$ montre immédiatement que s est à valeurs entières.

Pour obtenir une forme ε-hermitienne sur ΛV. fixons d'abord x et y dans ΛV. Considérons $F: \Lambda \to Z$ définie comme suit: pour tout $\alpha \in \Lambda$, $F(\alpha) = s(\alpha x, y)$. F est évidemment Z-linéaire. $\text{trace}_{K/Q}$ étant non dégénérée sur K, il existe un unique $\beta \in K$ tel que $\text{trace}_{K/Q}\ (\alpha\beta) = F(\alpha) = s(\alpha x, y)$ pour tout $\alpha \in \Lambda$. En fait comme $s(\alpha x, y) \in Z$, $\beta \in \Lambda^*$, où Λ^* est par définition l'ensemble des $\gamma \in K$ tels que $\mathrm{trace}_{K/Q}\ (\gamma\Lambda) \subset Z$. Soit c un entier non nul tel que $c\Lambda^* \subset \Lambda$: alors $c\beta \in \Lambda$.

Posons $B_S(x, y) = c\beta$. $B_S(x, y)$ est l'unique élément de Λ qui vérifie:

$$\mathrm{trace}_{K/Q}\ \{\alpha B_S(x, y)\} = cs(\alpha x, y) \text{ pour tout } \alpha \in \Lambda.$$

$B_S : \Lambda V \times \Lambda V \to \Lambda$ est ε-hermitienne, en effet on vérifie par calcul direct que B_S est linéaire dans la première variable et que $B_S(x, y) = \varepsilon \overline{B_S(y, x)}$.

DÉFINITION. Soit Γ un ordre d'un corps de nombres, W un Γ-module sans torsion de rang fini. Nous dirons qu'une forme bilinéaire ou sesquilinéaire $B : W \times W \to \Gamma$ est d'exposant D, où D est entier strictement positif, si $\mathrm{ad}_B(V)$ contient le sous-groupe $D \cdot \mathrm{Hom}_\Gamma\ (W, \Gamma) = \mathrm{Hom}_\Gamma\ (W, D\Gamma)$ de $\mathrm{Hom}_\Gamma\ (W, \Gamma)$, où $\mathrm{ad}_B : W \to \mathrm{Hom}_\Gamma\ (W, \Gamma)$ est défini par: $\mathrm{ad}_B\ (x) = B(\ \ , x)$.

Remarque 1. Si W est Γ-libre de rang m, on peut représenter $B : W \times W \to \Gamma$ bilinéaire ou sesquilinéaire par une matrice $m \times m$, et on vérifie par calcul direct que:

Si dét (B) divise D, B est d'exposant D.

Si B est d'exposant D, dét (B) divise D^m.

2) Si W_0 est un sous Γ-module de W tel qu'il existe un entier non nul c avec $cW \subset W_0$, et si $B : W \times W \to \Gamma$ bilinéaire ou sesquilinéaire est d'exposant D, alors la restriction de B à W_0 est d'exposant c^2D.

LEMME 1. *B_S est d'exposant cD*

dét (S) divise D, donc S est d'exposant D (cf. Remarque 1). On vérifie directement sur la définition de l'exposant que s (l'extension de S à ΛV) est aussi d'exposant D.

Soit f un homomorphisme Λ-linéaire de ΛV dans $cD\Lambda$, et posons

$$F(x) = \mathrm{trace}_{K/Q} \left\{ \frac{f(x)}{c} \right\}$$

pour tout x dans ΛV. F est un homomorphisme Z-linéaire à valeurs dans DZ. s étant d'exposant D, il existe y dans ΛV tel que

$$s(\alpha x, y) = F(\alpha x) = \mathrm{trace}_{K/Q} \left\{ \frac{f(\alpha x)}{c} \right\} = \mathrm{trace}_{K/Q} \left\{ \alpha \frac{f(x)}{c} \right\}$$

pour tout α dans Λ et pour tout x dans ΛV. Ceci implique que $B_S(x, y) = f(x)$ pour tout x dans ΛV, donc B_S est d'exposant cD.

Notations. On note $H_\Lambda^\varepsilon(m, D)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des formes ε-hermitiennes d'exposant D sur un Λ-module sans torsion de rang m.

On note $[W, B]$ (respectivement $[V, S, t]$) la classe d'isomorphisme de (W, B) (respectivement de (V, S, t)) dans $H^\varepsilon_\Lambda(m, D)$ (respectivement dans $SI_\varepsilon(n, \lambda, D)$).

La construction précédente nous donne une application

$$\phi : SI_\varepsilon(n, \lambda, D) \to H^\varepsilon_\Lambda(m, cD)$$

On a vérifier que ϕ est bien défine et de fibres finies.

ϕ est bien définie. Si (V, S, t) est isomorphe à (V', S', t'), il existe un Z-isomorphisme $F: V \to V'$ entre S et S' tel que $t'F = Ft$, donc F s'étend en un Λ-isomorphisme de ΛV dans $\Lambda V'$ qui est un isomorphisme entre B_S et $B_{S'}$.

ϕ est de fibres finies. Soit $[W, B]$ un élement de $H^\varepsilon_\Lambda(m, cD)$. On considère les structures isométriques (V, S, t) telles que $(\Lambda V, B_S)$ soit isomorphe à (W, B). Soit $F: \Lambda V \to W$ un isomorphisme. Soit c_1 l'exposant de $Z[\tau]$ dans $\Lambda = Z[\tau, a^2\tau^{-1}]$, alors $c_1 \Lambda V \subset V$, donc $c_1 W \subset F(V) \subset W$. Il n'y a donc qu'un nombre fini (qui ne dépend que de c_1 et de n) de possibilités pour le Z-module $F(V)$.

Or si (V, S, t), (V', S', t') sont des structures isométriques avec $F(V) = F'(V')$, on vérifie que $(F')^{-1}F: \Lambda V \to \Lambda V'$ fournit un Z-isomorphisme entre (V, S, t) et (V', S', t'). Donc ϕ est de fibres finies.

La Proposition 2 démontrée au §2 dit que $H^\varepsilon_\Lambda(m, cD)$ est fini. Comme on a une application de fibres finies $SI_\varepsilon(n, \lambda, D) \to H^\varepsilon_\Lambda(m, cD)$, ceci démontrera que $SI_\varepsilon(n, \lambda, D)$ est fini lorsque λ est irréductible.

2. Formes ε-hermitiennes

Dans le paragraphe précédent nous avons été amenées à considérer des formes ε-hermitiennes ($\varepsilon = +1$ ou -1) sur un Λ-module sans torsion de rang fini, à valeurs dans Λ. Rappelons que Λ est un ordre d'un corps de nombres K muni d'une involution non triviale et Λ est invariant par l'involution.

Nous notons $H^\varepsilon_\Lambda(m, D)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des formes ε-hermitiennes de rang m et d'exposant D fixés (Λ et ε sont fixés pour tout le paragraphe). Quelques fois nous fixerons aussi le Λ-module V sur lequel les formes sont données et nous utiliserons la notation $H^\varepsilon_\Lambda(V, D)$.

Nous avons vu que la proposition 2 énoncée ci-dessous démontre la proposition 1:

PROPOSITION 2. *$H^\varepsilon_\Lambda(m, D)$ est fini.*

Autrement dit il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de formes ε-hermitiennes de rang et d'exposant donnés.

Remarquons tout d'abord que si $H^\varepsilon_\Lambda(V, D)$ est fini pour tout Λ-module V sans torsion de rang m, alors $H^\varepsilon_\Lambda(m, D)$ est aussi fini. En effet, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de Λ-modules sans torsion de rang fini fixé. (voir par exemple [S], Corollaire 3.10)

Remarquons aussi qu'il suffit de montrer la Proposition 2 dans le cas où $\Lambda = O_K$: l'anneau des entiers de K: il existe un entier non nul c_1 tel que $c_1 O_K$ soit contenu dans Λ. Si $B: V \times V \to \Lambda$ est une forme ε-hermitienne d'exposant D, alors l'extension de B à $M = O_K \otimes_\Lambda V$, notée γ_B, est ε-hermitienne d'exposant $c_1 D$. Ceci définit une application $\phi: H^\varepsilon_\Lambda(V, D) \to H^\varepsilon_{O_K}(M, c_1 D)$. Montrons que ϕ est de fibres finies. Rappelons que la notation $[V, B]$ signifie: la classe d'isomorphisme de (V, B) dans $H^\varepsilon_\Lambda(V, D)$. Si $\phi[V, B] = [M, \gamma]$, alors il existe un isomorphisme O_K-linéaire $F: M \to M$ qui est une isométrie entre γ_B et γ. On $a: c_1 M \subset F(V) \subset M$, donc il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour le Λ-module $F(V)$. Mais si $F': M \to M$ est une isométrie O_K-linéaire entre $(M, \gamma_{B'})$ et (M, γ) et que $F'(V) = F(V)$, alors $(F')^{-1}F: V \to V$ est un isomorphisme Λ-linéaire entre (V, B) et (V', B'). Donc ϕ est de fibres finies.

On peut donc supposer que V est un O_K-module sans torsion de rang m, que nous fixons pour le reste du paragraphe.

Nous dirons que $B: V \times V \to O_K$ *représente* $\alpha \in O_K$ s'il existe un x non nul dans V tel que $B(x, x) = \alpha$.

Nous avons besoin du lemme suivant:

LEMME 2. *Il existe un sous-ensemble fini Ω de $O_K \backslash \{0\}$ tel que toute forme ε-hermitienne $B: V \times V \to O_K$ d'exposant D représente un élément de Ω.*

La démonstration du Lemme 2 consiste à se ramener à un problème concerant des formes bilinéaires symétriques lequel est résolu dans O'Meara [O]. En effet, il découle du Lemme 103.3 et de la Remarque 103.5 de O'Meara l'équivalent du Lemme 2 pour les formes symétriques: Si F est un corps de nombres et O_F l'anneau des entiers de F, si W est un O_F-module sans torsion de rang fini et $I \neq 0$ un idéal de O_F, il existe un sous-ensemble fini Φ de $O_F \backslash \{0\}$ tel que toute forme O_F-bilinéaire symétrique $L: W \times W \to O_F$ telle que $I \subset \mathrm{Vol}(L)$ représente un élément de Φ.

DÉFINITION. $\mathrm{Vol}(L) = I_1^2 \cdots I_k^2.\ \mathrm{dét}(L(x_i, x_j))_{i,j=1\cdots k}$ où $x_1 \cdots x_k \in W$ et $I_1 \cdots I_k$ des idéaux fractionnaires de O_F sont tels que $W = x_1 I_1 \oplus \cdots \oplus x_k I_k$. (Cette définition se trouve dans O'Meara [O] où il est montré que $\mathrm{Vol}(L)$ ne dépend pas du choix des x_i et des I_i.)

On peut donner la même définition pour $L: V \times V \to O_K$ ε-hermitienne.

Notons F le corps fixe de l'involution, O_F son anneau des entiers.

Associons à tout B dont la classe est dans $H^{\varepsilon}_{O_K}(V, D)$ une forme O_F-bilinéaire, symétrique $L_B: V\times V \to O_F$. Soit b un élément de O_K tel que $b+\varepsilon\bar{b}\neq 0$, un tel b existe car l'involution est non triviale. Considérons $T: K\times K \to F$ définie par: pour tout α et β dans K, $T(\alpha, \beta)=(b+\varepsilon\bar{b})\ (\alpha\beta+\varepsilon\bar{\alpha}\bar{\beta})$. T est F-bilinéaire, symétrique et T est non dégénéréé car pour tout α non nul dans K,

$$T\left(\alpha, \frac{1}{\alpha(b+\varepsilon\bar{b})}\right)=2\neq 0.$$

Posons $L_B(x, y)=T(1, B(x, y))=(b+\varepsilon\bar{b})\ (B(x, y)+B(y, x))$ pour tout x et y dans V. L_B est bien O_F-bilinéaire et symétrique.

Posons $O_K^*=\{\alpha\in K$ tel que $T(\alpha, \beta)\in O_F$ pour tout β dans $O_K\}$ et soit c un entier non nul tel que cO_K^* soit contenu dans O_K. On montre que L_B est d'exposant cD (on emploie le même argument que dans la démonstration du Lemme 1, T jouera le rôle de la trace).

Rappelons que $\mathrm{Vol}\,(L_B)=I_1^2\cdots I_k^2.\ \mathrm{dét}(L_B(x_i, x_j))_{i,j=1\cdots k}$ où $V=x_1I_1\oplus\cdots\oplus x_kI_k$, les x_i appartenant à V et les I_i étant des idéaux fractionnaires de O_F.

Soit $N=x_1O_F\oplus\cdots\oplus x_kO_F$, N est un sous O_F-module de V. Soit c' un entier non nul tel que $c'V\subset N$. D'apres la Remarque 1, la restriction de L_B à N est d'exposant c'^2cD, ce qui entraine que $\mathrm{dét}(L_B(x_i, x_j))_{i,j=1\cdots k}$ divise $(c'^2cD)^k$.

Posons $I=I_1^2\cdots I_k^2.\ (c'^2cD)^k$. Alors I est contenu dans $\mathrm{Vol}\,(L_B)$ pour tout B dont la classe est dans $H^{\varepsilon}_{O_K}(V, D)$. I est un idéal entier car $\mathrm{Vol}\,(L_B)$ est contenu dans O_K.

Remarquons que par le même argument on peut montrer qu'il existe un idéal J de O_K tel que $J\subset\mathrm{Vol}\,(B)$ pour tout B dont la classe est dans $H^{\varepsilon}_{O_K}(V, D)$ $(J\neq 0)$.

Ceci démontre le Lemme 2. En effet, par le résultat de O'Meara que nous avons énoncé au début de la démonstration du Lemme 2, il existe un sous-ensemble fini Ω_0 de $O_F\backslash\{0\}$ tel que pour tout B dont la classe est dans $H^{\varepsilon}_{O_K}(V, D)$, L_B représente un élément de Ω_0. Soit c_2 un entier non nul tel que

$$\alpha=\frac{c_2^2}{2(b+\varepsilon\bar{b})}$$

soit un élément de O_K. Pour tout x dans V, $B(c_2x, c_2x)=\alpha L_B(x, x)$. Donc $\Omega=\alpha\Omega_0$ est l'ensemble cherché.

Démonstration de la Proposition 2. Par récurrence sur $m=\mathrm{rang}_{O_K}V$.

$m=1$: Il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour l'idéal $\mathrm{Vol}\,(B)$ lorsque la classe de B est dans $H^{\varepsilon}_{O_K}(V, D)$, car on a vu que dans ce cas $\mathrm{Vol}\,(B)$ contient un idéal fixe non nul de O_K. Posons $J=\mathrm{Vol}\,(B)$. Soit $x\neq 0$ un élément quelconque de

V. Il existe un idéal fractionnaire I de O_K tel que $V = Ix$. On a: $\mathrm{Vol}(B) = I^2 B(x, x)$ par définition, donc $B(x, x)O_K = JI^{-2}$. Ceci détermine $B(x, x)$ (donc B) à une unité de O_F près. Notons $U(O_F)$ les unités de O_F. Si deux formes B et B' diffèrent par un élément de $U(O_F)^2$, alors elles sont isomorphes. Or $U(O_F)/U(O_F)^2$ est fini, donc il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme.

$m > 1$: Par hypothèse de récurrence $H^{\varepsilon}_{O_K}(m', D)$ est fini si $m' < m$. Soit Ω le sous-ensemble fini de $O_K \backslash \{0\}$ donné par le Lemme 2. Pour toute forme ε-hermitienne $B : V \times V \to O_K$ d'exposant D il existe un élement x_B de V tel que $B(x_B, x_B) \in \Omega$. Soit V_B l'ensemble des $x \in V$ tels que $B(x_B, x_B)$ divise $B(x_B, x)$ dans O_K. V_B est un sous O_K-module de V. V_B se décompose en somme orthogonale de O_K-modules: $V_B = O_K x_B \oplus U_0$, où U_0 est l'ensemble des $x \in V$ tels que $B(x_B, x) = 0$.

Ω étant fini, il existe un entier non nul c tel que $c\alpha^{-1} \in O_K$ pour tout $\alpha \in \Omega$. Remarquons que $cV \subset V_B$ pour tout B dont la classe est dans $H^{\varepsilon}_{O_K}(V, D)$: en effet, on a $B(x_B, x_B)V \subset V_B$. Donc la restriction de B à V_B est d'exposant $c^2 D$. $cV \subset V_B$ entraîne qu'il existe une liste finie de O_K-modules $U_1, \ldots, U_l \subset V$ telle que V_B est égal à l'un des U_i pour tout B dont la classe est dans $H^{\varepsilon}_{O_K}(V, D)$.

Notons X l'ensemble de toutes les formes B dont la classe est dans $H^{\varepsilon}_{O_K}(V, D)$, et X_i celui des formes de X qui satisfont $V_B = U_i$. X est donc la réunion des $X_1 \cdots X_l$. Notons X_i' l'ensemble des restrictions des formes de X_i à U_i.

Soit Y_i l'ensemble des formes dont la classe est dans $H^{\varepsilon}_{O_K}(U_i, c^2 D)$ et qui se décomposent en somme orthogonale de deux formes ε-hermitiennes de rangs 1 et $m-1$. Nous avons vu que $X_i' \subset Y_i$. $\mathrm{Aut}(U_i)$ agit sur Y_i (mais pas nécessairement sur X_i': c'est pour ça que nous avons besoin de Y_i). $Y_i/\mathrm{Aut}(U_i)$ est fini par hypothèse de récurrence.

Le Lemme 3 ci-dessous dit que la finitude de $Y_i/\mathrm{Aut}(U_i)$ pour tout $i = 1 \cdots l$ entraine celle de $X/\mathrm{Aut}(V) = H^{\varepsilon}_{O_K}(V, D)$.

Nous appliquerons le Lemme 3 aussi dans les §§3 et 4.

Pour ce lemme, K n'est pas nécessairement muni d'une involution, et Λ est un ordre quelconque de K.

Soit V un Λ-module sans torsion de rang fini. Nous noterons $\mathcal{S}(V)$ soit l'ensemble des structures isométriques sur V, soit celui des formes ε-hermitiennes sur V.

LEMME 3. *Soient $U_1 \cdots U_l$ des sous Λ-modules d'indice fini de V, X_i $i = 1 \cdots l$ des sous-ensembles de $\mathcal{S}(V)$ tels que les restrictions à U_i des éléments de X_i appartiennent à $\mathcal{S}(U_i)$. On a donc des applications* $\mathrm{res}: X_i \to \mathcal{S}(U_i)$.

Notons X la réunion des $X_1 \cdots X_l$ dans $\mathcal{S}(V)$, et supposons que $\mathrm{Aut}(V)$ *agisse sur X.*

Soit $Y_i \subset \mathcal{S}(U_i)$ *un sous-ensemble stable par* $\mathrm{Aut}(U_i)$ *contenant* $\mathrm{res}(X_i)$.

Alors la finitude de $Y_i/\mathrm{Aut}(U_i)$ *pour tout* $i = 1 \cdots l$ *entraine la finitude de* $X/\mathrm{Aut}(V)$.

Preuve de Lemme 3. Tout $f \in \mathrm{Aut}(U_i)$ s'étend par tensorisation en un K-automorphisme unique de $K \oplus_\Lambda U_i = K \oplus_\Lambda V$, extension que l'on notera f_K.

Notons $\mathrm{Aut}(V \mid U_i)$ l'ensemble des Λ-automorphismes de U_i qui s'étendent à V. On a $f \in \mathrm{Aut}(V \mid U_i)$ si et seulement si $f_K(V) = V$.

Soit $X_i' = \mathrm{res}(X_i)$. L'inclusion de X_i' dans Y_i induit

$$\pi : X_i'/\mathrm{Aut}(V \mid U_i) \to Y_i/\mathrm{Aut}(U_i)$$

Le cardinal des fibres de π est majoré par le cardinal de $\mathrm{Aut}(U_i)/\mathrm{Aut}(V \mid U_i)$ qui est fini. En effet, soit c un entier non nul tel que cV soit contenu dans U_i, alors

$$U_i \subset f_K(V) \subset \frac{1}{c} U_i,$$

donc il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour le Z-module $f_K(V)$.

Or si f et f' sont dans $\mathrm{Aut}(U_i)$ et si $f_K(V) = f'_K(V)$ alors $f_K^{-1}(f'_K(V)) = V$, donc f et f' sont équivalents modulo $\mathrm{Aut}(V \mid U_i)$. Donc le cardinal de $\mathrm{Aut}(U_i)/\mathrm{Aut}(V \mid U_i)$ est fini. Ceci implique que π est de fibres finies, donc la finitude de $Y_i/\mathrm{Aut}(U_i)$ entraine celle de $X_i'/\mathrm{Aut}(V \mid U_i)$.

Soit $\mathrm{Aut}(V, U_i)$ l'ensemble des automorphismes de V qui laissent stable U_i.

D'autre part, res: $X_i \to X_i'$ induit une bijection

$$X_i/\mathrm{Aut}(V, U_i) \to X_i'/\mathrm{Aut}(V \mid U_i)$$

En effet, soient x et y des éléments de $\mathcal{S}(V)$ tels que les restrictions de x et de y à U_i, notées x' et y', appartiennent à $\mathcal{S}(U_i)$. Supposons que x' et y' soient isomorphes par un isomorphisme $f \in \mathrm{Aut}(V \mid U_i)$, alors x et y sont isomorphes par $(f_K \mid V) \in \mathrm{Aut}(V, U_i)$.

Donc $X_i/\mathrm{Aut}(V, U_i)$ est aussi fini. Mais $\prod_{i=1\cdots l}(X_i/\mathrm{Aut}(V, U_i))$ se surjecte sur $X/\mathrm{Aut}(V)$.

3. Structures isométriques avec polynôme minimal de la forme $\gamma\gamma_a$, γ irréductible et $\gamma \neq \gamma_a$

PROPOSITION 3. *Soit* γ *irréductible,* $\gamma \neq \gamma_a$. *Alors* $SI_\varepsilon(n, \gamma\gamma_a, D)$ *est fini.*

Démonstration. γ et γ_a sont premiers entre eux, donc il existe des polynômes

$f_1, f_2 \in Z[X]$ et un entier non nul c tels que:

$$c = f_1\gamma + f_2\gamma_a.$$

Soit V un Z-module libre de rang n, fixé. Pour tout endomorphisme $t: V \to V$ de polynôme minimal $\gamma\gamma_a$, posons:

$$V_1 = \gamma_a(t)(V) \quad \text{et} \quad V_2 = \gamma(t)(V).$$

La somme de V_1 et de V_2 dans V est directe. On vérifie que $cV \subset V_1 \oplus V_2$, donc il n'y a qu'un nombre fini de possibiltés pour le Z-module $V_1 \oplus V_2$, disons $U_1 \cdots U_l$.

Notons X l'ensemble des structures isométriques dont la classe est dans $SI_\varepsilon(V, \gamma\gamma_a, D)$, X_i le sous-ensemble de X formé des structures (V, S, t) telles que $\gamma_a(t)(V) \oplus \gamma(t)(V) = U_i$, et X_i' l'ensemble des restrictions des éléments de X_i à U_i.

Les éléments (U_i, S, t) de X_i' ont les propriétés suivantes:

1) U_i se décompose en somme directe: $U_i = V_1 \oplus V_2$, avec $t(V_1) \subset V_1$, $t(V_2) \subset V_2$, et le polynôme minimal de $t \mid V_1$ est γ, celui de $t \mid V_2$ est γ_a.

2) $S \mid V_1 \times V_1 = S \mid V_2 \times V_2 = 0$

3) $\mathrm{rang}_Z V_1 = \mathrm{rang}_Z V_2$

4) le déterminant de S divise $c^2 D$

1) est trivial, 2) résulte d'un calcul direct, 3) est vrai car par 2) S induit une injection $V_1 \to \mathrm{Hom}_Z(V_2, Z)$ donc $\mathrm{rang}_Z V_1 \leq \mathrm{rang}_Z V_2$, de même $\mathrm{rang}_Z V_2 \leq \mathrm{rang}_Z V_1$. 4) découle du fait que $cV \subset U_i$.

Soit Y_i l'ensemble des structures isométriques dont la classe est dans $SI_\varepsilon(U_i, \gamma\gamma_a, c^2D)$ et qui satisfont 1) 2) et 3). Remarquons que $\mathrm{Aut}(U_i)$ agit sur Y_i (mais pas nécessairement sur X_i'). Le Lemme 3, §2, dit que la finitude des $Y_i/\mathrm{Aut}(U_i)$ entraine celle de $X/\mathrm{Aut}(V) = SI_\varepsilon(V, \gamma\gamma_a, D)$.

Il suffit donc de montrer:

AFFIRMATION. $Y_i/\mathrm{Aut}(U_i)$ est fini

Preuve de l'affirmation. Soit $\mathcal{S} = (U_i = V_1 \oplus V_2, S, t)$ un élément de Y_i, fixé. S induit une injection $B: V_2 \to \mathrm{Hom}_Z(V_1, Z) = V_1^*$. Notons $T = (t \mid V_1): V_1 \to V_1$. On vérifie par calcul direct que $(t \mid V_2) = a^2 B^{-1}(T^*)^{-1} B$.

Notons $I(m, \gamma)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des endomorphismes d'un Z-module libre de rang m ayant γ comme polynôme minimal.

On vérifie facilement que l'on a une application bien définie:

$$\phi: Y_i/\mathrm{Aut}(U_i) \to I(m, \gamma)$$

Obtenue en associant à la classe de $\mathcal{S}$ la classe de T. (car $V_1 = U_i \cap Q\{\gamma_a(t)(U_i)\}$)

Montrons que ϕ est de fibres finies.

Soit $\mathcal{S}' = (U_i = V_1' \oplus V_2', S', t')$ un élément de Y_i tel que $\phi(\mathcal{S}) = \phi(\mathcal{S}')$ Soit $F': V_1' \to V_1$ un isomorphisme. B' et T' seront définis de la même façon que B et T. Notons $G' = B^{-1}(F'^*)^{-1}B' : QV_2' \to QV_2$.

$$\begin{pmatrix} F' & 0 \\ 0 & G' \end{pmatrix} : Q(V_1' \oplus V_2') \to Q(V_1 \oplus V_2)$$

est une Q-isométrie entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$. B et B' sont d'exposant c^2D, donc $c^2DV_1^* \subset B(V_2)$, $c^2DV_1'^* \subset B'(V_2')$. On en déduit que $c^2DV_2 \subset G'(V_2') \subset (1/c^2D)\ V_2$. Il n'y a donc qu'un nombre fini de possibilités pour le Z-module $G'(V_2')$.

Soit $\mathcal{S}''$ un autre élément de Y_i tel que $\phi(\mathcal{S}'') = \phi(\mathcal{S})$. On définit F'' et G'' de la même façon que F' et G'. Supposons que $G''(V_2'') = G'(V_2')$. Alors $(G')^{-1}G'': V_2'' \to V_2$ est un isomorphisme, et

$$\begin{pmatrix} (F')^{-1}F'' & 0 \\ 0 & (G')^{-1}G'' \end{pmatrix} : V_1'' \oplus V_2'' \to V_1' \oplus V_2'$$

donne une isométrie entre $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$.

Ceci montre que ϕ est de fibres finies.

$I(m, \gamma)$ est fini par [S], Corollaire 3.10, donc $Y_i/\mathrm{Aut}(U_i)$ est fini.

EXEMPLE. Si γ et γ_a sont tels qu'il existe des polynômes entiers f_1 et f_2 avec $f_1\gamma + f_2\gamma_a = 1$, alors $SI_\varepsilon(n, \gamma\gamma_a, 1)$ s'injecte dans l'ensemble $I(m, \gamma)$ des classes d'isomorphisme des $Z[X]/(\gamma)$-modules sans torsion de rang $m = (n/2\ \text{degré}\ \gamma)$ (l'injection est l'application ϕ décrite dans la démonstration ci-dessus).

Si de plus $a = 1$, alors cette injection est aussi surjective.

§4. Structures isométriques avec polynôme minimal semi-simple

Rappelons qu'une structure isométrique entière (V, S, t) est composée de:

1) V un Z-module libre de rang fini

2) $S: V \times V \to Z$ une forme bilinéaire, non singulière ($\text{dét}(S) \neq 0$) ε-symétrique, où $\varepsilon = +1$ ou -1.

3) $t: V \to V$ un endomorphisme satisfaisant:

$$S(tx, ty) = a^2 S(x, y) \text{ pour tout } x \text{ et } y \text{ dans } V$$

pour un certain entier positif a (indépendant de x et de y)

Soit λ le polynôme minimal de t, alors $\lambda(0) \neq 0$. Nous utilisons la notation:

$$\lambda_a(X) = (\lambda(0))^{-1} X^{\text{degre } \lambda} \; \lambda(a^2 X^{-1})$$

nous avons déjà vu que la propriété d'isométrie de t et la non singularité de S impliquent que $\lambda_a = \lambda$ (cf. introduction).

Nous notons $SI_\varepsilon(n, \lambda, D)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des structures isométriques (V, S, t) telles que:

1) $\text{rang}_Z V = n$
2) le polynôme minimal de t est λ
3) le déterminant de S divise D.

Un polynôme $\lambda \in Z[X]$ est dit *semi-simple* s'il n'a pas de facteur multiple dans sa décomposition en produit de polynômes irréductibles.

Nous allons maintenant démontrer le principal résultat algébrique de ce travail:

PROPOSITION 4. *Si λ est semi-simple, alors $SI_\varepsilon(n, \lambda, D)$ est fini.*

Démonstration. λ a une décomposition en produit de polynômes à coefficients entiers, unitaires, irréductibles, de la forme:

$$\lambda = \gamma_1 \cdots \gamma_k \gamma_{k+1}(\gamma_{k+1})_a \cdots \gamma_r(\gamma_r)_a$$

où

$$(\gamma_\rho)_a = \gamma_\rho \quad \text{si} \quad \rho \leq k, \quad \text{et} \quad (\gamma_\rho)_a \neq \gamma_\rho \quad \text{si} \quad \rho > k.$$

Notons

$$\lambda_\rho = \begin{cases} \gamma_\rho & \text{si} \quad \rho \leq k \\ \gamma_\rho(\gamma_\rho)_a & \text{si} \quad \rho > k \end{cases}$$

et posons $\mu_\rho = \lambda/\lambda_\rho$. Remarquons que $(\mu_\rho)_a = \mu_\rho$. Comme λ est semi-simple par hypothèse, les μ_ρ $\rho = 1, \ldots, r$ sont des polynômes entiers, premiers entre eux dans leur ensemble, i.e. il existe des polynômes entiers $f_1 \cdots f_r$ et un entier non nul c tels que:

$$c = f_1\mu_1 + \cdots + f_r\mu_r.$$

Soit V un Z-module libre de rang n, fixé. Pour tout endomorphisme $t: V \to V$ de polynôme minimal λ, posons:

$$V_\rho = \mu_\rho(t)(V).$$

Remarquons que

1) La somme des V_ρ dans V est directe. $cV \subset \oplus_{\rho=1}^r V_\rho$, donc il n'y a qu'un nombre fini de sous Z-modules de V qui peuvent être réalisés comme $\oplus_{\rho=1}^r \mu_\rho(t)(V)$ pour un certain choix de t. Appelons $U_1 \cdots U_l$ ces sous Z-modules.

2) Les V_ρ sont stables par t, et le polynôme minimal de $t \mid V_\rho$ est λ_ρ.

3) V_ρ est orthogonal à V_σ si $\rho \neq \sigma$.

Notons maintenant X l'ensemble des structures isométriques dont la classe est dans $SI_\varepsilon(V; \lambda, D)$, X_i le sous-ensemble de X des structures isométriques (V, S, t) telles que

$$\bigoplus_{\rho=1}^{r} \mu_\rho(t)(V) = U_i \subset V.$$

On a:

$$\bigcup_{i=1}^{l} X_i = X.$$

Soit Y_i l'ensemble des structures isométriques dont la classe est dans $SI_\varepsilon(U_i, \lambda, c^2D)$ et qui se décomposent en somme orthogonale $\oplus_{\rho=1}^r (W_\rho, S_\rho, t_\rho)$, où le polynôme minimal de t_ρ est λ_ρ. $\mathrm{Aut}(U_i)$ agit sur Y_i. Observons qu'un isomorphisme entre deux éléments de Y_i préserve les décompositions orthogonales de U_i. Deux structures de Y_i sont donc isomorphes si et seulement si les facteurs correspondants dans leurs décompositions orthogonales sont isomorphes. Ceci montre que l'on a une injection:

$$Y_i/\mathrm{Aut}(U_i) \to \prod_{\substack{(n_1\cdots n_r)\\ n_\rho \in N\\ n_\rho \leq n}} \prod_{\rho=1\cdots r} SI_\varepsilon(n_\rho, \lambda_\rho, c^2D)$$

Par les Propositions 1 et 3 on en déduit que $Y_i/\mathrm{Aut}(U_i)$ est fini.

Notons X_i' l'ensemble des restrictions à U_i des éléments de X_i. Les propriétés 2) et 3) impliquent que X_i' est un sous-ensemble de Y_i. On peut donc appliquer le Lemme 3, §2: la finitude des $Y_i/\mathrm{Aut}(U_i)$ entraine la finitude de $X/\mathrm{Aut}(V) = SI_\varepsilon(V, \lambda, D)$.

§5. Structures isométriques avec polynôme minimal non semi-simple

PROPOSITION 5. *Supposons que $SI_\varepsilon(n, \lambda, D)$ soit non vide. Si λ est non semi-simple, alors $SI_\varepsilon(n, \lambda, D)$ est infini.*

Démonstration. On a déjà vu que $SI_\varepsilon(n, \lambda, D)$ non vide entraine: il existe un entier postif a tel que $\lambda_a = \lambda$. Comme λ est non semi-simple, il existe des polynômes entiers γ et μ, avec degré $\gamma \geq 1$, tels que $\lambda = \gamma^2\mu$. Comme $\lambda_a = \lambda$, on peut les choisir tels que $\gamma_a = \gamma$, $\mu_a = \mu$.

Soit (V, S, t) une structure isométrique dont la classe est dans $SI_\varepsilon(n, \lambda, D)$. Pour construire une infinité d'éléments de $SI_\varepsilon(n, \lambda, D)$, on commence par décomposer V comme suit:

Posons $V_1 = \operatorname{Ker}(\gamma\mu)(t) = \{x \in V$ tel que $(\gamma\mu)(t)(x) = 0\}$, et $W_3 = V \cap [Q(\gamma\mu)(t)(V)] = \{x \in V$ tel qu'il existe un entier non nul m avec $mx \in (\gamma\mu)(t)(V)\}$. V_1 est Z-sommand direct dans $V: V = W_1 \oplus V_1$, et W_3 est Z-sommand direct dans $V_1: V_1 = W_2 \oplus W_3$, donc $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$, comme somme directe de Z-modules.

Remarquons que

1) V_1 et W_3 sont stables par t
2) $S \mid V_1 \times W_3 = 0$
3) $\operatorname{rang}_Z W_1 = \operatorname{rang}_Z W_3$

1) est immédiat à partir des définitions. On vérifie 2) par un calcul direct, en utilisant que $S((\gamma\mu)(t)(x), y) = S(x, (\gamma\mu)(a^2t^{-1})(y))$, associé au fait que $(\gamma\mu)_a = \gamma\mu$, et la définition de V_1 et de W_3. Montrons 3): S induit une injection $W_3 \hookrightarrow \operatorname{Hom}_Z(W_1, Z)$ (cf. 2.)) donc $\operatorname{rang}_Z W_3 \leq \operatorname{rang}_Z W_1$. Mais l'application $W_1 \to \operatorname{Hom}_Z(W_3, Z)$ donnée par S est aussi injective. En effet, soit $x \in W_1$ tel que $S(x, y) = 0$ pour tout y dans W_3. Mais $(\gamma\mu)(t)(V) \subset W_3$ donc $S(x, (\gamma\mu)(t)(z)) = 0$ pour tout z dans V. On a: $(\gamma\mu)_a = \gamma\mu$, donc $S((\gamma\mu)(t)(x), (z) = 0$ pour tout z dans V, d'où $(\gamma\mu)(t)(x) = 0$, ce qui implique que $x \in V_1$, mais $V_1 \cap W_1 = 0$, donc $x = 0$. Ceci entraine que $\operatorname{rang}_Z W_1 \leq \operatorname{rang}_Z W_3$, donc $\operatorname{rang}_Z W_1 = \operatorname{rang}_Z W_3$.

Par rapport à une base correspondant à la décomposition $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$, S a une matrice de la forme:

$$\begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ \varepsilon S_2^T & S_4 & 0 \\ \varepsilon S_3^T & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par 3), S_3 est une matrice carrée.

Après ces préliminaires, on construit une infinité de structures isométriques non isomorphes qui ont les mêmes invariants que (V, S, t): Soit k un entier non nul. On pose:

$$M_k = k^2 W_1 \oplus k W_2 \oplus W_3, \qquad t_k = t \mid M_k$$

Bien que W_1 et W_2 ne soient que des Z-facteurs, on vérifie que M_k est stable par t, en utilisant 1). On définit S_k par:

$$S_k = \frac{1}{k^2}(S \mid M_k \times M_k)$$

S_k a la matrice:

$$\begin{pmatrix} k^2 S_1 & k S_2 & S_3 \\ \varepsilon k S_2^T & S_4 & 0 \\ \varepsilon S_3^T & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc S_k est une forme entière, et dét(S_k) = dét(S). (M_k, S_k, t_k) est donc une structure isométrique, et sa classe est dans $SI_\varepsilon(n, \lambda, D)$.

Montrons qu'il y a une infinité de (M_k, S_k, t_k) non isomorphes: Posons:

$$X_k = \operatorname{Ker} \gamma(t_k)/(\gamma\mu)(t_k)(M_k)$$

Le cardinal de la torsion de X_k est un invariant de la classe d'isomorphisme de (M_k, S_k, t_k).

On a: $(\gamma\mu)(t_k)(M_k) = k^2(\gamma\mu)(t_k)(W_1) = k^2(\gamma\mu)(t)(W_1) \subset W_3 \subset \operatorname{Ker} \gamma(t_k)$. Soit W_0 un Z-complèmentaire de W_3 dans $\operatorname{Ker} \gamma(t_k)$. On a:

$$X_k = W_0 \oplus W_3/k^2(\gamma\mu)(t) W_1)$$

Soit $r = \operatorname{rang}_Z W_1 = \operatorname{rang}_Z W_3 \geq 1$. On a: $r = \operatorname{rang}_Z (k^2(\gamma\mu)(t)(W_1))$, car $(\gamma\mu)(t)$ est injectif sur W_1.

Soit c le cardinal de

$$W_3/(\gamma\mu)(t)(W_1)$$

Le cardinal de la torsion de X_k est alors ck^{2r}. Donc il y a une infinité de structures (M_k, S_k, t_k) non isomorphes.

Nous aurons besoin de la remarque suivante pour l'application à la théorie des noeuds:

Remarque 2. Soit b un entier positif. Notons $\tilde{t}_k$ l'extension de t_k à

$Z[1/b]\otimes_Z M_k$. On voit que les t_k construits au cours de la précédente démonstration donnent une infinité de $\tilde{t}_k$ non $Z[1/b]$-isomorphes: en effet on regarde le cardinal de la torsion de $Z[1/b]\otimes_Z X_k$, et on voit que si k et k' sont des entiers positifs, $k \neq k'$, tous les deux premiers à b et à c (c a été défini au cours de la démonstration ci-dessus) alors $\tilde{t}_k$ et $\tilde{t}'_k$ ne sont pas $Z[1/b]$-isomorphes.

§6. Applications à la topologie

Dans ce paragraphe on appelera surface toute $2q$-variété compacte à bord, orientable et lisse, plongée dans S^{2q+1}.

DÉFINITIONS. Soit M^{2q} une surface.

1) On dira que M^{2q} est *simple* si elle peut être obtenue par attachement d'anses de dimension q à un disque de dimension $2q$.

2) Soit D un entier strictement positif, on dira qu'une surface simple, M^{2q}, est de *type D* si le déterminant de sa forme d'intersection, $S: H_q(M^{2q})\times H_q(M^{2q}) \to Z$, divise D.

3) On dira que M^{2q} est *minimale* si elle est simple et si sa forme de Seifert $A: H_q(M^{2q})\times H_q(M^{2q}) \to Z$ (cf. la définition dans [L2]) est non singulière (c'est-à-dire de déterminant non nul).

4) Soient $\varepsilon = \pm 1$ et D un entier strictement positif, on dira que (V, A) est une *ε-forme de type D* si V est un Z-module libre de rang fini et si $A: V\times V \to Z$ est une forme bilinéaire telle que dét$(A+\varepsilon A^T)$ divise D.

Soient M^{2q} une surface simple de type D, $V = H_q(M^{2q})$ et A la forme de Seifert de M^{2q}, alors $A+(-1)^q A^T$ est la forme d'intersection de M^{2q}. (V, A) est donc une $(-1)^q$-forme de type D.

Remarque 3. Soit $q > 2$, par généralisation immédiate des résultats de Levine [L1] on obtient: l'association à M^{2q} de sa forme de Seifert (V, A) induit une correspondance biunivoque entre les classes d'isotopie des $2q$-surfaces minimales de type D et les classes d'isomorphisme des $(-1)^q$-formes non singulières de type D.

En particulier n, le rang de A et λ, le polynôme minimal de $t = (-1)^{q+1}\cdot$ dét$(A)A^{-1}A^T$ sont des invariants de la classe d'isotopie de M^{2q}.

Remarque 4. L'ensemble des classes d'isomorphisme des $(-1)^q$-formes non singulières de type D, d'invariants n et λ s'injecte dans $SI_{(-1)^q}(n, \lambda, D)$. En effet, à (V, A) non singulière de type D on associe (V, S, t) où $S = A+(-1)^q A^T$ et $t = (-1)^{q+1}$ dét$(A)A^{-1}A^T$. $[V, S, t] \in SI_{(-1)^q}(n, \lambda, D)$. L'injectivité découle du fait que si (V, S, t) est construite à partir de (V, A) alors

$$A = S\left(1 - \frac{t}{\text{dét}(A)}\right)^{-1}.$$

La Proposition 4 du §4 implique donc:

PROPOSITION 6: *Si λ est semi-simple et si $q > 2$, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isotopie de $2q$-surfaces minimales de type D d'invariants n et λ fixés.*

PROPOSITION 7. *Si $q > 2$ et si λ est non semi-simple, l'ensemble des classes d'isotopie des $2q$-surfaces minimales de type D ayant n et λ pour invariants est soit vide soit infini.*

Preuve de la proposition 7. Supposons qu'il existe une $2q$-surface minimale de type D ayant n et λ pour invariants. Soit (V, A) sa forme de Seifert, il suffit maintenant d'exhiber pour tout $k \in N\backslash\{0\}$ des $(-1)^q$-formes de type $D: (V_k, A_k)$ toutes non isomorphes d'invariants n et λ. Soit (V, S, t) la structure isométrique associée à (V, A), λ étant non semi-simple on applique la proposition 5, §5. Lorsque (V, S, t) provient d'une $(-1)^q$-forme, (V, A), les (M_k, S_k, t_k) construits au §5 sont tels que

$$A_k = S_k\left(1 - \frac{t_k}{\text{dét}(A)}\right)^{-1}$$

sont des formes entières.

Les noeuds simples

DÉFINITIONS

1) Un n-noeud Σ^n est une n-sphère d'homotopie différentiablement plongée dans S^{n+2}.

2) Σ^{2q-1} est un noeud simple si $\prod_i (S^{2q+1}\backslash\Sigma^{2q-1}) \cong \prod_i (S^1)$ pour tout $i < q$.

3) Une surface de Seifert est une surface dont le bord est un noeud.

Remarque 5. La forme de Seifert d'une surface de Seifert est une ε-forme de type 1.

Convention. A partir de maintenant nous dirons ε-forme à la place de ε-forme de type 1.

Tout noeud simple borde une surface de Seifert simple M^{2q} (cf. Levine [L4]) et la classe de S-équivalence $S(A)$ de la forme de Seifert A de M^{2q} est un invariant de la classe d'isotopie de Σ^{2q-1} (cf. Levine [L1]). Soit A_0 une forme non singulière S-équivalente à A (il en existe par Trotter [T1]), alors n, le rang de A_0 et λ, le polynôme minimal de $t=(-1)^{q+1}\,\text{dét}\,(A_0)A_0^{-1}A_0^T$ sont des invariants de $S(A)$ (cf. Trotter [T1] ou Levine [L1]).

Soient $n \in N\backslash\{0\}$ et $\lambda \in Z[X]$.

PROPOSITION 8. *Si $q \geq 2$ et si λ est semi-simple il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isotopie de $(2q-1)$-noeuds simples ayant n et λ pour invariants.*

PROPOSITION 9. *Si $q \geq 2$ et si λ est non semi-simple, l'ensemble des classes d'isotopie des $(2q-1)$-noeuds simples ayant n et λ pour invariants est soit vide soit infini.*

La preuve de ces deux propositions 8 et 9 repose sur le résultat suivant du à Levine [L1]:

(*) Si $q \geq 2$ il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble des classes d'isotopie des $(2q-1)$-noeuds simples et l'ensemble des classes de S-équivalence des $(-1)^q$-formes.

Preuve de la Proposition 8. Trotter [T1] a montré que toute classe de S-équivalence contient une forme non singulière. Deux formes isomorphes étant S-équivalentes la proposition découle donc de la finitude de $SI_{(-1)}q(n, \lambda, 1)$ (en utilisant (*) et la Remarque 4).

Preuve de la Proposition 9. Supposons qu'il existe un $(2q-1)$-noeud d'invariants n et λ. Choisissons une $(-1)^q$-forme, (V, A), non singulière se trouvant dans la classe de S-équivalence associée au noeud et faisons lui correspondre la structure isométrique (V, S, t). On construit, comme dans la remarque 2, §5, pour une infinité d'entiers k, des structures isométriques (M_k, S_k, t_k) toutes non $Z[1/\text{dét}\,(A)]$-isomorphes.

Il découle de cette constuction que les

$$A_k = S_k\left(1-\frac{t_k}{\text{dét}\,(A)}\right)^{-1}$$

sont des formes entières

Les classes de S-équivalence des (V_k, A_k) sont toutes distinctes car par Levine [L1] ou Trotter [T1] deux formes non singulières, S-équivalentes sont $Z[1/\text{dét}\,(A)]$-isomorphes. Le résultat de Levine, (*), achève cette preuve.

Remarque 6. Trotter [T2] s'est intéressé au problème suivant: "Combien" y-a-t-il de surfaces de Seifert minimales pour un $(2q-1)$-noeud simple fixé? Levine

[L3] a montré qu'il y en a un nombre fini si λ est semi-simple et si q est impair et plus grand que 2. La proposition 6 appliquée au cas $D=1$ montre, en particulier, que le résultat de Levine est vrai sans restriction sur la parité de q. D'autre part, Trotter a des résultats de non finitude pour son problème. Il faut remarquer que les problèmes topologiques traités par Trotter et Levine diffèrent de ceux traités dans cet article. Cette différence de point de vue se retrouve en algèbre: Trotter et Levine s'intéressent aux classes de Z-isomorphisme des ε-formes non singulières qui se trouvent dans une classe de S-équivalence fixée (ces ε-formes sont, en particulier, toutes Q-isomorphes).

Remarque 7. Soit (V, A) une $(-1)^q$-forme non singulière se trouvant dans la classe de S-équivalence associée à un $(2q-1)$-noeud simple. $\Delta(X)=\text{dét}(A)$ $\text{dét}(X+(-1)^qA^{-1}A^T)$, est le polynôme d'Alexander de ce noeud. Soient $a=\text{dét}(A)$ et Δ' le polynôme caractéristique de $t=(-1)^{q+1}aA^{-1}A^T$ alors: $a^{n-1}\Delta(X)=\Delta'(aX)$ où $n=\text{degré } \Delta$.

REFERENCES

[L1] LEVINE, J., *An algebraic classification of some knots of codimension two,* Comment. Math. Helv. *45* (1970), 185–198.

[L2] LEVINE, J., *Knot cobordism groups in codimension two* Comment. Math. Helv. *44* (1969), 229–244.

[L3] LEVINE, J., *Finiteness of symplectic class number and an application to knot theory* (preprint).

[L4] LEVINE, J., *Unknotting spheres in codimension two,* Topology *4* (1965), 9–16.

[M] MILNOR, J., *On isometries of inner product spaces,* Inventiones math. *8* (1969), 83–97.

[M–H] MILNOR, J. et HUSEMOLLER, D., *Symmetric bilinear forms,* Springer-Verlag

[O] O'MEARA, O. T. *Introduction to quadratic forms,* Springer-Verlag

[S] SWAN, RICHARD G. K-*theory of finite groups and orders,* Springer-Verlag

[T1] TROTTER, H. F. *Homology of group systems with applications to knot theory,* Ann. Math. *76* (1962), 464–498.

[T2] TROTTER, H. F. *On* S-*equivalence of Seifert matrices,* Inventiones math. *20* (1973), 173–207.

Reçu le 2 Septembre 1978