Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 54 (1979)

Artikel: Konvexe Polytope mit kongruenten regulären (n-1)- Seiten im Rn (n...4).

Autor: Blind, R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41577

Comment. Math. Helvetici **54** (1979) 304–308 Birkhäuser Verlag, Basel

Konvexe Polytope mit kongruenten regulären $(n-1)$-Seiten im $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 4)$

R. Blind

1. Eine vollständige Aufzählung der konvexen Polyeder mit regulären und zueinander kongruenten Seiten wurde in [3] und in [4] gegeben; in [7] wurden dann allgemeiner alle konvexen Polyeder mit regulären Seiten bestimmt. Auf die analoge Fragestellung in höheren Dimensionen wird in [5, S.414] hingewiesen.

Eine Aufzählung aller konvexen n-Polytope mit kongruenten regulären $(n-1)$-Seiten (= "**Deckseiten**") im $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 5)$ ist für ein in [1] behandeltes lagerungsgeometrisches Problem von Interesse. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß es im $\mathbf{R}^n$ für $n \geqslant 5$ außer den regulären konvexen Polytopen und der als Vereinigung von 2 regulären Simplizes darstellbaren Bipyramide keine weiteren solchen Polytope gibt, und daß im $\mathbf{R}^4$ solche Polytope entweder regulär sind oder von Tetraedern begrenzt werden.

2. HILFSSATZ 1. *Es sei P ein konvexes n-Polytop $(n \geqslant 4)$ mit kongruenten regulären Deckseiten und K sei eine $(n-3)$-Seite von P. Dann ist K in i Deckseiten von P enthalten, wobei nur die folgenden Deckseiten und Werte von i möglich sind:*

$n=4$:	*Tetraeder*, $3 \leqslant i \leqslant 5$	$n \geqslant 5$:	*reg.* $(n-1)$-*Simplex*, $3 \leqslant i \leqslant 4$
	Oktaeder, $i=3$		$(n-1)$-*Maßpolytop*, $i=3$
	Kubus, $i=3$		
	Dodekaeder, $i=3$		

Beweis. Es seien P_j $(j=1,\ldots,i)$ die Deckseiten von P, die K enthalten. Weil jede Seite von P Durchschnitt der sie enthaltenden Deckseiten ist, ist $i \geqslant 3$. Andererseits gilt für den Innenwinkel α_j von P_j bei seiner $(n-3)$-Seite K nach [6] die Beziehung $\sum_{j=1}^{i} \alpha_j < 2\pi$. Durch Einsetzen der entsprechenden Werte für α_j (siehe z.B. [2]) folgt die Behauptung.

HILFSSATZ 2. *Wenn $\mathfrak{D}$ eine echte Teilmenge der Deckseitenmenge eines n-Polytops P ist so, daß jede Deckseite aus $\mathfrak{D}$ mit mindestens einer anderen Deckseite aus $\mathfrak{D}$ eine $(n-2)$-Seite gemeinsam hat, so gibt es eine $(n-3)$-Seite von P, die in 2 Deckseiten aus $\mathfrak{D}$ enthalten ist und in einer Deckseite nicht aus $\mathfrak{D}$.*

Beweis. Diese Behauptung folgt direkt aus der Tatsache, daß der Graph, dessen Knoten die Deckseiten von P sind und bei dem 2 Knoten genau dann durch eine Kante verbunden werden, wenn ihr Durchschnitt $(n-2)$-dimensional ist, zusammenhängend ist.

3. Im $\mathbf{R}^4$ gilt:

SATZ 1. *Es sei P ein konvexes 4-Polytop mit kongruenten regulären Deckseiten. Dann ist P regulär, oder die Deckseiten von P sind Tetraeder.*

Beweis: Wenn die Deckseiten von P keine Tetraeder sind, so sind sie nach Hilfssatz 1 Oktaeder, Kubusse, oder Dodekaeder, und jede 1-Seite von P ist in genau 3 Deckseiten von P enthalten. Nach Hilfssatz 2 folgt daraus die Behauptung.

Bemerkung. Es gibt konvexe 4-Polytope mit Tetraedern als Deckseiten, die weder regulär noch eine als Vereinigung von 2 regulären Simplizes darstellbare Bipyramide sind: Die Bipyramide P mit dem Ikosaeder als Basis so, daß alle 1-Seiten von P gleich lang sind, ist ein solches 4-Polytop.

4. Im $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 5)$ gilt im Fall von regulären $(n-1)$-Simplizes als Deckseiten:

SATZ 2. *Es sei P ein konvexes n-Polytop $(n \geq 5)$ mit regulären $(n-1)$-Simplizes als Deckseiten. Dann ist P ein reguläres Simplex, eine als Vereinigung von 2 regulären Simplizes darstellbare Bipyramide, oder ein reguläres Kreuzpolytop.*

Beweis. Es sei $\mathscr{B}(P)$ der Randkomplex von P, K eine $(n-3)$-Seite von P, $\operatorname{st}(K, \mathscr{B}(P))$ der Stern von K in $\mathscr{B}(P)$, und $\operatorname{link}(K, \mathscr{B}(P))$ der Komplex aus allen zu K fremden Polytopen von $\operatorname{st}(K, \mathscr{B}(P))$. Nach Hilfssatz 1 ist K in 3 oder 4 Deckseiten von P enthalten.

Weil alle Elemente von $\mathscr{B}(P)$ Simplizes sind, bestimmt jedes Element von $\operatorname{link}(K, \mathscr{B}(P))$ eindeutig eine K echt enthaltende Seite von P; die dadurch definierte Abbildung ist eineindeutig und inklusionserhaltend.

Es sei $K^\perp$ der euklidische Raum, der orthogonal ist zu K und den Schwerpunkt von K enthält. Dann sind die $K \cap K^\perp$ enthaltenden 2-Seiten von $P \cap K^\perp$ genau die Durchschnitte von $K^\perp$ mit den K enthaltenden Deckseiten von P. Weil die Elemente von $\operatorname{link}(K, \mathscr{B}(P))$ in $K^\perp$ liegen, sind die $K \cap K^\perp$ enthaltenden 2-Seiten von $P \cap K^\perp$ also genau die konvexen Hüllen von $K \cap K^\perp$ und den 1-Seiten aus $\operatorname{link}(K, \mathscr{B}(P))$. Analoges gilt für die $K \cap K^\perp$ enthaltenden 1-Seiten von $P \cap K^\perp$. Deshalb ist $\operatorname{link}(K \cap K^\perp, \mathscr{B}(P \cap K^\perp)) = \operatorname{link}(K, \mathscr{B}(P))$.

Im Fall, daß K in 3 Deckseiten von P enthalten ist, ist $K \cap K^\perp$ in 3 2-Seiten von $P \cap K^\perp$ enthalten, so daß $\operatorname{link}(K, \mathscr{B}(P))$ gleich dem Randkomplex eines Dreiecks ist; und im Fall, daß K in 4 Deckseiten enthalten ist, ist $\operatorname{link}(K, \mathscr{B}(P))$

kombinatorisch äquivalent zum Randkomplex eines 4-Ecks. Dabei sind in jedem Fall alle 1-Seiten von link $(K, \mathscr{B}(P))$ gleich lang.

Wenn K in genau 3 Deckseiten enthalten ist, so hat jetzt st $(K, \mathscr{B}(P))$ genau $n+1$ Ecken. Je 2 davon liegen in 1 Deckseitensimplex durch K, so daß die Ecken von st $(K, \mathscr{B}(P))$ paarweise denselben Abstand voneinander haben.

Aus den bisherigen Überlegungen ergeben sich unmittelbar die Teile a) und b) von

HILFSSATZ 3.

a) Wenn die $(n-3)$-Seite K in genau 3 Deckseiten von P enthalten ist, so ist die Eckenmenge von st $(K, \mathscr{B}(P))$ *die Eckenmenge eines regulären n-Simplex S, wobei 3 Deckseiten von S auch Deckseiten von P sind.*

b) Wenn die $(n-3)$-Seite K in genau 4 Deckseiten von P enthalten ist, so ist link $(K, \mathscr{B}(P))$ *kombinatorisch äquivalent zum Randkomplex eines ebenen 4-Ecks. Die Verbindungsstrecken gegenüberliegender Ecken von* link $(K, \mathscr{B}(P))$ *sind zueinander orthogonal und orthogonal zur Verbindungsgeraden ihrer Mittelpunkte (falls diese verschieden sind).*

c) Es sei P' wie P ein konvexes n-Polytop mit reg. $(n-1)$-Simplizes als Deckseiten, und K sei gemeinsame $(n-3)$-Seite von P und P'. Wenn dann K in 4 Deckseiten von P' enthalten ist, und wenn $P' \subset P$ gilt, so ist link $(K, \mathscr{B}(P')) =$ link $(K, \mathscr{B}(P))$.

Der Beweis des Teils c) von Hilfssatz 3 ergibt sich durch Übergang zu den Polytopen $P \cap K^{\perp}$ und $P' \cap K^{\perp}$, deren $K \cap K^{\perp}$ enthaltende 2-Seiten alle kongruente gleichschenklige Dreiecke sind.

Zum weiteren Beweis von Satz 2 wird eine Fallunterscheidung durchgeführt.

Fall 1. Es gibt eine $(n-3)$-Seite von P, die in genau 3 Deckseiten von P enthalten ist.

Nach Hilfssatz 3a ist dann die Eckenmenge von P Obermenge der Eckenmenge eines regulären n-Simplex S, wobei eine Deckseite P_1 von S auch Deckseite von P ist.

Für $P = S$ ist Satz 2 bewiesen, im folgenden wird deshalb $P \neq S$ angenommen. Dann gibt es eine Deckseite P_2 von P, die nicht Deckseite von S ist. Mit Hilfe der zum Beweis von Hilfssatz 2 verwendeten Tatsache sieht man, daß o.B.d.A. $P_1 \cap P_2$ eine $(n-2)$-Seite von P ist. Es sei p die zu P_1 fremde Ecke von S. Weil nach Hilfssatz 3a 3 Deckseiten von S auch Deckseiten von P sind, gibt es eine gemeinsame Deckseite von P und S durch p; diese schneidet $P_1 \cap P_2$ in einer $(n-3)$-Seite K_0, und conv $(K_0 \cup \{p\})$ ist gemeinsame $(n-2)$-Seite von S und P.

Gäbe es außer P_1 und P_2 nur noch 1 weitere K_0 enthaltende Deckseite von P, so wäre nach Hilfssatz 3a die Eckenmenge von st $(K_0, \mathscr{B}(P))$ die Eckenmenge eines reg. n-Simplex S'; S' hätte wie S die Deckseite P_1 von P als Deckseite, und würde daher auf derselben Seite von P_1 liegen wie S, also mit S zusammenfallen; dann wäre aber P_2 eine Deckseite von S im Widerspruch zur Voraussetzung über P_2. Also gibt es genau 4 Deckseiten von P, die K_0 enthalten.

Nach Hilfssatz 3b ist somit link $(K_0, \mathscr{B}(P))$ kombinatorisch äquivalent zum Randkomplex eines 4-Ecks. Ist $P_1^{(1)}$ bzw. $P_2^{(1)}$ die zu K_0 fremde 1-Seite von P_1 bzw. P_2, so gilt $P_1^{(1)}, P_2^{(1)} \in \operatorname{link}(K_0, \mathscr{B}(P))$. Weil $\operatorname{conv}(K_0 \cup \{p\})$ $(n-2)$-Seite von P ist, gilt $p \in \operatorname{link}(K_0, \mathscr{B}(P))$. Weil nach Definition $p \notin P_1, P_2$, ist link $(K_0, \mathscr{B}(P))$ durch $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}$ und p eindeutig bestimmt.

p und $P_1^{(1)}$ bestimmen den Komplex $\operatorname{link}(K_0, \mathscr{B}(S))$, den Randkomplex eines gleichseitigen Dreiecks; deshalb bestimmen auch $P_2^{(1)}$ und p den Randkomplex eines gleichseitigen Dreiecks, das eine 1-Seite mit $\operatorname{link}(K_0, \mathscr{B}(S))$ gemeinsam hat. Deshalb ist die Eckenmenge von $\operatorname{st}(K_0, \mathscr{B}(P))$ die Eckenmenge einer als Vereinigung von 2 regulären n-Simplizes darstellbaren Bipyramide B. Die Eckenmenge von P ist also Obermenge der Eckenmenge von B, wobei mindestens eine Deckseite P_3 von B auch Deckseite von P ist.

Für $P = B$ ist Satz 2 bewiesen, im folgenden wird deshalb $P \neq B$ angenommen. Dann gibt es eine Deckseite P_4 von P, die nicht Deckseite von B ist. Mit Hilfe der zum Beweis von Hilfssatz 2 verwendeten Tatsache sieht man, daß o.B.d.A. $P_3 \cap P_4$ eine $(n-2)$-Seite von P ist, und auch von B. Nun liegen die $(n-2)$-Seiten von B entweder ganz in der Symmetriehyperebene von B oder haben mit dieser eine $(n-3)$-Seite gemeinsam. $P_3 \cap P_4$ enthält also eine $(n-3)$-Seite K_{00}, die ganz in der Symmetriehyperebene von $\mathscr{B}$ liegt. Dann gibt es genau 4 Deckseiten von B durch K_{00}. K_{00} ist auch Seite von P. Aus Hilfssatz 3c folgt $\operatorname{link}(K_{00}, \mathscr{B}(P)) = \operatorname{link}(K_{00}, \mathscr{B}(B))$ im Widerspruch dazu, daß P_4 eine Deckseite von P durch K_{00} war, die nicht Deckseite von B war. Damit ist im 1. Fall $P = S$ oder $P = B$.

Fall 2. Alle $(n-3)$-Seiten von P sind in 4 Deckseiten von P enthalten.

Es sei D_0 eine Deckseite von P. Dann gibt es genau n Deckseiten D_i $(i = 1, \dots, n)$ von P, deren Durchschnitt mit D_0 eine $(n-2)$-Seite ist; $V_i^{(1)}$ sei die Verbindungsstrecke der zu $D_0 \cap D_i$ fremden Ecken von D_0 und D_i. Der Durchschnitt von D_0, D_j und D_k $(j \neq k,\ 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq n)$ ist eine $(n-3)$-Seite K_{jk}, und nach Voraussetzung dieses Falls ist $\operatorname{link}(K_{jk}, \mathscr{B}(P))$ kombinatorisch äquivalent zum Randkomplex eines 4-Ecks.

$V_j^{(1)}$ und $V_k^{(1)}$ $(j \neq k,\ 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq n)$ sind die Verbindungsstrecken gegenüberliegender Ecken von $\operatorname{link}(K_{jk}, \mathscr{B}(P))$. Deshalb hat die Menge $\{V_i^{(1)} \mid 1 \leq i \leq n\}$ nach Hilfssatz 3b die folgende Eigenschaft: Die Strecken $V_i^{(1)}$ haben paarweise orthogonale Richtungen, die orthogonal sind zur Verbindungsgeraden ihrer Mittelpunkte (falls diese verschieden sind). Die Richtungen der $V_i^{(1)}$ bestimmen daher ein orthogonales n-Bein. Es sei A der von den Mittelpunkten der $V_i^{(1)}$

aufgespannte affine Raum und i_0 ein fester Index mit $1 \leqslant i_0 \leqslant n$, dann wird A auch aufgespannt von den Verbindungsgeraden des Mittelpunkts von $V_{i_0}^{(1)}$ mit den dazu ver schiedenen Mittelpunkten der $V_i^{(1)}$; $V_{i_0}^{(1)}$ ist orthogonal zu jeder dieser Verbindungsgeraden, also orthogonal zu A. Folglich ist das von den Richtungen der $V_i^{(1)}$ bestimmte orthogonale n-Bein orthogonal zu A, so daß A die Dimension O hat, d.h.: Alle Strecken $V_i^{(1)}$ schneiden sich in einem Punkt. Weil außerdem alle 1-Seiten von link $(K_{jk}, \mathcal{B}(P))$ gleich lang sind, sind alle Strecken $V_i^{(1)}$ gleich lang.

Damit sind die $2n$ Ecken aller Strecken $V_i^{(1)}$ die Ecken eines regulären n-Kreuzpolytops X. Weil die Ecken der Strecken $V_i^{(1)}$ auch Ecken von P waren, ist die Eckenmenge von P Obermenge der Eckenmenge des regulären Kreuzpolytops X. Außerdem ist $P_1 := D_0$ gemeinsame Deckseite von X und P.

Für $P = X$ ist Satz 2 bewiesen, im folgenden wird deshalb $P \neq X$ angenommen. Dann gibt es eine Deckseite P_2 von P, die nicht Deckseite von X ist. O.B.d.A. ist wieder $P_1 \cap P_2$ eine $(n-2)$-Seite von P und auch von X. K_0 sei eine $(n-3)$-Seite von $P_1 \cap P_2$. Dann gibt es genau 4 Deckseiten von X durch K_0. K_0 ist auch Seite von P. Aus Hilfssatz 3c folgt link $(K_0, \mathcal{B}(P)) =$ link $(K_0, \mathcal{B}(X))$ im Widerspruch dazu, daß P_2 eine Deckseite von P durch K_0 war, die nicht Deckseite von X war. Damit ist im 2. Fall $P = X$.

5. *Im* $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqslant 5)$ gilt im Fall von $(n-1)$-Maßpolytopen als Deckseiten:

SATZ 3. *Es sei P ein konvexes n-Polytop* $(n \geqslant 5)$ *mit* $(n-1)$-*Maßpolytopen als Deckseiten. Dann ist P ein n-Maßpolytop.*

Beweis. Dies folgt direkt aus den Hilfssätzen 1 und 2.

LITERATUR

[1] Blind, G. und Blind, R., Zugänglichkeit von Kugelpackungen im $\mathbf{R}^n$, Archiv der Mathematik *30* (1978), 438–439.
[2] Coxeter, H. S. M., *Regular Polytopes*, New York, 1973.
[3] Freudenthal, H. und van der Waerden, B. L., *Over een bewering van Euclides*, Simon Stevin wis. natuurk. Tijdschr. *25* (1947), 115–121.
[4] Galafassi, V. E., *I poliedri convessi con facce regolari eguali*, Archimede *12* (4), (1960), 169–177.
[5] Grünbaum, B., *Convex Polytopes*, London-New York-Sydney, 1967.
[6] Shephard, G. C., *Angle deficiencies of convex polytopes*, J. London Math. Soc. *43* (1968), 325–336.
[7] Zalgaller, V. A., *Convex polyhedra with regular faces*, Seminars in Mathematics, V. A. Steklov Mathematical Institute, Leningrad, Vol. 2.; Consultants Bureau, New York 1969.

R. Blind
Math. Institut B
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57
D7 Stuttgart 80

Eingegangen den 30. Mai 1978