Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 54 (1979)

Artikel: Tresses, monodromie et le groupe symplectique.
Autor: A'Campo, Norbert
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41579

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici **54** (1979) 318–327 Birkhäuser Verlag, Basel

Tresses, monodromie et le groupe symplectique

NORBERT A'CAMPO

Soit $F:\mathbf{C}^2\times\mathbf{C}^\mu\to\mathbf{C}\times\mathbf{C}^\mu$ le déploiement versel de la singularité isolée de la courbe plane $\{(x, y)\in\mathbf{C}^2 \mid x^{\mu+1}-y^2=0\}$. On choisit F de la forme

$$F(x, y; a_1, \ldots, a_\mu)=\left(-y^2+x^{\mu+1}+\sum_{i=1}^{\mu} a_i x^{i-1}; a\right).$$

Soit $X=\{(x, y; a)\in\mathbf{C}^2\times\mathbf{C}^\mu \mid F(x, y; a)=(0, a)\}$ et soit $\pi:X\to\mathbf{C}^\mu$ la projection $(x, y; a)\mapsto a$. La fibre $X_a=\pi^{-1}(a)$, $a\in\mathbf{C}^\mu$, est une courbe hyperelliptique de genre $[\mu/2]$ dans $\mathbf{C}^2$. Elle est lisse si et seulement si le polynôme $x^{\mu+1}+\sum_{i=1}^{\mu} a_i x^{i-1}$ n'a que des racine simples. Soit $\Delta=\{a\in\mathbf{C}^\mu \mid X_a$ n'est pas lisse$\}$ le discriminant des polynômes de degré $\mu+1$. Alors la restriction de π au-dessus de $\mathbf{C}^\mu-\Delta$ est une application fibrée

$$\varphi: X-\pi^{-1}(\Delta)\to\mathbf{C}^\mu-\Delta.$$

Les fibres de φ sont difféomorphes à la surface de genre $[\mu/2]$ privée de $r=(\mu+1, 2)$ points (à l'infini).

Soient $b\in\mathbf{C}^\mu-\Delta$ et X_b une fibre type de φ. Donc pour tout anneau k le k-module $H_1(X_b, k)$ est libre de rang μ et la forme bilinéaire alternée des intersections

$$I: H_1(X_b, k)\times H_1(X_b, k)\to k$$

est de rang $\mu+1-r$. Lorsque $\mu=2l$ est pair, la forme I est symplectique non dégénérée. Lorsque $\mu=2l+1$ on obtient une forme symplectique non dégénérée I sur $H_1(X_b, k)/K$ où K est le noyau de la forme des intersections. On pose

$$M_\mu(k)=\begin{cases} H_1(X_b, k) \text{ muni de I}, & \mu=2l, \\ H_1(X_b, k)/K \text{ muni de I}, & \mu=2l+1, \end{cases}$$

et $\mathrm{Sp}\,(M_\mu(k))$ est le groupe des automorphismes de $M_\mu(k)$.

Le groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{C}^\mu - \Delta, b)$ est naturellement isomorphe au groupe des tresses à $\mu+1$ brins $B(\mu+1)$. L'espace $\mathbf{C}^\mu - \Delta$ est en outre un espace d'Eilenberg–MacLane $K(\pi, 1)$, avec $\pi = B(\mu+1)$ [FO-NE].

La monodromie de la fibration φ fournit une représentation symplectique du groupe des tresses

$$\begin{array}{l} \rho : B(\mu+1) \to \mathrm{Sp}\,(M_\mu(k)) \simeq \mathrm{Sp}_{2l}\,(k) \\ \quad \wr \\ \pi_1(\mathbf{C}^\mu - \Delta, b) \end{array}$$

On appelle $\Gamma_\mu(k) = \rho(B(\mu+1))$ le groupe de monodromie de la singularité de la courbe $x^{\mu+1} - y^2 = 0$.

THÉORÈME 1. *Soit* $\mu \geq 2$. *Alors on a*

(1) *Pour tout nombre premier* $p \neq 2$, $\Gamma_\mu(\mathbf{F}_p) = \mathrm{Sp}\,(M_\mu(\mathbf{F}_p))$.

(2) *Le groupe* $\Gamma_\mu(\mathbf{Z})$ *contient le sous-groupe de congruence* modulo 2 *dans* $\mathrm{Sp}\,(M_\mu(\mathbf{Z}))$.

(3) *Le groupe* $\Gamma_\mu(\mathbf{F}_2) \subset \mathrm{Sp}\,(M_\mu(\mathbf{F}_2))$ *est isomorphe au groupe symétrique* $S_{\mu+1}$ *sauf pour* $\mu = 3$ *où* $\Gamma_3(\mathbf{F}_2) \simeq S_3$.

Au chapitre nous décrivons plus précisément le sous-groupe $\Gamma_\mu(\mathbf{F}_2)$ dans $\mathrm{Sp}\,(M_\mu(\mathbf{F}_2))$ d'après la lettre [SE] de J. P. Serre.

COROLLAIRE. *Soit* $l = [\mu/2]$. *Alors on a*

$$I_\mu = \mathrm{Indice}\,[\mathrm{Sp}\,(M_\mu(\mathbf{Z})) : \Gamma_\mu(\mathbf{Z})] = \mathrm{Indice}\,[\mathrm{Sp}\,(M_\mu(\mathbf{F}_2)) : \Gamma_\mu(\mathbf{F}_2)]$$

et

$$I_\mu = \frac{2^{l^2}(2^{2l}-1)(2^{2(l-1)}-1)\cdots(2^2-1)}{(\mu+1)!} \quad \textit{pour} \quad \mu \neq 3.$$

$$I_2 = 1,\ I_3 = 1,\ I_4 = 6,\ I_5 = 1,\ I_6 = 288,\ I_7 = 36,\ I_8 = 2^{10}\cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 17, \cdots$$

et

$$I_{2l+1} = \frac{1}{2l+2} \cdot I_{2l} \quad \textit{pour} \quad 2l+1 \geq 5 \quad \textit{et} \quad I_\mu > 1 \quad \textit{pour} \quad \mu \geq 6.$$

La valeur $I_7 = 36$ contredit ce qu'annonce A. N. Varchendo [VA] à savoir que $I_{2l+1}(\mathbf{Z}) = \mathrm{Sp}\,(M_{2l+1}(\mathbf{Z}))$ (ce qui n'est vrai que pour $l = 0, 1, 2$).

§1. La représentation ρ

Désormais on suppose que $\mu = 2l$ ou que $\mu = 2l+1$ et que $\mu \geq 2$. Soit $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\mu$ une chaîne de cycles orientés sur X_b comme dans les figures. On oriente X_b de sorte que $I(\delta_i, \delta_{i+1}) = 1$. Les cycles $\delta_1, \ldots, \delta_\mu$ forment une base de $H_1(X_b, k)$. Soit

$$T_i : H_1(X_b, k) \to H_1(X_b, k)$$

la transformation

$$T_i(x) = x - I(x, \delta_i)\delta_i, \qquad x \in H_1(X_b, k).$$

Alors T_i est l'effet en homologie d'une torsion de Dehn lelong le cycle δ_i, donc $T_i \in \mathrm{Sp}\,(H_1(X_b, k))$.

Soient $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ les générateurs standard du groupe des tresses $B(\mu+1)$. Donc $B(\mu+1)$ est présenté par les relations

$$t_i t_{i+1} t_i = t_{i+1} t_i t_{i+1}, \qquad 1 \leq i < \mu,$$

$$t_i t_j = t_j t_i, \qquad 1 \leq i < j-1 < \mu.$$

La représentation de monodromie est à automorphisme intérieure de $\mathrm{Sp}\,(H_1(X_b, k))$ près l'homomorphisme

$$\rho : B(\mu+1) \to \mathrm{Sp}\,(H_1(X_b, k))$$
$$t_i \mapsto T_i.$$

Ceci est expliqué dans [AC, AR, LA, BR].

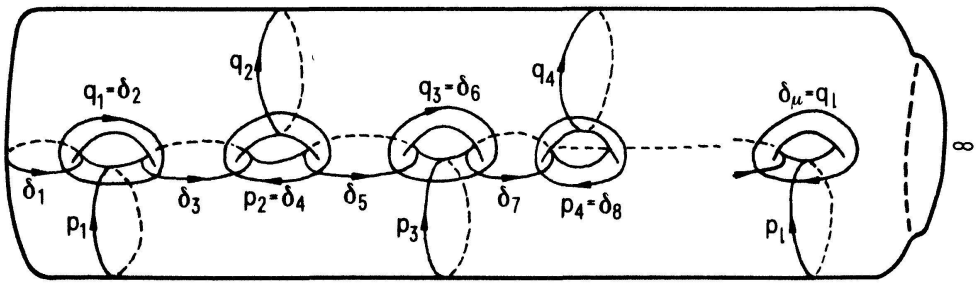


Figure pour la singularité $x^{\mu+1} - y^2 = 0$, μ paire, l impair.

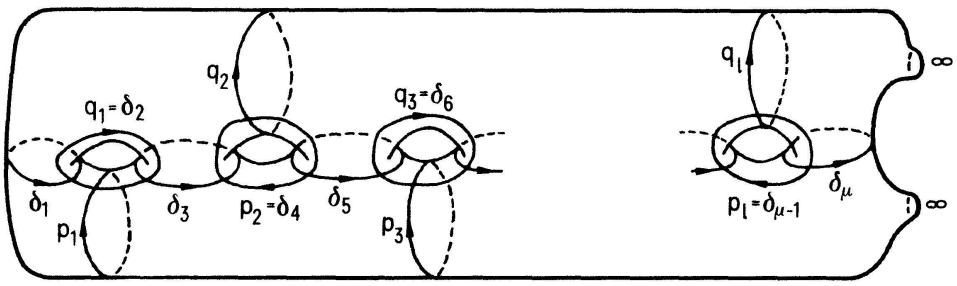


Figure pour la singularité $x^{\mu+1}-y^2=0$, μ impaire, l paire.

Soit $p_1, p_2, \ldots, p_l, q_1, \ldots, q_l$ la base symplectique de $M_\mu(k)$ où pour $1 \leq i \leq [\mu/4]=[l/2]$

$$\begin{aligned} p_{2i-1} &= \delta_1+\delta_3+\cdots+\delta_{4i-3}, \\ p_{2i} &= \delta_{4i}, \\ q_{2i-1} &= \delta_{4i-2}, \\ q_{2i} &= -\delta_1-\delta_3-\cdots-\delta_{4i-1}. \end{aligned}$$

Dans le cas où $\mu=2l+1$ il faut lire ces formules modulo K. Dans les figures sont dessinées des courbes simples orientées qui représentent les cycles p_i, q_i. Soit $E_i \in \mathrm{Sp}\,(M_\mu(k))$ l'effet en homologie d'une torsion de Dehn Lelong le cycle p_i ou q_i selon que i est impair ou pair. Le sens des torsions est choisi tel que

$$\begin{aligned} E_i(x) &= x-I(x, p_i)p_i, \qquad i \text{ impair} \\ &= x+I(x, q_i)q_i, \qquad i \text{ pair}, \end{aligned} \qquad 1 \leq i \leq [\mu/2]=l.$$

Un calcul direct montre le

LEMME 1. $E_i^2=(T_1 \cdot T_2 \cdot \cdots \cdot T_{2i-1})^{2i} \in \Gamma_\mu(k), \qquad 1 \leq i \leq [\mu/2].$

Remarquez que l'on a aussi $E_1=T_1 \in \Gamma_\mu(k)$ et que, si μ est impair, $E_l=T_\mu^{\pm 1} \in \Gamma_\mu(k)$ car q_l est homologue à $(-1)^l\delta_{2l+1}$.

Soit C_l le système de racines $\{\pm 2l_i, \pm l_i \pm l_j\} \subset \mathbf{R}^l$, que nous épinglons au groupe $\mathrm{Sp}\,(M_\mu(k))$ au moyen de la base symplectique $p_1, p_2, \ldots, p_l, q_1, \ldots, q_l$ de $M_\mu(k)$ [BO]. Pour une racine $\varphi \in C_l$ on note U_φ le sous-groupe radiciel additif à un paramètre correspondant. On note $2U_\varphi$ le sous-groupe des multiples pairs d'éléments de U_φ. Alors on a le

LEMME 2.

(i) *E_{2i}^2 engendre $2U_\varphi$,* $\quad \varphi=-(-1)^i \cdot 2 \cdot l_i, \quad 1 \leq i \leq l.$

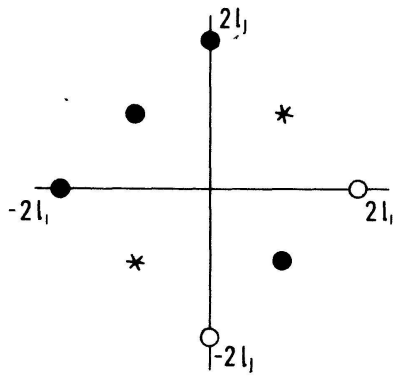
(ii) *T_{2i} engendre U_φ,* $\quad \varphi=(-1)^i \cdot 2 \cdot l_i, \quad 1 \leq i \leq l.$

(iii) $E_j^{-2}E_i^{-2}(T_{2i+1}\cdot\cdots\cdot T_{2j-1})^{2(j-i)}$ *engendre* $2U_\varphi$, $\varphi=(-1)^i(l_i+(-1)^{j-i}l_j)$, $1\leq i<j\leq l$.

(iv) $E_j^{-2}E_i^{-2}(T_{2i}\cdot\cdots\cdot T_{2j})^{2(j-i)+2}$ *engendre* $2U_\varphi$, $\varphi=-(-1)^i(l_i+(-1)^{j-i}l_j)$, $1\leq i<j\leq l$.

On peut établir ce lemme par un calcul direct.

Nous allons expliquer ce que dit le lemme 2 pour les sous-groupes $G_{ij}\simeq \mathrm{Sp}_4(k)$ engendrés par l'union des sous-groupes U_φ, $\varphi\in\{\pm 2l_i, \pm l_i\pm l_j\}$ pour un couple d'indice (i,j); $1\leq i<j\leq l$.



On a quatre cas selon la parité des indices i et j. Lorsque i est impair et j est pair on a la situation du diagramme où les signes ○, ● et $*$ indiquent

○: une racine φ telle que $U_\varphi\subset\Gamma_\mu(k)$ (partie (ii) du lemme 2),
●: une racine φ telle que $2U_\varphi\subset\Gamma_\mu(k)$ (parties (i), (iii) et (iv)),
$*$: une racine φ telle que le lemme 2 ne dit rien sur $U_\varphi\cap\Gamma(k)$.

Pour les autres parités de i et j on a un diagramme qui se déduit du diagramme précédent par les rotations d'angle $\pi k/4$. $k=1,2,3$ autour de l'origine.

LEMME 3: *Pour toute racine* $\varphi\in C_l$ *on a* $2U_\varphi\subset\Gamma_\mu(k)$.

En effet, pour les racines due type ○ ou ●, c'est vrai d'après le lemme 2. Une racine φ de type $*$ peut s'écrire $\varphi=\alpha+\beta$ où α est de type ○ et β de type ●. Donc $2U_\varphi=[U_\alpha, 2U_\beta]\subset\Gamma_\mu(k)$.

Démonstration de la partie 1) du théorème 1.

Lorsque $1/2\in k$, on a $U_\varphi=2U_\varphi\subset\Gamma_\mu(k)$, $\varphi\in C_l$. D'ou $\Gamma_\mu(k)=\mathrm{Sp}(M_\mu(k))$ car l'union des sous-groupes radiciels U_φ engendre le groupe $\mathrm{Sp}(M_\mu(k))$.

§2. Démonstration de la partie (2) du théorème 1

Soit $\mathrm{Sp}^{(n)}(M_\mu(\mathbf{Z}))$ le noyau de l'homomorphisme de réduction modulo n

$$R_n : \mathrm{Sp}\,(M_\mu(\mathbf{Z})) \to \mathrm{Sp}\,(M_\mu(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})).$$

La proposition profonde numéro 4 de J. Tits [TI] montre que $\Gamma_\mu(\mathbf{Z}) \supset \mathrm{Sp}^{(4)}\,(M_\mu(k))$ car pour toute racine $\varphi \in C_l$ on a $2U_\varphi \subset \Gamma_\mu(\mathbf{Z})$. Donc pour connaître le sous-groupe $\Gamma(\mathbf{Z})$ dans $\mathrm{Sp}\,(M_\mu(\mathbf{Z}))$ il suffit d'étudier le sous-groupe $R_4(\Gamma(\mathbf{Z})) = \Gamma_\mu(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$ dans $\mathrm{Sp}\,(M_\mu(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}))$.

Soit $N \subset \mathrm{Sp}\,(M_\mu(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}))$ le noyau de l'homomorphisme de réduction modulo 2

$$\mathrm{Sp}\,(M_\mu(\mathbf{Z}/_{4\mathbf{Z}})) \to \mathrm{Sp}\,(M_\mu(\mathbf{F}_2)).$$

Alors on a le

LEMME 4. $N \subset \Gamma_\mu(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$.

On note pour $\varphi \in C_l$ par $U_\varphi(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$ le sous-groupe radiciel de la racine φ dans $\mathrm{Sp}\,(M_\mu(k))$. Soit $T \subset \mathrm{Sp}\,(M_\mu(k))$, le tore maximal correspondant à l'épinglage. Alors le noyau N est le produit direct de sous-groupe

$$N = T \times \prod_{\varphi \in C_l} 2U_\varphi(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}).$$

Le lemme 4 découle donc du lemme 3 et du lemme suivant:

LEMME 5. $T \subset \Gamma(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$.

On a l'inclusion du lemme 5, car les éléments $E_i^2 T_{2i} E_i^2 T_{2i} \in \Gamma(\mathbf{Z})$ engendrent après réduction modulo 4 le tore T.

La partie 2) du théorème 1 se déduit du lemme 4 et de l'inclusion $\mathrm{Sp}^{(4)}(M_\mu(\mathbf{Z})) \subset \Gamma_\mu(\mathbf{Z})$.

§3. Le sous-groupe $\Gamma_\mu(\mathbf{F}_2)$ dans $\mathrm{Sp}\,(M_\mu(\mathbf{F}_2))$ d'après [SE]

Considérons le $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel $H_1(X_b, \mathbf{F}_2)$ équipé de:

(1) la forme bilinéaire $I(\ ,\ )$ des intersections, qui est symétrique sur $\mathbf{F}_2$.

(2) la base $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\mu$ du chapitre 1.

Soit $q: H_1(X_b, \mathbf{F}_2) \to \mathbf{F}_2$ la forme quadratique déterminée par[1]

(i) $q(\delta_i) = 1$

(ii) $q(x+y) - q(x) - q(y) = I(x, y), \qquad x, y \in H_1(X_b, \mathbf{F}_2)$.

Alors J. P. Serre remarque dans sa lettre que les transformations $T_i \in \mathrm{Sp}\, H_1(X_b, \mathbf{F}_2)$ sont aussi dans le groupe orthogonal $O(q)$ de la forme q si $\mu = 2l$. Donc $\Gamma_\mu(\mathbf{F}_2) \neq \mathrm{Sp}\,(M_\mu(\mathbf{F}_2))$ dès que $O(q) \neq \mathrm{Sp}\,(M_a(k))$, μ pair. Plus précisement nous avons le

LEMME 6. *Le systéme* $(\Gamma_\mu(\mathbf{F}_2), T_1, \ldots, T_\mu)$ *est un système de Coxeter de type* A_μ *pour* $\mu \neq 3$ *et le quotient par le groupe de Klein du système* A_3 *pour* $\mu = 3$. *On a* $\Gamma_\mu(\mathbf{F}_2) \simeq S_{\mu+1}$, $\mu \neq 3$, *et* $\Gamma_3(\mathbf{F}_2) \simeq S_3$.

Preuve. On a les relations $(T_iT_j)^{m_{ij}} = 1$ de Coxeter dans $\Gamma_\mu(\mathbf{F}_2)$, donc $\Gamma_\mu(\mathbf{F}_2)$ est un quotient du groupe symétrique $S_{\mu+1}$. L'élément $T = T_1T_2 \cdot \cdots \cdot T_\mu$ permute cycliquement les μ éléments $\{T^i\delta_1\}_{i \geq 1}$ ce qui implique que $\Gamma_\mu(\mathbf{F}_2) \simeq S_{\mu+1}$ pour $\mu \neq 3$. L'anomalie $\Gamma_3(\mathbf{F}_2) \simeq S_3$ s'explique par l'homologie modulo K des cycles $p_1 \sim -\delta_3$. Donc $T_1 = T_3$ dans $\Gamma_3(\mathbf{F}_2)$, puis $\Gamma_3(\mathbf{F}_2)$ est un quotient de S_3 à au moins 3 éléments.

Le lemme 6 et la partie 2) du théoréme 1 entraînent le corollaire du theorème 1.

Pour le cas $\mu = 2$, $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\Gamma_2(\mathbf{Z}) = \mathrm{Sl}_2(\mathbf{Z}) = \mathrm{Sp}_2(\mathbf{Z})$. Pour le cas $\mu = 4$ on a montré que les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

engendrent un sous-groupe $\Gamma_4(\mathbf{Z})$ d'indice 6 dans $\mathrm{Sp}_4(\mathbf{Z})$. Par exemple on a

$$\chi(\Gamma_2(\mathbf{Z})) = \frac{-1}{12}, \qquad \chi(\Gamma_4(\mathbf{Z})) = 6 \cdot \chi(\mathrm{Sp}_4(\mathbf{Z})) = 6 \cdot \frac{-1}{1440} = -\frac{1}{240}\,[\mathrm{Ha}]$$

---

[1] Je remercie W. Browder de m'avoir expliqué sa définition géométrique de la forme q: soit $\kappa \in H_1(X_b, \mathbf{F}_2)$ et soit y une courbe simple sur X_b qui présente κ. Alsors le fibre tangent à $\mathbf{C}^2$ est trivialisé le long de $y \subset X_b \subset \mathbf{C}^2$ par le repère formé du vecteur tangent à y et du vecteur normal à X_b. On définit $q(\kappa) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ comme l'obstruction à étendre cette trivialisation au dessus d'un disque dans $\mathbf{C}^2$.

§4. Cycles quadratiques

On appelle *chemin d'évanescence* une partie γ de $\mathbf{C}^\mu$ homéomorphe à l'intervalle $[0, 1]$ telle que $\{b\} \cup (\gamma \cap \Delta)$ est la paire des extrémités de γ. On appelle *l'homologie évanescente* du chemin γ le noyau de l'homomorphisme

$$H_1(X_b, k) \to H_1(\pi^{-1}(\gamma), k)$$

induit par l'inclusion $X_b \subset \pi^{-1}(\gamma)$. On appelle cycle quadratique un élément $x \in H_1(X_b, k)$ tel que x engendre l'homologie évanescente d'un chemin ayant une extrémité dans la partie lisse du discriminant $\Delta \subset \mathbf{C}^\mu$. Le groupe de monodromie agit transitivement sur les cycles quadratiques car la partie lisse du discriminant Δ est connexe. Rappelons pour justifier le terme "Cycle quadratique" que la courbe X_t, où t est un point lisse du discriminant, possède seulement un point singulier qui est quadratique ordinaire.

En utilisant une confluence de Morse pour la singularité $\{x^{\mu+1} - y^2 = 0\}$ on peut trouver une base $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\mu$ de $H_1(X_b, \mathbf{Z})$ formée de cycles quadratiques telle que leur configuration sur X_b est une chaîne comme au chaptire 1. On fixe un tel système de cycles pour la courbe X_b.

On appelle un vecteur non nul $x \in H_1(X_b, \mathbf{F}_2)$ connexe (par rapport à la base $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\mu$) si dans l'écriture

$$x = a_1\delta_1 + \cdots + a_\mu\delta_\mu, \qquad a_i \in \mathbf{F}_2,$$

l'ensemble $\{i \mid a_i \neq 0\}$ est un intervalle de $\{1, 2, \ldots, \mu\}$.

Pour un vecteur non nul connexe x on a $q(x) = 1$, mais les vecteurs $x = \delta_1 + \delta_3 + \delta_5$ n'est pas connexe, bien que $q(x) = 1$.

THÉORÈME 2. *Soit $\mu = 2l \geq 2$. Alors un vecteur non nul $x \in H_1(X_b, \mathbf{Z})$ est un cycle quadratique si et seulement si*
(i) *x est indivisible,*
(ii) *$x \pmod 2$ est connexe.*

Preuve. Soit $x_{ij} = (\ldots 0, 1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots)$ un vecteur connexe. Alors $T_k(x_{ij}) = x_{ij}$ si, $k < i-1$ ou $k > j+1$ ou $i < k < j$,

$$\begin{aligned} T_k(x_{ij}) &= x_{i-j,j}, & k &= i-1 \geq 0, \\ &= x_{i+1,j}, & k &= i < j, \\ &= x_{ij-1}, & i &< j = k, \\ &= x_{i,j+1}, & k &= j+1 \leq \mu. \end{aligned}$$

Donc $\Gamma(\mathbf{F}_2)\ \delta_1$ est l'ensemble des vecteurs connexes de $H_1(X_b, \mathbf{F}_2)$. On termine la preuve en utilisant que $\Gamma(\mathbf{Z}) \supset \mathrm{Sp}_{2l}^{(2)}(\mathbf{Z})$ et l'action transitive de $\mathrm{Sp}_{2l}^{(2)}(\mathbf{Z})$ sur $\{y \mid y$ est indivisible et $y = x(\mathrm{mod}\ 2)\}$ pour tout vecteur indivisible $x \in H_1(X_b, \mathbf{Z})$.

Pour le cas où $\mu = 2l+1$ nous avons le

THÉORÈME 3. *Soit $\mu = 2l+1$. Alors un vecteur $x \in H_1(X_b, \mathbf{Z})$ est un cycle quadratique modulo le noyau K de la forme $I(\ ,\ )$, si et seulement, si*
(i) *x est indivisible,*
(ii) *$x(\mathrm{mod}\ 2)$ est connexe.*

Remarque. E. Looijenga a une démonstration des théorèmes 2 et 3 de nature combinatoire qui n'utilise pas le théorème de J. Tits.

§5. Les autres singularités simples

Les chapitres 1, 2, 3 et 4 ne concernent que les singularités de la série A_μ. Pour les singularités simples S des séries D_μ, E_6, E_7, E_8 on a:

(1) L'analogue de théorème 1. Donc $\Gamma_S(\mathbf{Z}) \supset \mathrm{Sp}^{(2)}(M_S(\mathbf{Z}))$ et $\Gamma_S(\mathbf{F}_2)$ est un quotient du système de Coxeter S, $S = D_\mu$, E_6, E_7 et E_8. On a

$$I_{D_\mu} = \text{indice}\,[\mathrm{Sp}(M_{D_\mu}(\mathbf{Z})) : \Gamma_{D_\mu}(\mathbf{Z})] =$$
$$= \text{indice}\,[\mathrm{Sp}(M_{A_{\mu-1}}(\mathbf{Z})) : \Gamma_{A_{\mu-1}}(\mathbf{Z})].$$
$$I_{E_6} = 28, \qquad I_{E_7} = 1, \qquad I_{E_8} = 34.$$

(Voir les exercices numéros 1, 2 et 3, chaptire 4, Ch VI de Bourbaki [BO]).

(2) On peut formuler les théorèmes analogues au théorèmes 2 et 3. (I1 faut changer la définition d'un vecteur connexe).

Les singularités simples sont les seules singularités d'hypersurface pour lesquelles le diagramme de Dynkin des intersections est un arbre [AC], et cela est intervenu dans nos démonstrations. D'où les questions:

A-t-on pour les autres singularités S de courbes planes l'inclusion $\mathrm{Sp}^{(N)}(M_S(\mathbf{Z})) \subset \Gamma_S(\mathbf{Z})$? Avec $N = 2$?

— Quels sont les cycles quadratiques dans $H_1(X_b, \mathbf{Z})$?

BIBLIOGRAPHIE

[AC] N. A'Campo, *Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes I*, Math. Ann. *213*, (1975) 1–32.
N. A'Campo, *Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes II*, Actes du Congrés de Vancouver (1974).

[AR] V. I. ARNOL'D, *Remark on the branching of hyperelliptic integrals as functions of the parameters*, Func. Analiz. *2* (1968) 187–189.

[BR] E. BRIESKORN, *Seminaire N. Bourbaki Novembre 1971, Sur les groupes de tresses (d'après V. I. Arnol'd) exposé numéro 401.*

[BO] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4, 5, 6, 7, 8.* Hermann, Paris, (1968).

[FO-NE] R. H. FOX-L. NEUWIRTH, *The Braid Groups*, Math. Scand., *10* (1962) p. 119–126.

[Ha] G. HARDER, *A Gauss–Bonnet formula for discrete arithemetically defined groups*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4e série *4* (1971) 409 à 455.

[LA] K. LAMOTKE, Die Homologie isolierter singularitäten, Math. Z.

[SE] J. P. SERRE, Lettre à E. Brieskorn, Décembre 1971.

[TI] J. TITS, *Systèmes générateurs de groupes de congruence*, C.R. Acad. Sc. Paris t *283* (18 Octobre 1976).

[VA] A. N. VARCHENKO, *On the bifurcation of multiple integrals depending on a parameter*, Funct. Analiz. *3* (1969) 322–324.

Institut des Hautes Etudes
Scientifiques
35, route de Chartres
91440-BURES S/ YVETTE (France)

Reçu le 30 mars 1978