Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 54 (1979)

Artikel: Funktionale von primitiven Polygonen Kleinscher Ebenen.

Autor: Bilinski, Stanko

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41576

Comment. Math. Helvetici **54** (1979) 288–303 Birkhäuser Verlag, Basel

Funktionale von primitiven Polygonen Kleinscher Ebenen

STANKO BILINSKI (Zagreb)

1. Einführung

Es sei α irgendeine Kleinsche Ebene, also ein Paar (M, Γ), wobei insbesondere M eine reelle Zahlenebene ist, welche eventuell irgendwie durch uneigentliche Punkte erweitert sein kann, und die Fundamentalgruppe Γ dieser Ebene sei eine Liesche Gruppe. In jeder solchen Kleinschen Ebene gibt es eine einfache Punktfigur, für welche man die allgemeine Form von allen möglichen Funktionalen angeben kann. Diese Figuren sind eben die einfachsten endlichen diskreten Punktfiguren der betreffenden Ebene, welchen noch eine skalare Invariante zugeordnet werden kann, und diese Figuren seien jetzt erklärt.

Eine Menge von n komplanaren Punkten $(n>0)$, welche im Falle $n>2$ zyklisch geordnet ist, soll ein "Polygon" heissen, und mit π_n bezeichnet werden. Im allgemeinen werden wir noch fordern, dass kein Punktetripel aus der Menge kollinear ist. Die Punkte der Menge nennen wir auch "Eckpunkte", und die Zahl n die "Ordnung" des Polygons π_n. Ist nun die Fundamentalgruppe Γ der Ebene α eine genau ν-fach transitive Transformationsgruppe $(\nu \geqq 0)$, dann soll $\pi_{\nu+1}$ das "primitive Polygon" dieser Ebene heissen. Es sind z.B. π_2 das primitive Polygon der metrischen Ebenen und π_5 das primitive Polygon der projektiven Ebene.

Wenn die Fundamentalgruppe Γ der Ebene ν-fach transitiv ist, so gehören alle Polygone π_ν zu derselben Äquivalenzklasse. Es kann also den Polygonen π_ν, ausser dem trivialen Fall einer Konstante, kein Funktional zugeordnet werden. Die primitiven Polygone $\pi_{\nu+1}$ sind also Polygone niedrigster Ordnung, welchen nichttriviale Funktionale zugeordnet werden können.

Unlängst hat H. Schwerdtfeger ([4], [5]) die Invarianten in allgemeinen Räumen in Bezug auf genau ν-fach transitive Transformationsgruppen untersucht. Dabei hat er gefunden, dass jede genau ν-fach transitive Transformationsgruppe eine "im wesentlichen einzige" $(\nu+1)$-Punkt-Invariante hat, d.h. jede andere Invariante kann nur eine Funktion dieser "Grundinvariante" sein.

Andererseits haben schon L. E. J. Brouwer [1] und später B. Kerékjártó [2] den folgenden Satz bewiesen:

Wenn die Transformationsgruppe der Geraden transitiv ist, muss sie notwendig kontinuierlich sein. Auf einer Geraden können ν-fach transitive Transformationsgruppen nur für $\nu = 1, 2, 3$ bestehen.

Die einzigen transitiven Gruppen der Geraden sind also die Gruppe der Translationen, die affine Gruppe und die projektive Gruppe, und im Sinne des Satzes von Schwerdtfeger entsprechen diesen Gruppen der Reihe nach die Entfernung, das Teilverhältnis und das Doppelverhältnis als im wesentlichen einzig mögliche Invarianten. Nun haben aber noch J. Aczél, S. Gołąb, M. Kuczma und E. Siwek [3] zwei Beweise des Satzes gegeben, wonach das Doppelverhältnis die "im wesentlichen einzige" mögliche Invariante eines Punktquadrupels der projektiven Geraden ist.

Wahrscheinlich ist nun die folgende Erweiterung des Satzes von Brouwer und Kerékjártó gültig:

In einem n-dimensionalen Raum $(n > 0)$ können ν-fach transitive Transformationsgruppen nur für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n+2$ bestehen.

Falls diese Vermutung gültig ist, kann keine Kleinsche Ebene bestehen mit dem primitiven Polygon $\pi_{\nu+1}$, wo $\nu > 4$ wäre.

Es wird sich zeigen, dass es zwei Arten von primitiven Polygonen gibt. Bei den primitiven Polygonen "erster Art" wird eine Äquivalenzklasse durch einen einzigen invarianten Parameter x bestimmt. Dabei kann als Parameter irgendeine skalare Invariante gewählt werden unter der Bedingung, dass diese die Äquivalenzklasse eindeutig bestimmt. $F(x)$ ist dann die allgemeine Form jedes Funktionals, wobei F eine beliebige Funktion ist. Primitive Polygone erster Art sind z.B. das Polygon π_3 der äquiaffinen Ebene, und die Polygone π_2 der Euklidischen Ebene und der Homothetieebene.

Für die Bestimmung einer Äquivalenzklasse von primitiven Polygonen "zweiter Art" sind dagegen zwei unabhängige invariante Parameter x, y nötig. Auch hier kann ein unabhängiges Paar von skalaren Invarianten als Parameterpaar gewählt werden, wenn nur dieses Paar die Klasse eindeutig bestimmt.

Es kann aber nicht eine beliebige Funktion $F(x, y)$ ein Funktional dieser Klasse sein, obwohl sie in Bezug auf die Gruppe Γ invariant ist. Dieselbe Klasse von Polygonen zweiter Art kann nämlich im allgemeinen durch mehrere verschiedene invariante Parameterpaare x, y bestimmt werden, und da jedes Funktional der Klasse eindeutig zugeordnet ist, soll für alle diese verschiedenen Parameterpaare die Funktion $F(x, y)$ denselben Wert annehmen. Darum soll diese Funktion auch in Bezug auf eine diskrete Transformationsgruppe G endlicher Ordnung der Parameterebene (x, y) invariant sein, nämlich jene Gruppe G, in Bezug auf welche alle jene Parameterpaare x, y äquivalent sind, welche dieselbe Klasse von Polygonen zweiter Art bestimmen.

Die primitiven Polygone zweiter Art sind z.B.: π_5 der projektiven Ebene, π_4 der affinen Ebene, π_3 der äquiformen und zentroaffinen Ebene, π_2 der Translationsebene und π_1 der Identitätsebene.

Die Funktionale $F(x)$ der primitiven Polygone erster Art ergeben sich durch die Lösung einer Funktionalgleichung.

Nach der Wahl eines geeigneten unabhängigen Invariantenpaares x, y einer Klasse primitiver Polygone zweiter Art werden sich dann durch die Lösung eines Systems von Funktionalgleichungen die Funktionale $F(x, y)$ dieser Klasse ergeben.

Auf die oben angedeutete Weise wird also die allgemeine Form von allen Funktionalen der einzelnen Klassen primitiver Polygone bestimmt.

Wie schon gesagt, jedes primitive Polygon gehört zu einer von den zwei Arten. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt aus dem

SATZ A. *Die Fundamentalgruppe Γ einer Kleinschen Ebene sei* $\boldsymbol{m}$*-gliedrig und genau ν-fach transitiv. Dann ist*

$$m = 2\nu + \mu; (\nu = 0, 1, 2, \ldots; \mu = 0, 1) \tag{1.1}$$

und das primitive Polygon $\pi_{\nu+1}$ dieser Ebene ist von $(2-\mu)$-ter Art.

Beweis: Es sei

$$\Gamma: \begin{cases} x \to \varphi(x, y, a_1, \ldots, a_m), \\ y \to \psi(x, y, a_1, \ldots, a_m), \end{cases}$$

wobei φ und ψ zwei beliebige analytische Funktionen ihrer $(\boldsymbol{m}+2)$ Argumente sind, und seien

$$\begin{aligned} &P_1(x_1, y_1),\ P_2(x_2, y_2), \ldots; \\ &\bar{P}_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1),\ \bar{P}_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2), \ldots. \end{aligned} \tag{1.2}$$

zwei beliebige Folgen unabhängiger Punkte der Ebene. Da Γ genau ν-fach transitiv ist, so ist sicher für beliebige Folgen (1.2) das System, welches die ν ersten Gleichungspaare

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_i &= \varphi(x_i, y_i, a_1, \ldots, a_m) \\ \bar{y}_i &= \psi(x_i, y_i, a_1, \ldots, a_m) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

bilden, lösbar, aber das System von $\nu+1$ solchen Paaren ist nicht lösbar. Darum ist

$$2\nu \leqq m < 2\nu + 2,$$

und die Beziehung (1.1) ist also gültig.

Um nun ein Polygon aus einer Äquivalenzklasse von primitiven Polygonen $\pi_{\nu+1}$ zu bestimmen, seien zunächst ν Punkte der Ebene beliebig aber unabhängig gewählt. Durch die Wahl eines weiteren, von anderen unabhängigen, $(\nu+1)$-ten Punktes $P_{\nu+1}$, wird ein Polygon $\pi_{\nu+1}$ aus der Äquivalenzklasse bestimmt, also auch diese Klasse selbst. Bei der Wahl des Punktes $P_{\nu+1}(x_{\nu+1}, y_{\nu+1})$ verfügt man im ersten Falle beliebig mit beiden Koordinaten, während im zweiten Falle nur noch eine Koordinate frei wählbar ist. Daraus folgt aber unmittelbar, dass die Äquivalenzklasse jedes primitiven Polygons $\pi_{\nu+1}$, je nach der Art dieser Klasse, entweder durch einen oder durch zwei unabhängige Parameter bestimmt werden kann, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Nun stellen wir das Problem auf, die allgemeine Form von allen Funktionalen primitiver Polygone in einzelnen Kleinschen Ebenen zu bestimmen.

Es sei also die Fundamentalgruppe Γ einer Kleinschen Ebene m-gliedrig und genau ν-fach transitiv, und sei

$$\pi_{\nu+1}\{P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_{\nu+1}(x_{\nu+1}, y_{\nu+1})\}$$
$$\text{(im Falle } \nu>1 \text{ zyklisch geordnet!)}$$

ein primitives Polygon dieser Ebene. Wenn auf die Koordinaten der Eckpunkte die allgemeine Transformation der Gruppe Γ angewendet wird, so sei das durch

$$\Gamma(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{\nu+1}, y_{\nu+1})$$

bezeichnet. Alle Funktionale des primitiven Polygons $\pi_{\nu+1}$ werden sich dann durch die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{\nu+1}, y_{\nu+1}) = F[\Gamma(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{\nu+1}, y_{\nu+1})] \tag{1.3}$$

ergeben. Falls $\pi_{\nu+1}$ ein primitives Polygon erster Art ist, kann man diese Funktionalgleichung im allgemeinen einfach lösen. Im Falle des primitiven Polygons zweiter Art wird die Lösung dieser Gleichung weniger einfach. Dann aber wird uns eine andere Methode helfen die allgemeine Form von allen Funktionalen des Polygons $\pi_{\nu+1}$ zu bestimmen.

2. Einige primitive Polygone erster Art

Es sei jetzt $\mu=1$ angenommen, dann ist nach Satz A das primitive Polygon $\pi_{\nu+1}$ von erster Art. Hier werden für einige besondere wichtigere Fälle dieser

Polygone, wobei die Fundamentalgruppe der Ebene eine affine Untergruppe ist, die allgemeine Form von allen Funktionalen bestimmt.

(a) π_3 der äquiaffinen Ebene

Im Falle der äquiaffinen Ebene nimmt die Funktionalgleichung (1.3) die Form

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = F(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}, a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}, \\ a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13}, a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_{23}, a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a_{13}, a_{21}x_3 + a_{22}y_3 + a_{23}) \tag{2.1}$$

an, wobei die Koeffizienten a_{ij} der Beziehung

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2 = 1 \tag{2.2}$$

genügen müssen, und da die Punkte von π_3 nicht kollinear sind, muss auch

$$2S \equiv \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.3}$$

gelten.

Es handelt sich also hier, die allgemeine Lösung einer Funktionalgleichung elfter Stufe zu finden. Dazu werden wir die Stufe dieser Gleichung um fünf reduzieren. Zu diesem Zweck setzen wir folgendes System von fünf Gleichungen auf:

$$\begin{aligned} a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13} &= 0, \\ a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a_{13} &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23} &= 1, \\ a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_{23} &= 1, \\ a_{21}x_3 + a_{22}y_3 + a_{23} &= 0. \end{aligned} \tag*{(2.4)$_{1,2,3,4,5}$}$$

Aus $(2.4)_{1,2}$ folgt mit einem noch unbestimmten Faktor λ

$$\begin{aligned} a_{11} &= \lambda(y_2 - y_3), \\ a_{12} &= \lambda(x_3 - x_2), \\ a_{13} &= \lambda(x_2y_3 - x_3y_2), \end{aligned} \tag*{(2.5)$_{1,2,3}$}$$

während das System von Gleichungen $(2.4)_{3,4,5}$ ergibt:

$$\begin{aligned} a_{21} &= \frac{1}{2S}(y_2-y_1), \\ a_{22} &= \frac{1}{2S}(x_1-x_2), \\ a_{23} &= \frac{1}{2S}[x_3(y_1-y_2)+y_3(x_2-x_1)]. \end{aligned} \tag{2.6$_{1,2,3}$}$$

Setzt man jetzt die Werte $(2.5)_{1,2}$ und $(2.6)_{1,2}$ in (2.2) ein, so folgt

$$\lambda = \pm 2S. \tag{2.7}$$

Wegen (2.4), (2.5), (2.6) und (2.7) nimmt jetzt die Gleichung (2.1) die Form

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = F(\pm 4S^2, 1, 0, 1, 0, 0). \tag{2.8}$$

an.

Es sei nun durch

$$f(u) = F(\pm 4u^2, 1, 0, 1, 0, 0) \tag{2.9}$$

eine neue Funktion f eingeführt; dann ist nach (2.8) und (2.9)

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = f\left(\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right). \tag{2.10}$$

Wenn also die Gleichung (2.1) eine Lösung hat, so kann diese immer auf die Form (2.10) gebracht werden, wobei zunächst die Funktion f durch (2.9) definiert ist. Man findet aber, dass die Funktion (2.10) die Gleichung (2.1) tatsächlich befriedigt, und zwar für jede beliebig gewählte Funktion f. Das ist also die allgemeine Lösung dieser Gleichung.

Jeder Klasse von primitiven Polygonen π_3 der äquiaffinen Ebene ist also der invariante skalare Parameter

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

zugeordnet, und diese Funktional sei der "Inhalt" von π_3 genannt. Jede andere skalare Invariante dieser Klasse von primitiven Polygonen ist dann eine Funktion von S.

(b) π_2 der Euklidischen Ebene

Durch die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2) = F(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}, a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}, a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13}, a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_{23}) \tag{2.11}$$

wobei die Koeffizienten a_{ij} den Gleichungen

$$\begin{aligned} &a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, \\ &a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1, \\ &a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0, \end{aligned} \qquad (2.12)_{1,2,3}$$

genügen müssen, werden alle Funktionale des primitiven Polygons π_2 der Euklidischen Ebene bestimmt. Da die Gleichung (2.11) von siebenter Stufe ist, so muss diese Stufe um drei reduziert werden, um die allgemeine Lösung zu bekommen. Es sei also

$$\begin{aligned} &a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23} = 0, \\ &a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13} = 0, \\ &a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_{23} = 0 \end{aligned} \qquad (2.13)_{1,2,3}$$

angenommen, dann folgt zunächst aus $(2.13)_{1,3}$ unter Benutzung von $(2.12)_2$

$$a_{21} = \frac{y_1 - y_2}{\pm d}, \qquad a_{22} = \frac{x_2 - x_1}{\pm d}, \qquad a_{23} = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{\pm d}, \qquad (2.14)_{1,2,3}$$

wobei zur Abkürzung

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{2.15}$$

gesetzt ist. $(2.12)_3$, $(2.14)_{1,2}$ und $(2.12)_1$ ergeben dann

$$a_{11} = \frac{x_1 - x_2}{\pm d}; \qquad a_{12} = \frac{y_1 - y_2}{\pm d}. \qquad (2.16)_{1,2}$$

Aus $(2.13)_2$ und $(2.16)_{1,2}$ folgt noch

$$a_{13}=\frac{x_1x_2+y_1y_2-x_2^2-y_2^2}{\pm d}. \tag{2.17}$$

Mit Benutzung von (2.16), (2.17) und (2.13) folgt dann aus (2.11)

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2)=F(\pm d, 0, 0). \tag{2.18}$$

Wird nun durch

$$f(d)=F(\pm d, 0, 0) \tag{2.19}$$

eine neue Funktion f eingeführt, so ist nach (2.11), (2.18) und (2.19)

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2)=f(d). \tag{2.20}$$

Dabei ist f eine durch (2.19) definierte Funktion. Da aber (2.20) mit jeden beliebigen Funktion f der Gleichung (2.11) genügt, so ist das die allgemeine Lösung der Gleichung (2.11). Die Funktion (2.15), als einfachstes Funktional des primitiven Polygons π_2, soll dabei die "Entfernung" der Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ heissen.

(c) π_2 der Homothetieebene

Um alle Funktionale des primitiven Polygons der Homothetieebene zu bestimmen, muss auch jetzt die Funktionalgleichung (2.11) gelöst werden, nun aber müssen die Koeffizienten a_{ij} den Bedingungen

$$\boldsymbol{a}_{11}=\boldsymbol{a}_{22}\neq 0, \qquad \boldsymbol{a}_{12}=\boldsymbol{a}_{21}=0 \tag{2.21}$$

genügen. Die Variablen der so erhaltenen Funktionalgleichung verbinden wir noch mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}y_1+a_{23}&=1,\\ a_{11}x_2+a_{13}&=0,\\ a_{11}y_2+a_{23}&=0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Da die Punkte P_1 und P_2 nicht zusammenfallen, so können x_1-x_2 und y_1-y_2 nicht zugleich verschwinden. Es sei zunächst der Fall $y_1 \neq y_2$ betrachtet.

Dann geht (2.11) wegen (2.21) und (2.22) in

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2) = F\left(\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}, 1, 0, 0\right)$$

über. Wird nun durch

$$F(u, 1, 0, 0) = f(u)$$

eine neue Funktion f eingeführt, so findet man, dass

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2) = f\left(\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}\right) \tag{2.23}$$

die allgemeine Lösung von (2.11) für den Fall (2.21) darstellt, wobei f beliebig ist.

Falls $x_1 \neq x_2$ gültig ist, beweist man auf analoge Weise, dass man die allgemeine Lösung in der Form

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2) = g\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right) \tag{2.24}$$

schreiben kann, wobei auch jetzt g eine beliebige Funktion ist. Die Lösungen (2.23) und (2.24) sind aber offensichtlich äquivalent. Die Grundinvariante $(y_1-y_2)/(x_1-x_2)$ nennen wir die „Steigung" des Punktepaares π_e.

3. Einige primitive Polygone zweiter Art

Im Falle $\mu=0$ wird das primitive Polygon $\pi_{\nu+1}$ der Ebene von zweiter Art. Hier wird die allgemeine Form aller Funktionale für einige besondere Fälle von solchen Polygonen bestimmt.

(a) π_5 der projektiven Ebene

Da die Fundamentalgruppe Γ der projektiven Ebene genau vierfach transitiv ist, das primitive Polygon dieser Ebene ist π_5.

Im Folgenden werden alle vorkommenden Indizes von Elementen des Fünfecks π_5 auf die kleinste natürliche Zahl modulo 5 reduziert, da die Eckpunkte P_i von π_5 zyklisch geordnet sind.

Es sei zunächst π_5 zum "vollständigen Fünfeck" ergänzt. Für $i = 1, 2, \ldots, 5$ seien also:

$$\begin{aligned} s_i &= P_{i-2}\, P_{i+2} && \text{die "Seite",} \\ d_i &= P_{i-1}\, P_{i+1} && \text{die "Diagonale",} \\ D_i &= d_{i-2}\, d_{i+2} && \text{der "Diagonalpunkt"} \\ N_i &= s_i\, d_i && \text{der "Nebenpunkt"} \end{aligned} \tag{3.1}$$

des "vollständigen Fünfecks" π_5.

Da kein Tripel von Eckpunkten des Polygons π_5 kollinear ist, sind alle Elemente (3.1) eindeutig bestimmt und verschieden. Aus (3.1) folgt, dass jede Diagonale mit fünf Punkten inzidiert, und zwar

$$d_i \mathrel{\mathcal{I}} N_i, P_{i+1}, D_{i+2}, D_{i+3}, P_{i+4}. \tag{3.2}$$

Daraus folgt, dass auch die Beziehungen

$$d_i = P_{i+1}\, D_{i+3}, \tag{3.3}$$

$$d_i = D_{i+2}\; P_{i+4} \tag{3.4}$$

gültig sind. Aus (3.1) folgt auch

$$P_i = d_{i-1}\, d_{i+1}. \tag{3.5}$$

Nach (3.2) kann man jedem π_5 fünf Doppelverhältnisse

$$\lambda_i = (P_{i+1}\, D_{i+2}\, D_{i+3}\, P_{i+4}); \qquad (i = 1, 2, \ldots, 5) \tag{3.6}$$

zuordnen, und das sind invariante Parameter der durch π_5 bestimmten Klasse von äquivalenten Polygonen. Von diesen fünf Parametern sind nur zwei unabhängig, z.B. zwei zyklisch aufeinanderfolgende, und durch diese ist dann auch eine ganze Äquivalenzklasse von primitiven Polygonen π_5 eindeutig bestimmt.

Um das zu beweisen, nehmen wir an, dass für ein bestimmtes i die Parameterwerte λ_i und λ_{i+1} beliebig gegeben sind, wobei

$$\begin{aligned} \lambda_i &= (P_{i+1}\, D_{i+2}\, D_{i+3}\, P_{i-1}), \\ \lambda_{i+1} &= (P_{i+2}\, D_{i+3}\, D_{i+4}\, P_i) \end{aligned} \tag{3.7}$$

gelten soll. Um jetzt ein π_5 aus der durch diese Parameterwerte bestimmten Klasse (also auch die Klasse selbst) zu bestimmen, können in der projektiven Ebene 4 beliebige Punkte P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, von welchen keine drei kollinear sind, als Eckpunkte von π_5 gewählt werden, denn die Gruppe Γ ist jetzt vierfach transitiv. Dann sind nach (3.1) auch die Diagonalen d_i und d_{i+1} bestimmt, und ebenso der Diagonalpunkt D_{i+3}. Da aber nach Voraussetzung die Doppelverhältniswerte (3.7) gegeben sind, sind mithin auch die Punkte D_{i+2} und D_{i+4} bestimmt. Aus (3.4) und (3.3) folgt dann, dass auch die Diagonalen d_{i+2} und d_{i+4} bestimmt sind. Dann ist aber nach (3.5) auch der fünfte Eckpunkt

$$P_{i+3} = d_{i+2}d_{i+4}$$

des Polygons π_5, also auch das Polygon π_5 vollständig bestimmt, und damit auch seine Äquivalenzklasse.

Da also schon zwei von den fünf Parametern (3.6) eine Äquivalenzklasse von Polygonen π_5 bestimmen, so bestimmen sie auch die drei übrigen Parameter. Wir werden die unmittelbaren Beziehungen zwischen diesen Parametern finden.

Zu diesem Zweck projizieren wir die Diagonale d_i aus dem Eckpunkt P_i, und die Diagonale d_{i+1} aus dem Eckpunkt P_{i+1}, beide auf die Diagonale d_{i+3}. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man dabei $i = 1$ setzen. Es sei weiter bezeichnet:

$$\lambda_1 = x, \quad \lambda_2 = y, \quad \lambda_3 = u, \quad \lambda_4 = v, \quad \lambda_5 = w.$$

Dann wird

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (P_2D_3D_4P_5) = (N_4D_2P_3P_5) = x, \\ \lambda_2 &= (P_3D_4D_5P_1) = (P_3P_5D_1N_4) = y, \\ \lambda_4 &= (P_5D_1D_2P_3) = v. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Nun gilt aber für die fünf Punkte auf der Diagonale d_4 die Identität von Möbius:

$$(P_3P_5D_1N_4)(P_3P_5N_4D_2)(P_3P_5D_2D_1) = 1,$$

oder nach (3.8) $yx(v-1)/v = 1$.

Daraus berechnet man v abhängig von x und y, und durch zyklische Vertauschungen folgen die weiteren Beziehungen:

$$\begin{aligned} &x=\frac{uv}{uv-1}, \quad y=\frac{vw}{vw-1}, \\ &u=\frac{wx}{wx-1}, \quad v=\frac{xy}{xy-1}, \quad w=\frac{yu}{yu-1}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Aus (3.9) findet man, dass zwischen diesen fünf invarianten Parametern auch die symmetrische Gleichung

$$xyuvw=(xy-1)(yu-1)(uv-1)(vw-1)(wx-1) \tag{3.10}$$

besteht.

Von den Gleichungen (3.9) sind drei unabhängig. Man kann z.B. die Parameter $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ als unabhängig betrachten, dann findet man

$$u=\frac{xy-1}{(x-1)y}, \quad v=\frac{xy}{xy-1}, \quad w=\frac{xy-1}{x(y-1)}.$$

Wenn ein primitives Polygon π_i durch das Paar x,y von unabhängigen und invarianten Parametern bestimmt wird, so sei es durch $\pi_i(x, y)$ bezeichnet.

Die Eckpunkte von π_5, also auch die invarianten Parameter λ_i sind zyklisch geordnet, und jedes Paar von zyklisch benachbarten Parametern λ_i, λ_{i+1} bestimmt das Polygon π_5. D.h., die Polygone

$$\pi_5(x, y), \pi_5(y, u), \pi_5(u, v), \pi_5(v, w), \pi_5(w, x)$$

sind alle projektiv identisch, es sind aber auch die Polygone $\pi_5(x, y)$ und $\pi_5(y, x)$ äquivalent. Jedes Funktional des Polygons π_5 muss darum invariant sein in Bezug auf die Diedergruppe $G_{10}=T_5S_2$, welche als Produkt zweier Gruppen bestimmt ist; einer zyklischen Gruppe T_5 mit der Erzeugenden

$$\tau \cdots \begin{cases} x \to y, \\ y \to \dfrac{xy-1}{(x-1)y} \end{cases}$$

und einer Involution S_2 mit der Erzeugenden

$$\sigma \cdots \begin{cases} x \to y, \\ y \to x. \end{cases}$$

Nun gilt aber der folgende

SATZ B. *Sei B ein Bereich der reellen Zahlenebene, welche auch irgendwie durch uneigentliche Punkte erweitert werden kann, und* $G=\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}$ *sei eine diskrete Transformationsgruppe endliche Ordnung, wobei jede Transformation* ω_i *den Bereich B auf sich abbildet. Jede skalare Funktion F, welche in Bezug auf die Gruppe G invariant und im Bereich B definiert ist, kann dann in der Form*

$$F(x, y)=\sum_{i=1}^{r} f[\omega_i(x, y)] \tag{3.11}$$

und auch in der Form

$$F(x, y)=\prod_{i=1}^{r} g[\omega_i(x, y)] \tag{3.12}$$

dargestellt werden, wobei f und g zwei beliebige Funktionen sind. Diese beiden Darstellungen sind dabei äquivalent. (Der Beweis dieses Satzes in allgemeinerer Form ist in [6] gegeben.)

Auf Grund des Satzes B und Formel (3.11) bekommt man dann den

SATZ C. *Jedes Funktional eines Polygons* π_5 *der projektiven Ebene kann in der Form*

$$\begin{aligned} F(x, y)=f(x, y)&+f\left(y, \frac{xy-1}{(x-1)y}\right)+f\left(\frac{xy-1}{(x-1)y}, \frac{xy}{xy-1}\right)\\ &+f\left(\frac{xy}{xy-1}, \frac{xy-1}{x(y-1)}\right)+f\left(\frac{xy-1}{x(y-1)}, x\right)+f\left(x, \frac{xy-1}{x(y-1)}\right)+\\ &+f\left(\frac{xy-1}{x(y-1)}, \frac{xy}{xy-1}\right)+f\left(\frac{xy}{xy-1}, \frac{xy-1}{(x-1)y}\right)+f\left(\frac{xy-1}{(x-1)y}, y\right)+f(y, x) \end{aligned} \tag{3.13}$$

dargestellt werden, wobei f eine beliebige Funktion ist, während die Parameter x, y die zwei auf beliebigen zyklisch aufeinanderfolgenden Diagonalen des Polygons π_5 *bestimmten und durch* (3.6) *definierten Doppelverhältnisse sind. Auf Grund der Formel* (3.12) *bekommt man eine zur* (3.13) *analoge Darstellung von Funktionalen des Polygons* π_5, *jetzt aber in Produktform.*

In Hinblick auf spätere Anwendungen sei hier noch der Fall des projektiv regulären Fünfecks π_5 betrachtet. Dieses wird durch die Beziehungen $x=y=u=$

$= v = w$ ausgezeichnet. Aus (3.10) bekommt man dann die Gleichung

$$(x^2-1)^5 - x^5 = 0,$$

welche nur zwei reelle Wurzeln

$$x_1 = \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5}); \qquad x_2 = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$

hat. Durch x_1 ist die Klasse von projektiv konvexen regulären Fünfecken bestimmt, und x_2 gehört zur Klasse der projektiv regulären Sternfünfecken.

Es ist selbstverständlich, dass man auf duale Weise das "vollständige Fünfseit" Σ_5 der projektiven Ebene definieren kann. Dann kann auch die allgemeine Form von allen seinen Funktionalen angegeben werden.

(b) π_4 der affinen Ebene

In dem primitiven Polygon π_4 der affinen Ebene sei M der Schnittpunkt der Diagonalen P_1P_3 und P_2P_4. Dann wird eine affine Klasse von Vierecken $\pi_4(x, y)$ durch zwei Teilverhältnisse

$$x = \frac{P_1M}{MP_3}, \qquad y = \frac{P_2M}{MP_4} \tag{3.14}$$

bestimmt, welche invariante Parameter dieser Klasse sind. Auf eine ähnliche Weise wie bei dem π_5 der projektiven Ebene wird bewiesen:

SATZ D. *Jedes Funktional einer affinen Klasse von primitiven Polygonen π_4 kann in der Form*

$$F(x, y) = f(x, y) + f\left(y, \frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) + f\left(\frac{1}{y}, x\right) + f(y, x) + f\left(x, \frac{1}{y}\right) + f\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{x}, y\right)$$

*dargestellt werden, wobei **f** eine beliebige Funktion ist, und **x, y** die durch* (3.14) *definierten invarianten Parameter sind. Auch hier kann man für das allgemeine Funktional anstatt der Summenform die Produktform angeben.*

(Ein Beweis dieses Satzes befindet sich in [7] Gleichung 8a.)

Es kann noch die Frage gestellt werden, ob man im Satz C und Satz D die Funktionen f und g so wählen kann, dass die so gewonnenen Funktionale eine unmittelbar anschauliche geometrische Bedeutung haben. Diese Frage wird in einigen weiteren Arbeiten beantwortet [7], [8].

(a) π_3 der äquiformen und zentroaffinen Ebenen

Es seien in der äquiformen Ebene und in der zentroaffinen Ebene $P_i(\xi_i, \eta_i)$; $(i = 1, 2, 3)$ die Eckpunkte des Polygons π_3, wobei vorausgesetzt sei, dass in der zentroaffinen Ebene kein Paar von gegebenen Eckpunkten mit dem Zentrum der zentroaffinen Transformationen kollinear ist.

Im Folgenden seien alle Indizes auf die kleinste natürliche Zahl modulo 3 reduziert. Dann seien die folgenden Bezeichnungen eingeführt.

In der äquiformen Ebene:

$$s_i = \sqrt{(\xi_{i+1} - \xi_{i+2})^2 + (\eta_{i+1} - \eta_{i+2})^2}, \qquad x = \frac{s_2}{s_3}, \quad y = \frac{s_3}{s_1}, \quad z = \frac{s_1}{s_2}. \tag{3.15}$$

In der zentroaffinen Ebene:

$$S_i = \xi_{i+1}\eta_{i+2} - \xi_{i+2}\eta_{i+1}, \qquad x = \frac{S_2}{S_3}, \quad y = \frac{S_3}{S_1}, \quad z = \frac{S_1}{S_2}. \tag{3.16}$$

In beiden betrachteten Ebenen sind also jedem π_3 drei in Bezug auf die Transformationsgruppe Γ der Ebene invariante Parameter x, y, z zugeordnet. Von diesen sind nur zwei unabhängig. Dabei ist der Variabilitätsbereich B dieser Parameter im Falle der äquiformen Ebene durch die Ungleichungen

$$xy + y - 1 \geqq 0,$$
$$xy - y + 1 \geqq 0,$$
$$-xy + y + 1 \geqq 0$$

bestimmt. Im Falle der äquiaffinen Ebene bildet den Bereich B die ganze Zahlenebene mit Ausnahme des Koordinatenursprungs.

Jedes Funktional $F(x, y)$, welches in beiden Ebenen dem primitiven Polygon π_3 zugeordnet werden kann, muss in Bezug auf die Diedergruppe $G_6 = T_3S_2$ invariant sein. Dabei ist T_3 die zyklische Gruppe, welche durch die Erzeugende

$$\tau \cdots \begin{cases} x \to y, \\ y \to \dfrac{1}{xy} \end{cases}$$

bestimmt ist, während die Gruppe S_2 durch die involutorische Transformation

$$\sigma \cdots \begin{cases} x \to xy, \\ y \to \dfrac{1}{y} \end{cases}$$

erzeugt wird.

Daraus folgt der

SATZ E. *Jedes Funktional des Polygons* π_3 *in der äquiformen und zentroaffinen Ebene kann in der Form*

$$F(x, y) = f(x, y) + f\left(y, \frac{1}{xy}\right) + f\left(\frac{1}{xy}, x\right) + f\left(xy, \frac{1}{y}\right) + f\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{x}, xy\right)$$

dargestellt werden, wobei f eine beliebige Funktion ist, und x, y zwei invariante und unabhängige, durch (3.15) *bzw.* (3.16) *definierte Parameter sind.*

LITERATUR

[1] BROUWER, L. E. J., *Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie, I.*, Math. Annalen, *67*, (1909), 246–267.

[2] DE KERÉKJÁRTÓ, B., *Sur les groupes transitifs de la droite*, Acta Univ. Szeged., Acta Sci. Math. *10*, (1941–1943), 21–35.

[3] ACZÉL, J. GOŁĄB, S. KUCZMA M. und SIWEK, E., Das Doppelverhältnis als Lösung einer Funktionalgleichung, Ann. Polon. Math. *9* (1960–1961), 183–187.

[4] SCHWERDTFEGER, H., On $(n+1)$-Point Invariants of the Group GL(n, F), Linear and Multilinear Algebra, *3* (1975), 105–109.

[5] SCHWERDTFEGER, H., *Invariants of a Class of Transformation Groups*, Aeq. Math. *14* (1976), 105–110.

[6] BILINSKI, S., *Die Invarianten einer diskreten Transformations-gruppe endlicher Ordnung.* (Im Druck) "Rad" Yugosl. Akad.

[7] BILINSKI, S., *Ein Symmetriemass von Vierecken der affinen Ebene.* (Im Druck) "Rad" Yugosl. Akad.

[8] BILINSKI, S., *Ein Regularitätsmass von Figuren in Kleinschen Räumen.* (In Vorbereitung).

Eingegangen den 21. Februar 1978