Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 54 (1979)

Artikel: Konvexe Polytope mit kongruenten regulären (n-1)- Seiten im Rn (n...4).

Autor: Blind, R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41577

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici **54** (1979) 304–308 Birkhäuser Verlag, Basel

Konvexe Polytope mit kongruenten regulären $(n-1)$-Seiten im $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 4)$

R. Blind

1. Eine vollständige Aufzählung der konvexen Polyeder mit regulären und zueinander kongruenten Seiten wurde in [3] und in [4] gegeben; in [7] wurden dann allgemeiner alle konvexen Polyeder mit regulären Seiten bestimmt. Auf die analoge Fragestellung in höheren Dimensionen wird in [5, S.414] hingewiesen.

Eine Aufzählung aller konvexen n-Polytope mit kongruenten regulären $(n-1)$-Seiten (= "**Deckseiten**") im $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 5)$ ist für ein in [1] behandeltes lagerungsgeometrisches Problem von Interesse. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß es im $\mathbf{R}^n$ für $n \geqslant 5$ außer den regulären konvexen Polytopen und der als Vereinigung von 2 regulären Simplizes darstellbaren Bipyramide keine weiteren solchen Polytope gibt, und daß im $\mathbf{R}^4$ solche Polytope entweder regulär sind oder von Tetraedern begrenzt werden.

2. HILFSSATZ 1. *Es sei P ein konvexes n-Polytop $(n \geqslant 4)$ mit kongruenten regulären Deckseiten und K sei eine $(n-3)$-Seite von P. Dann ist K in i Deckseiten von P enthalten, wobei nur die folgenden Deckseiten und Werte von i möglich sind:*

$n=4$:	*Tetraeder*, $3 \leqslant i \leqslant 5$	$n \geqslant 5$:	*reg.* $(n-1)$-*Simplex*, $3 \leqslant i \leqslant 4$
	Oktaeder, $i=3$		$(n-1)$-*Maßpolytop*, $i=3$
	Kubus, $i=3$		
	Dodekaeder, $i=3$		

Beweis. Es seien P_j $(j=1,\ldots,i)$ die Deckseiten von P, die K enthalten. Weil jede Seite von P Durchschnitt der sie enthaltenden Deckseiten ist, ist $i \geqslant 3$. Andererseits gilt für den Innenwinkel α_j von P_j bei seiner $(n-3)$-Seite K nach [6] die Beziehung $\sum_{j=1}^{i} \alpha_j < 2\pi$. Durch Einsetzen der entsprechenden Werte für α_j (siehe z.B. [2]) folgt die Behauptung.

HILFSSATZ 2. *Wenn $\mathfrak{D}$ eine echte Teilmenge der Deckseitenmenge eines n-Polytops P ist so, daß jede Deckseite aus $\mathfrak{D}$ mit mindestens einer anderen Deckseite aus $\mathfrak{D}$ eine $(n-2)$-Seite gemeinsam hat, so gibt es eine $(n-3)$-Seite von P, die in 2 Deckseiten aus $\mathfrak{D}$ enthalten ist und in einer Deckseite nicht aus $\mathfrak{D}$.*

Beweis. Diese Behauptung folgt direkt aus der Tatsache, daß der Graph, dessen Knoten die Deckseiten von P sind und bei dem 2 Knoten genau dann

durch eine Kante verbunden werden, wenn ihr Durchschnitt $(n-2)$-dimensional ist, zusammenhängend ist.

3. Im $\mathbf{R}^4$ gilt:

SATZ 1. *Es sei P ein konvexes 4-Polytop mit kongruenten regulären Deckseiten. Dann ist P regulär, oder die Deckseiten von P sind Tetraeder.*

Beweis: Wenn die Deckseiten von P keine Tetraeder sind, so sind sie nach Hilfssatz 1 Oktaeder, Kubusse, oder Dodekaeder, und jede 1-Seite von P ist in genau 3 Deckseiten von P enthalten. Nach Hilfssatz 2 folgt daraus die Behauptung.

Bemerkung. Es gibt konvexe 4-Polytope mit Tetraedern als Deckseiten, die weder regulär noch eine als Vereinigung von 2 regulären Simplizes darstellbare Bipyramide sind: Die Bipyramide P mit dem Ikosaeder als Basis so, daß alle 1-Seiten von P gleich lang sind, ist ein solches 4-Polytop.

4. Im $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 5)$ gilt im Fall von regulären $(n-1)$-Simplizes als Deckseiten:

SATZ 2. *Es sei P ein konvexes n-Polytop $(n \geqslant 5)$ mit regulären $(n-1)$-Simplizes als Deckseiten. Dann ist P ein reguläres Simplex, eine als Vereinigung von 2 regulären Simplizes darstellbare Bipyramide, oder ein reguläres Kreuzpolytop.*

Beweis. Es sei $\mathscr{B}(P)$ der Randkomplex von P, K eine $(n-3)$-Seite von P, $\operatorname{st}(K, \mathscr{B}(P))$ der Stern von K in $\mathscr{B}(P)$, und $\operatorname{link}(K, \mathscr{B}(P))$ der Komplex aus allen zu K fremden Polytopen von $\operatorname{st}(K, \mathscr{B}(P))$. Nach Hilfssatz 1 ist K in 3 oder 4 Deckseiten von P enthalten.

Weil alle Elemente von $\mathscr{B}(P)$ Simplizes sind, bestimmt jedes Element von $\operatorname{link}(K, \mathscr{B}(P))$ eindeutig eine K echt enthaltende Seite von P; die dadurch definierte Abbildung ist eineindeutig und inklusionserhaltend.

Es sei $K^\perp$ der euklidische Raum, der orthogonal ist zu K und den Schwerpunkt von K enthält. Dann sind die $K \cap K^\perp$ enthaltenden 2-Seiten von $P \cap K^\perp$ genau die Durchschnitte von $K^\perp$ mit den K enthaltenden Deckseiten von P. Weil die Elemente von $\operatorname{link}(K, \mathscr{B}(P))$ in $K^\perp$ liegen, sind die $K \cap K^\perp$ enthaltenden 2-Seiten von $P \cap K^\perp$ also genau die konvexen Hüllen von $K \cap K^\perp$ und den 1-Seiten aus $\operatorname{link}(K, \mathscr{B}(P))$. Analoges gilt für die $K \cap K^\perp$ enthaltenden 1-Seiten von $P \cap K^\perp$. Deshalb ist $\operatorname{link}(K \cap K^\perp, \mathscr{B}(P \cap K^\perp)) = \operatorname{link}(K, \mathscr{B}(P))$.

Im Fall, daß K in 3 Deckseiten von P enthalten ist, ist $K \cap K^\perp$ in 3 2-Seiten von $P \cap K^\perp$ enthalten, so daß $\operatorname{link}(K, \mathscr{B}(P))$ gleich dem Randkomplex eines Dreiecks ist; und im Fall, daß K in 4 Deckseiten enthalten ist, ist $\operatorname{link}(K, \mathscr{B}(P))$

kombinatorisch äquivalent zum Randkomplex eines 4-Ecks. Dabei sind in jedem Fall alle 1-Seiten von link $(K, \mathcal{B}(P))$ gleich lang.

Wenn K in genau 3 Deckseiten enthalten ist, so hat jetzt st $(K, \mathcal{B}(P))$ genau $n+1$ Ecken. Je 2 davon liegen in 1 Deckseitensimplex durch K, so daß die Ecken von st $(K, \mathcal{B}(P))$ paarweise denselben Abstand voneinander haben.

Aus den bisherigen Überlegungen ergeben sich unmittelbar die Teile a) und b) von

HILFSSATZ 3.

a) Wenn die $(n-3)$-Seite K in genau 3 Deckseiten von P enthalten ist, so ist die Eckenmenge von st $(K, \mathcal{B}(P))$ *die Eckenmenge eines regulären n-Simplex S, wobei 3 Deckseiten von S auch Deckseiten von P sind.*

b) Wenn die $(n-3)$-Seite K in genau 4 Deckseiten von P enthalten ist, so ist link $(K, \mathcal{B}(P))$ *kombinatorisch äquivalent zum Randkomplex eines ebenen 4-Ecks. Die Verbindungsstrecken gegenüberliegender Ecken von* link $(K, \mathcal{B}(P))$ *sind zueinander orthogonal und orthogonal zur Verbindungsgeraden ihrer Mittelpunkte (falls diese verschieden sind).*

c) Es sei P' wie P ein konvexes n-Polytop mit reg. $(n-1)$-Simplizes als Deckseiten, und K sei gemeinsame $(n-3)$-Seite von P und P'. Wenn dann K in 4 Deckseiten von P' enthalten ist, und wenn $P' \subset P$ gilt, so ist link $(K, \mathcal{B}(P')) =$ link $(K, \mathcal{B}(P))$.

Der Beweis des Teils c) von Hilfssatz 3 ergibt sich durch Übergang zu den Polytopen $P \cap K^{\perp}$ und $P' \cap K^{\perp}$, deren $K \cap K^{\perp}$ enthaltende 2-Seiten alle kongruente gleichschenklige Dreiecke sind.

Zum weiteren Beweis von Satz 2 wird eine Fallunterscheidung durchgeführt.

Fall 1. Es gibt eine $(n-3)$-Seite von P, die in genau 3 Deckseiten von P enthalten ist.

Nach Hilfssatz 3a ist dann die Eckenmenge von P Obermenge der Eckenmenge eines regulären n-Simplex S, wobei eine Deckseite P_1 von S auch Deckseite von P ist.

Für $P = S$ ist Satz 2 bewiesen, im folgenden wird deshalb $P \neq S$ angenommen. Dann gibt es eine Deckseite P_2 von P, die nicht Deckseite von S ist. Mit Hilfe der zum Beweis von Hilfssatz 2 verwendeten Tatsache sieht man, daß o.B.d.A. $P_1 \cap P_2$ eine $(n-2)$-Seite von P ist. Es sei p die zu P_1 fremde Ecke von S. Weil nach Hilfssatz 3a 3 Deckseiten von S auch Deckseiten von P sind, gibt es eine gemeinsame Deckseite von P und S durch p; diese schneidet $P_1 \cap P_2$ in einer $(n-3)$-Seite K_0, und conv $(K_0 \cup \{p\})$ ist gemeinsame $(n-2)$-Seite von S und P.

Gäbe es außer P_1 und P_2 nur noch 1 weitere K_0 enthaltende Deckseite von P, so wäre nach Hilfssatz 3a die Eckenmenge von st $(K_0, \mathcal{B}(P))$ die Eckenmenge

eines reg. n-Simplex S'; S' hätte wie S die Deckseite P_1 von P als Deckseite, und würde daher auf derselben Seite von P_1 liegen wie S, also mit S zusammenfallen; dann wäre aber P_2 eine Deckseite von S im Widerspruch zur Voraussetzung über P_2. Also gibt es genau 4 Deckseiten von P, die K_0 enthalten.

Nach Hilfssatz 3b ist somit link $(K_0, \mathcal{B}(P))$ kombinatorisch äquivalent zum Randkomplex eines 4-Ecks. Ist $P_1^{(1)}$ bzw. $P_2^{(1)}$ die zu K_0 fremde 1-Seite von P_1 bzw. P_2, so gilt $P_1^{(1)}, P_2^{(1)} \in \text{link}\,(K_0, \mathcal{B}(P))$. Weil conv $(K_0 \cup \{p\})$ $(n-2)$-Seite von P ist, gilt $p \in \text{link}\,(K_0, \mathcal{B}(P))$. Weil nach Definition $p \notin P_1, P_2$, ist link $(K_0, \mathcal{B}(P))$ durch $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}$ und p eindeutig bestimmt.

p und $P_1^{(1)}$ bestimmen den Komplex link $(K_0, \mathcal{B}(S))$, den Randkomplex eines gleichseitigen Dreiecks; deshalb bestimmen auch $P_2^{(1)}$ und p den Randkomplex eines gleichseitigen Dreiecks, das eine 1-Seite mit link $(K_0, \mathcal{B}(S))$ gemeinsam hat. Deshalb ist die Eckenmenge von st $(K_0, \mathcal{B}(P))$ die Eckenmenge einer als Vereinigung von 2 regulären n-Simplizes darstellbaren Bipyramide B. Die Eckenmenge von P ist also Obermenge der Eckenmenge von B, wobei mindestens eine Deckseite P_3 von B auch Deckseite von P ist.

Für $P = B$ ist Satz 2 bewiesen, im folgenden wird deshalb $P \neq B$ angenommen. Dann gibt es eine Deckseite P_4 von P, die nicht Deckseite von B ist. Mit Hilfe der zum Beweis von Hilfssatz 2 verwendeten Tatsache sieht man, daß o.B.d.A. $P_3 \cap P_4$ eine $(n-2)$-Seite von P ist, und auch von B. Nun liegen die $(n-2)$-Seiten von B entweder ganz in der Symmetriehyperebene von B oder haben mit dieser eine $(n-3)$-Seite gemeinsam. $P_3 \cap P_4$ enthält also eine $(n-3)$-Seite K_{00}, die ganz in der Symmetriehyperebene von $\mathcal{B}$ liegt. Dann gibt es genau 4 Deckseiten von B durch K_{00}. K_{00} ist auch Seite von P. Aus Hilfssatz 3c folgt link $(K_{00}, \mathcal{B}(P)) =$ link $(K_{00}, \mathcal{B}(B))$ im Widerspruch dazu, daß P_4 eine Deckseite von P durch K_{00} war, die nicht Deckseite von B war. Damit ist im 1. Fall $P = S$ oder $P = B$.

Fall 2. Alle $(n-3)$-Seiten von P sind in 4 Deckseiten von P enthalten.

Es sei D_0 eine Deckseite von P. Dann gibt es genau n Deckseiten D_i $(i = 1, \ldots, n)$ von P, deren Durchschnitt mit D_0 eine $(n-2)$-Seite ist; $V_i^{(1)}$ sei die Verbindungsstrecke der zu $D_0 \cap D_i$ fremden Ecken von D_0 und D_i. Der Durchschnitt von D_0, D_j und D_k $(j \neq k,\ 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq n)$ ist eine $(n-3)$-Seite K_{jk}, und nach Voraussetzung dieses Falls ist link $(K_{jk}, \mathcal{B}(P))$ kombinatorisch äquivalent zum Randkomplex eines 4-Ecks.

$V_j^{(1)}$ und $V_k^{(1)}$ $(j \neq k,\ 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq n)$ sind die Verbindungsstrecken gegenüberliegender Ecken von link $(K_{jk}, \mathcal{B}(P))$. Deshalb hat die Menge $\{V_i^{(1)} \mid 1 \leq i \leq n\}$ nach Hilfssatz 3b die folgende Eigenschaft: Die Strecken $V_i^{(1)}$ haben paarweise orthogonale Richtungen, die orthogonal sind zur Verbindungsgeraden ihrer Mittelpunkte (falls diese verschieden sind). Die Richtungen der $V_i^{(1)}$ bestimmen daher ein orthogonales n-Bein. Es sei A der von den Mittelpunkten der $V_i^{(1)}$

aufgespannte affine Raum und i_0 ein fester Index mit $1 \leqslant i_0 \leqslant n$, dann wird A auch aufgespannt von den Verbindungsgeraden des Mittelpunkts von $V_{i_0}^{(1)}$ mit den dazu ver schiedenen Mittelpunkten der $V_i^{(1)}$; $V_{i_0}^{(1)}$ ist orthogonal zu jeder dieser Verbindungsgeraden, also orthogonal zu A. Folglich ist das von den Richtungen der $V_i^{(1)}$ bestimmte orthogonale n-Bein orthogonal zu A, so daß A die Dimension O hat, d.h.: Alle Strecken $V_i^{(1)}$ schneiden sich in einem Punkt. Weil außerdem alle 1-Seiten von link $(K_{jk}, \mathcal{B}(P))$ gleich lang sind, sind alle Strecken $V_i^{(1)}$ gleich lang.

Damit sind die $2n$ Ecken aller Strecken $V_i^{(1)}$ die Ecken eines regulären n-Kreuzpolytops X. Weil die Ecken der Strecken $V_i^{(1)}$ auch Ecken von P waren, ist die Eckenmenge von P Obermenge der Eckenmenge des regulären Kreuzpolytops X. Außerdem ist $P_1 := D_0$ gemeinsame Deckseite von X und P.

Für $P = X$ ist Satz 2 bewiesen, im folgenden wird deshalb $P \neq X$ angenommen. Dann gibt es eine Deckseite P_2 von P, die nicht Deckseite von X ist. O.B.d.A. ist wieder $P_1 \cap P_2$ eine $(n-2)$-Seite von P und auch von X. K_0 sei eine $(n-3)$-Seite von $P_1 \cap P_2$. Dann gibt es genau 4 Deckseiten von X durch K_0. K_0 ist auch Seite von P. Aus Hilfssatz 3c folgt link $(K_0, \mathcal{B}(P)) =$ link $(K_0, \mathcal{B}(X))$ im Widerspruch dazu, daß P_2 eine Deckseite von P durch K_0 war, die nicht Deckseite von X war. Damit ist im 2. Fall $P = X$.

5. *Im* $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqslant 5)$ gilt im Fall von $(n-1)$-Maßpolytopen als Deckseiten:

SATZ 3. *Es sei P ein konvexes n-Polytop $(n \geqslant 5)$ mit $(n-1)$-Maßpolytopen als Deckseiten. Dann ist P ein n-Maßpolytop.*

Beweis. Dies folgt direkt aus den Hilfssätzen 1 und 2.

LITERATUR

[1] BLIND, G. und BLIND, R., Zugänglichkeit von Kugelpackungen im $\mathbf{R}^n$, Archiv der Mathematik *30* (1978), 438–439.
[2] COXETER, H. S. M., *Regular Polytopes*, New York, 1973.
[3] FREUDENTHAL, H. und VAN DER WAERDEN, B. L., *Over een bewering van Euclides*, Simon Stevin wis. natuurk. Tijdschr. *25* (1947), 115–121.
[4] GALAFASSI, V. E., *I poliedri convessi con facce regolari eguali*, Archimede *12* (4), (1960), 169–177.
[5] GRÜNBAUM, B., *Convex Polytopes*, London-New York-Sydney, 1967.
[6] SHEPHARD, G. C., *Angle deficiencies of convex polytopes*, J. London Math. Soc. *43* (1968), 325–336.
[7] ZALGALLER, V. A., *Convex polyhedra with regular faces*, Seminars in Mathematics, V. A. Steklov Mathematical Institute, Leningrad, Vol. 2.; Consultants Bureau, New York 1969.

R. Blind
Math. Institut B
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57
D7 Stuttgart 80

Eingegangen den 30. Mai 1978