

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 54 (1979)

**Artikel:** Funktionale von primitiven Polygonen Kleinscher Ebenen.  
**Autor:** Bilinski, Stanko  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-41576>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Funktionale von primitiven Polygonen Kleinscher Ebenen

STANKO BILINSKI (Zagreb)

### 1. Einführung

Es sei  $\alpha$  irgendeine Kleinsche Ebene, also ein Paar  $(M, \Gamma)$ , wobei insbesondere  $M$  eine reelle Zahlenebene ist, welche eventuell irgendwie durch un-eigentliche Punkte erweitert sein kann, und die Fundamentalgruppe  $\Gamma$  dieser Ebene sei eine Liesche Gruppe. In jeder solchen Kleinschen Ebene gibt es eine einfache Punktfigur, für welche man die allgemeine Form von allen möglichen Funktionalen angeben kann. Diese Figuren sind eben die einfachsten endlichen diskreten Punktfiguren der betreffenden Ebene, welchen noch eine skalare Invariante zugeordnet werden kann, und diese Figuren seien jetzt erklärt.

Eine Menge von  $n$  komplanaren Punkten ( $n > 0$ ), welche im Falle  $n > 2$  zyklisch geordnet ist, soll ein “Polygon” heissen, und mit  $\pi_n$  bezeichnet werden. Im allgemeinen werden wir noch fordern, dass kein Punktetripel aus der Menge kollinear ist. Die Punkte der Menge nennen wir auch “Eckpunkte”, und die Zahl  $n$  die “Ordnung” des Polygons  $\pi_n$ . Ist nun die Fundamentalgruppe  $\Gamma$  der Ebene  $\alpha$  eine genau  $\nu$ -fach transitive Transformationsgruppe ( $\nu \geq 0$ ), dann soll  $\pi_{\nu+1}$  das “primitive Polygon” dieser Ebene heissen. Es sind z.B.  $\pi_2$  das primitive Polygon der metrischen Ebenen und  $\pi_5$  das primitive Polygon der projektiven Ebene.

Wenn die Fundamentalgruppe  $\Gamma$  der Ebene  $\nu$ -fach transitiv ist, so gehören alle Polygone  $\pi_\nu$  zu derselben Äquivalenzklasse. Es kann also den Polygone  $\pi_\nu$ , ausser dem trivialen Fall einer Konstante, kein Funktional zugeordnet werden. Die primitiven Polygone  $\pi_{\nu+1}$  sind also Polygone niedrigster Ordnung, welchen nichttriviale Funktionale zugeordnet werden können.

Unlängst hat H. Schwerdtfeger ([4], [5]) die Invarianten in allgemeinen Räumen in Bezug auf genau  $\nu$ -fach transitive Transformationsgruppen untersucht. Dabei hat er gefunden, dass jede genau  $\nu$ -fach transitive Transformationsgruppe eine “im wesentlichen einzige”  $(\nu+1)$ -Punkt-Invariante hat, d.h. jede andere Invariante kann nur eine Funktion dieser “Grundinvariante” sein.

Andererseits haben schon L. E. J. Brouwer [1] und später B. Kerékjártó [2] den folgenden Satz bewiesen:

Wenn die Transformationsgruppe der Geraden transitiv ist, muss sie notwen-

dig kontinuierlich sein. Auf einer Geraden können  $\nu$ -fach transitive Transformationsgruppen nur für  $\nu = 1, 2, 3$  bestehen.

Die einzigen transitiven Gruppen der Geraden sind also die Gruppe der Translationen, die affine Gruppe und die projektive Gruppe, und im Sinne des Satzes von Schwerdtfeger entsprechen diesen Gruppen der Reihe nach die Entfernung, das Teilverhältnis und das Doppelverhältnis als im wesentlichen einzig mögliche Invarianten. Nun haben aber noch J. Aczél, S. Gołąb, M. Kuczma und E. Siwek [3] zwei Beweise des Satzes gegeben, wonach das Doppelverhältnis die “im wesentlichen einzige” mögliche Invariante eines Punktquadrupels der projektiven Geraden ist.

Wahrscheinlich ist nun die folgende Erweiterung des Satzes von Brouwer und Kerékjártó gültig:

In einem  $n$ -dimensionalen Raum ( $n > 0$ ) können  $\nu$ -fach transitive Transformationsgruppen nur für  $\nu = 0, 1, 2, \dots, n+2$  bestehen.

Falls diese Vermutung gültig ist, kann keine Kleinsche Ebene bestehen mit dem primitiven Polygon  $\pi_{\nu+1}$ , wo  $\nu > 4$  wäre.

Es wird sich zeigen, dass es zwei Arten von primitiven Polygonen gibt. Bei den primitiven Polygonen “erster Art” wird eine Äquivalenzklasse durch einen einzigen invarianten Parameter  $x$  bestimmt. Dabei kann als Parameter irgendeine skalare Invariante gewählt werden unter der Bedingung, dass diese die Äquivalenzklasse eindeutig bestimmt.  $F(x)$  ist dann die allgemeine Form jedes Funktionals, wobei  $F$  eine beliebige Funktion ist. Primitive Polygone erster Art sind z.B. das Polygon  $\pi_3$  der äquiaffinen Ebene, und die Polygone  $\pi_2$  der Euklidischen Ebene und der Homothetieebene.

Für die Bestimmung einer Äquivalenzklasse von primitiven Polygonen “zweiter Art” sind dagegen zwei unabhängige invariante Parameter  $x, y$  nötig. Auch hier kann ein unabhängiges Paar von skalaren Invarianten als Parameterpaar gewählt werden, wenn nur dieses Paar die Klasse eindeutig bestimmt.

Es kann aber nicht eine beliebige Funktion  $F(x, y)$  ein Funktional dieser Klasse sein, obwohl sie in Bezug auf die Gruppe  $\Gamma$  invariant ist. Dieselbe Klasse von Polygonen zweiter Art kann nämlich im allgemeinen durch mehrere verschiedene invariante Parameterpaare  $x, y$  bestimmt werden, und da jedes Funktional der Klasse eindeutig zugeordnet ist, soll für alle diese verschiedenen Parameterpaare die Funktion  $F(x, y)$  denselben Wert annehmen. Darum soll diese Funktion auch in Bezug auf eine diskrete Transformationsgruppe  $G$  endlicher Ordnung der Parameterebene  $(x, y)$  invariant sein, nämlich jene Gruppe  $G$ , in Bezug auf welche alle jene Parameterpaare  $x, y$  äquivalent sind, welche dieselbe Klasse von Polygonen zweiter Art bestimmen.

Die primitiven Polygone zweiter Art sind z.B.:  $\pi_5$  der projektiven Ebene,  $\pi_4$  der affinen Ebene,  $\pi_3$  der äquiformen und zentroaffinen Ebene,  $\pi_2$  der Translationsebene und  $\pi_1$  der Identitätsebene.

Die Funktionale  $F(x)$  der primitiven Polygone erster Art ergeben sich durch die Lösung einer Funktionalgleichung.

Nach der Wahl eines geeigneten unabhängigen Invariantenpaars  $x, y$  einer Klasse primitiver Polygone zweiter Art werden sich dann durch die Lösung eines Systems von Funktionalgleichungen die Funktionale  $F(x, y)$  dieser Klasse ergeben.

Auf die oben angedeutete Weise wird also die allgemeine Form von allen Funktionalen der einzelnen Klassen primitiver Polygone bestimmt.

Wie schon gesagt, jedes primitive Polygon gehört zu einer von den zwei Arten. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt aus dem

**SATZ A.** *Die Fundamentalgruppe  $\Gamma$  einer Kleinschen Ebene sei  $m$ -gliedrig und genau  $\nu$ -fach transitiv. Dann ist*

$$m = 2\nu + \mu; (\nu = 0, 1, 2, \dots; \mu = 0, 1) \quad (1.1)$$

und das primitive Polygon  $\pi_{\nu+1}$  dieser Ebene ist von  $(2 - \mu)$ -ter Art.

Beweis: Es sei

$$\Gamma: \begin{cases} x \rightarrow \varphi(x, y, a_1, \dots, a_m), \\ y \rightarrow \psi(x, y, a_1, \dots, a_m), \end{cases}$$

wobei  $\varphi$  und  $\psi$  zwei beliebige analytische Funktionen ihrer  $(m+2)$  Argumente sind, und seien

$$\begin{aligned} P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots; \\ \bar{P}_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1), \bar{P}_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2), \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

zwei beliebige Folgen unabhängiger Punkte der Ebene. Da  $\Gamma$  genau  $\nu$ -fach transitiv ist, so ist sicher für beliebige Folgen (1.2) das System, welches die  $\nu$  ersten Gleichungspaare

$$\begin{aligned} x_i &= \varphi(x_i, y_i, a_1, \dots, a_m) \\ y_i &= \psi(x_i, y_i, a_1, \dots, a_m) \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

bilden, lösbar, aber das System von  $\nu+1$  solchen Paaren ist nicht lösbar. Darum ist

$$2\nu \leq m < 2\nu + 2,$$

und die Beziehung (1.1) ist also gültig.

Um nun ein Polygon aus einer Äquivalenzklasse von primitiven Polygonen  $\pi_{\nu+1}$  zu bestimmen, seien zunächst  $\nu$  Punkte der Ebene beliebig aber unabhängig gewählt. Durch die Wahl eines weiteren, von anderen unabhängigen,  $(\nu+1)$ -ten Punktes  $P_{\nu+1}$ , wird ein Polygon  $\pi_{\nu+1}$  aus der Äquivalenzklasse bestimmt, also auch diese Klasse selbst. Bei der Wahl des Punktes  $P_{\nu+1}(x_{\nu+1}, y_{\nu+1})$  verfügt man im ersten Falle beliebig mit beiden Koordinaten, während im zweiten Falle nur noch eine Koordinate frei wählbar ist. Daraus folgt aber unmittelbar, dass die Äquivalenzklasse jedes primitiven Polygons  $\pi_{\nu+1}$ , je nach der Art dieser Klasse, entweder durch einen oder durch zwei unabhängige Parameter bestimmt werden kann, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Nun stellen wir das Problem auf, die allgemeine Form von allen Funktionalen primitiver Polygone in einzelnen Kleinschen Ebenen zu bestimmen.

Es sei also die Fundamentalgruppe  $\Gamma$  einer Kleinschen Ebene  $m$ -gliedrig und genau  $\nu$ -fach transitiv, und sei

$$\pi_{\nu+1}\{P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_{\nu+1}(x_{\nu+1}, y_{\nu+1})\}$$

(im Falle  $\nu > 1$  zyklisch geordnet!)

ein primitives Polygon dieser Ebene. Wenn auf die Koordinaten der Eckpunkte die allgemeine Transformation der Gruppe  $\Gamma$  angewendet wird, so sei das durch

$$\Gamma(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{\nu+1}, y_{\nu+1})$$

bezeichnet. Alle Funktionale des primitiven Polygons  $\pi_{\nu+1}$  werden sich dann durch die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{\nu+1}, y_{\nu+1}) = F[\Gamma(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{\nu+1}, y_{\nu+1})] \quad (1.3)$$

ergeben. Falls  $\pi_{\nu+1}$  ein primitives Polygon erster Art ist, kann man diese Funktionalgleichung im allgemeinen einfach lösen. Im Falle des primitiven Polygons zweiter Art wird die Lösung dieser Gleichung weniger einfach. Dann aber wird uns eine andere Methode helfen die allgemeine Form von allen Funktionalen des Polygons  $\pi_{\nu+1}$  zu bestimmen.

## 2. Einige primitive Polygone erster Art

Es sei jetzt  $\mu = 1$  angenommen, dann ist nach Satz A das primitive Polygon  $\pi_{\nu+1}$  von erster Art. Hier werden für einige besondere wichtigere Fälle dieser

Polygone, wobei die Fundamentalgruppe der Ebene eine affine Untergruppe ist, die allgemeine Form von allen Funktionalen bestimmt.

### (a) $\pi_3$ der äquiaffinen Ebene

Im Falle der äquiaffinen Ebene nimmt die Funktionalgleichung (1.3) die Form

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = F(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}, a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}, a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13}, a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_{23}, a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a_{13}, a_{21}x_3 + a_{22}y_3 + a_{23}) \quad (2.1)$$

an, wobei die Koeffizienten  $a_{ij}$  der Beziehung

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2 = 1 \quad (2.2)$$

genügen müssen, und da die Punkte von  $\pi_3$  nicht kollinear sind, muss auch

$$2S \equiv \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.3)$$

gelten.

Es handelt sich also hier, die allgemeine Lösung einer Funktionalgleichung elfter Stufe zu finden. Dazu werden wir die Stufe dieser Gleichung um fünf reduzieren. Zu diesem Zweck setzen wir folgendes System von fünf Gleichungen auf:

$$\begin{aligned} a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13} &= 0, \\ a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a_{13} &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23} &= 1, \\ a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_{23} &= 1, \\ a_{21}x_3 + a_{22}y_3 + a_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)_{1,2,3,4,5}$$

Aus  $(2.4)_{1,2}$  folgt mit einem noch unbestimmten Faktor  $\lambda$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \lambda(y_2 - y_3), \\ a_{12} &= \lambda(x_3 - x_2), \\ a_{13} &= \lambda(x_2y_3 - x_3y_2), \end{aligned} \quad (2.5)_{1,2,3}$$

während das System von Gleichungen (2.4)<sub>3,4,5</sub> ergibt:

$$\begin{aligned} a_{21} &= \frac{1}{2S} (y_2 - y_1), \\ a_{22} &= \frac{1}{2S} (x_1 - x_2), \\ a_{23} &= \frac{1}{2S} [x_3(y_1 - y_2) + y_3(x_2 - x_1)]. \end{aligned} \quad (2.6)_{1,2,3}$$

Setzt man jetzt die Werte (2.5)<sub>1,2</sub> und (2.6)<sub>1,2</sub> in (2.2) ein, so folgt

$$\lambda = \pm 2S. \quad (2.7)$$

Wegen (2.4), (2.5), (2.6) und (2.7) nimmt jetzt die Gleichung (2.1) die Form

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = F(\pm 4S^2, 1, 0, 1, 0, 0). \quad (2.8)$$

an.

Es sei nun durch

$$f(u) = F(\pm 4u^2, 1, 0, 1, 0, 0) \quad (2.9)$$

eine neue Funktion  $f$  eingeführt; dann ist nach (2.8) und (2.9)

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = f\left(\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right). \quad (2.10)$$

Wenn also die Gleichung (2.1) eine Lösung hat, so kann diese immer auf die Form (2.10) gebracht werden, wobei zunächst die Funktion  $f$  durch (2.9) definiert ist. Man findet aber, dass die Funktion (2.10) die Gleichung (2.1) tatsächlich befriedigt, und zwar für jede beliebig gewählte Funktion  $f$ . Das ist also die allgemeine Lösung dieser Gleichung.

Jeder Klasse von primitiven Polygonen  $\pi_3$  der äquiaffinen Ebene ist also der invariante skalare Parameter

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

zugeordnet, und diese Funktional sei der “Inhalt” von  $\pi_3$  genannt. Jede andere skalare Invariante dieser Klasse von primitiven Polygonen ist dann eine Funktion von  $S$ .

### (b) $\pi_2$ der Euklidischen Ebene

Durch die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung

$$\begin{aligned} F(x_1, y_1, x_2, y_2) = \\ F(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}, a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}, a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13}, a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_{23}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

wobei die Koeffizienten  $a_{ij}$  den Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1, \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0, \end{aligned} \quad (2.12)_{1,2,3}$$

genügen müssen, werden alle Funktionale des primitiven Polygons  $\pi_2$  der Euklidischen Ebene bestimmt. Da die Gleichung (2.11) von siebenter Stufe ist, so muss diese Stufe um drei reduziert werden, um die allgemeine Lösung zu bekommen. Es sei also

$$\begin{aligned} a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23} = 0, \\ a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13} = 0, \\ a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_{23} = 0 \end{aligned} \quad (2.13)_{1,2,3}$$

angenommen, dann folgt zunächst aus  $(2.13)_{1,3}$  unter Benutzung von  $(2.12)_2$

$$a_{21} = \frac{y_1 - y_2}{\pm d}, \quad a_{22} = \frac{x_2 - x_1}{\pm d}, \quad a_{23} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\pm d}, \quad (2.14)_{1,2,3}$$

wobei zur Abkürzung

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (2.15)$$

gesetzt ist.  $(2.12)_3$ ,  $(2.14)_{1,2}$  und  $(2.12)_1$  ergeben dann

$$a_{11} = \frac{x_1 - x_2}{\pm d}; \quad a_{12} = \frac{y_1 - y_2}{\pm d}. \quad (2.16)_{1,2}$$

Aus (2.13)<sub>2</sub> und (2.16)<sub>1,2</sub> folgt noch

$$a_{13} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 - x_2^2 - y_2^2}{\pm d}. \quad (2.17)$$

Mit Benutzung von (2.16), (2.17) und (2.13) folgt dann aus (2.11)

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2) = F(\pm d, 0, 0). \quad (2.18)$$

Wird nun durch

$$f(d) = F(\pm d, 0, 0) \quad (2.19)$$

eine neue Funktion  $f$  eingeführt, so ist nach (2.11), (2.18) und (2.19)

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2) = f(d). \quad (2.20)$$

Dabei ist  $f$  eine durch (2.19) definierte Funktion. Da aber (2.20) mit jeden beliebigen Funktion  $f$  der Gleichung (2.11) genügt, so ist das die allgemeine Lösung der Gleichung (2.11). Die Funktion (2.15), als einfaches Funktional des primitiven Polygons  $\pi_2$ , soll dabei die "Entfernung" der Punkte  $P_1(x_1, y_1)$  und  $P_2(x_2, y_2)$  heissen.

### (c) $\pi_2$ der Homothetieebene

Um alle Funktionale des primitiven Polygons der Homothetieebene zu bestimmen, muss auch jetzt die Funktionalgleichung (2.11) gelöst werden, nun aber müssen die Koeffizienten  $a_{ij}$  den Bedingungen

$$a_{11} = a_{22} \neq 0, \quad a_{12} = a_{21} = 0 \quad (2.21)$$

genügen. Die Variablen der so erhaltenen Funktionalgleichung verbinden wir noch mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11} y_1 + a_{23} &= 1, \\ a_{11} x_2 + a_{13} &= 0, \\ a_{11} y_2 + a_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Da die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  nicht zusammenfallen, so können  $x_1 - x_2$  und  $y_1 - y_2$  nicht zugleich verschwinden. Es sei zunächst der Fall  $y_1 \neq y_2$  betrachtet.

Dann geht (2.11) wegen (2.21) und (2.22) in

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2) = F\left(\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}, 1, 0, 0\right)$$

über. Wird nun durch

$$F(u, 1, 0, 0) = f(u)$$

eine neue Funktion  $f$  eingeführt, so findet man, dass

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2) = f\left(\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}\right) \quad (2.23)$$

die allgemeine Lösung von (2.11) für den Fall (2.21) darstellt, wobei  $f$  beliebig ist.

Falls  $x_1 \neq x_2$  gültig ist, beweist man auf analoge Weise, dass man die allgemeine Lösung in der Form

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2) = g\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right) \quad (2.24)$$

schreiben kann, wobei auch jetzt  $g$  eine beliebige Funktion ist. Die Lösungen (2.23) und (2.24) sind aber offensichtlich äquivalent. Die Grundinvariante  $(y_1 - y_2)/(x_1 - x_2)$  nennen wir die, „Steigung“ des Punktpaares  $\pi_e$ .

### 3. Einige primitive Polygone zweiter Art

Im Falle  $\mu = 0$  wird das primitive Polygon  $\pi_{\nu+1}$  der Ebene von zweiter Art. Hier wird die allgemeine Form aller Funktionale für einige besondere Fälle von solchen Polygonen bestimmt.

#### (a) $\pi_5$ der projektiven Ebene

Da die Fundamentalgruppe  $\Gamma$  der projektiven Ebene genau vierfach transitiv ist, das primitive Polygon dieser Ebene ist  $\pi_5$ .

Im Folgenden werden alle vorkommenden Indizes von Elementen des Fünfecks  $\pi_5$  auf die kleinste natürliche Zahl modulo 5 reduziert, da die Eckpunkte  $P_i$  von  $\pi_5$  zyklisch geordnet sind.

Es sei zunächst  $\pi_5$  zum “vollständigen Fünfeck” ergänzt. Für  $i = 1, 2, \dots, 5$  seien also:

$$\begin{aligned} s_i &= P_{i-2} P_{i+2} \text{ die “Seite”,} \\ d_i &= P_{i-1} P_{i+1} \text{ die “Diagonale”,} \\ D_i &= d_{i-2} d_{i+2} \text{ der “Diagonalpunkt”} \\ N_i &= s_i d_i \text{ der “Nebenpunkt”} \end{aligned} \tag{3.1}$$

des “vollständigen Fünfecks”  $\pi_5$ .

Da kein Tripel von Eckpunkten des Polygons  $\pi_5$  kollinear ist, sind alle Elemente (3.1) eindeutig bestimmt und verschieden. Aus (3.1) folgt, dass jede Diagonale mit fünf Punkten inzidiert, und zwar

$$d_i \not\propto N_i, P_{i+1}, D_{i+2}, D_{i+3}, P_{i+4}. \tag{3.2}$$

Daraus folgt, dass auch die Beziehungen

$$d_i = P_{i+1} D_{i+3}, \tag{3.3}$$

$$d_i = D_{i+2} P_{i+4} \tag{3.4}$$

gültig sind. Aus (3.1) folgt auch

$$P_i = d_{i-1} d_{i+1}. \tag{3.5}$$

Nach (3.2) kann man jedem  $\pi_5$  fünf Doppelverhältnisse

$$\lambda_i = (P_{i+1} D_{i+2} D_{i+3} P_{i+4}); \quad (i = 1, 2, \dots, 5) \tag{3.6}$$

zuordnen, und das sind invariante Parameter der durch  $\pi_5$  bestimmten Klasse von äquivalenten Polygonen. Von diesen fünf Parametern sind nur zwei unabhängig, z.B. zwei zyklisch aufeinanderfolgende, und durch diese ist dann auch eine ganze Äquivalenzklasse von primitiven Polygonen  $\pi_5$  eindeutig bestimmt.

Um das zu beweisen, nehmen wir an, dass für ein bestimmtes  $i$  die Parameterwerte  $\lambda_i$  und  $\lambda_{i+1}$  beliebig gegeben sind, wobei

$$\begin{aligned} \lambda_i &= (P_{i+1} D_{i+2} D_{i+3} P_{i-1}), \\ \lambda_{i+1} &= (P_{i+2} D_{i+3} D_{i+4} P_i) \end{aligned} \tag{3.7}$$

gelten soll. Um jetzt ein  $\pi_5$  aus der durch diese Parameterwerte bestimmten Klasse (also auch die Klasse selbst) zu bestimmen, können in der projektiven Ebene 4 beliebige Punkte  $P_{i-1}$ ,  $P_i$ ,  $P_{i+1}$ ,  $P_{i+2}$ , von welchen keine drei kollinear sind, als Eckpunkte von  $\pi_5$  gewählt werden, denn die Gruppe  $\Gamma$  ist jetzt vierfach transitiv. Dann sind nach (3.1) auch die Diagonalen  $d_i$  und  $d_{i+1}$  bestimmt, und ebenso der Diagonalpunkt  $D_{i+3}$ . Da aber nach Voraussetzung die Doppelverhältniswerte (3.7) gegeben sind, sind mithin auch die Punkte  $D_{i+2}$  und  $D_{i+4}$  bestimmt. Aus (3.4) und (3.3) folgt dann, dass auch die Diagonalen  $d_{i+2}$  und  $d_{i+4}$  bestimmt sind. Dann ist aber nach (3.5) auch der fünfte Eckpunkt

$$P_{i+3} = d_{i+2}d_{i+4}$$

des Polygons  $\pi_5$ , also auch das Polygon  $\pi_5$  vollständig bestimmt, und damit auch seine Äquivalenzklasse.

Da also schon zwei von den fünf Parametern (3.6) eine Äquivalenzklasse von Polygonen  $\pi_5$  bestimmen, so bestimmen sie auch die drei übrigen Parameter. Wir werden die unmittelbaren Beziehungen zwischen diesen Parametern finden.

Zu diesem Zweck projizieren wir die Diagonale  $d_i$  aus dem Eckpunkt  $P_i$ , und die Diagonale  $d_{i+1}$  aus dem Eckpunkt  $P_{i+1}$ , beide auf die Diagonale  $d_{i+3}$ . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man dabei  $i = 1$  setzen. Es sei weiter bezeichnet:

$$\lambda_1 = x, \quad \lambda_2 = y, \quad \lambda_3 = u, \quad \lambda_4 = v, \quad \lambda_5 = w.$$

Dann wird

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (P_2D_3D_4P_5) = (N_4D_2P_3P_5) = x, \\ \lambda_2 &= (P_3D_4D_5P_1) = (P_3P_5D_1N_4) = y, \\ \lambda_4 &= (P_5D_1D_2P_3) = v. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Nun gilt aber für die fünf Punkte auf der Diagonale  $d_4$  die Identität von Möbius:

$$(P_3P_5D_1N_4)(P_3P_5N_4D_2)(P_3P_5D_2D_1) = 1,$$

oder nach (3.8)  $yx(v-1)/v = 1$ .

Daraus berechnet man  $v$  abhängig von  $x$  und  $y$ , und durch zyklische Vertauschungen folgen die weiteren Beziehungen:

$$\begin{aligned} x &= \frac{uv}{uv-1}, & y &= \frac{vw}{vw-1}, \\ u &= \frac{wx}{wx-1}, & v &= \frac{xy}{xy-1}, & w &= \frac{yu}{yu-1}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Aus (3.9) findet man, dass zwischen diesen fünf invarianten Parametern auch die symmetrische Gleichung

$$xyuvw = (xy-1)(yu-1)(uv-1)(vw-1)(wx-1) \tag{3.10}$$

besteht.

Von den Gleichungen (3.9) sind drei unabhängig. Man kann z.B. die Parameter  $x, y$  als unabhängig betrachten, dann findet man

$$u = \frac{xy-1}{(x-1)y}, \quad v = \frac{xy}{xy-1}, \quad w = \frac{xy-1}{x(y-1)}.$$

Wenn ein primitives Polygon  $\pi_i$  durch das Paar  $x, y$  von unabhängigen und invarianten Parametern bestimmt wird, so sei es durch  $\pi_i(x, y)$  bezeichnet.

Die Eckpunkte von  $\pi_5$ , also auch die invarianten Parameter  $\lambda_i$  sind zyklisch geordnet, und jedes Paar von zyklisch benachbarten Parametern  $\lambda_i, \lambda_{i+1}$  bestimmt das Polygon  $\pi_5$ . D.h., die Polygone

$$\pi_5(x, y), \pi_5(y, u), \pi_5(u, v), \pi_5(v, w), \pi_5(w, x)$$

sind alle projektiv identisch, es sind aber auch die Polygone  $\pi_5(x, y)$  und  $\pi_5(y, x)$  äquivalent. Jedes Funktional des Polygons  $\pi_5$  muss darum invariant sein in Bezug auf die Diedergruppe  $G_{10} = T_5 S_2$ , welche als Produkt zweier Gruppen bestimmt ist; einer zyklischen Gruppe  $T_5$  mit der Erzeugenden

$$\tau \cdots \begin{cases} x \rightarrow y, \\ y \rightarrow \frac{xy-1}{(x-1)y} \end{cases}$$

und einer Involution  $S_2$  mit der Erzeugenden

$$\sigma \cdots \begin{cases} x \rightarrow y, \\ y \rightarrow x. \end{cases}$$

Nun gilt aber der folgende

**SATZ B.** *Sei  $B$  ein Bereich der reellen Zahlenebene, welche auch irgendwie durch uneigentliche Punkte erweitert werden kann, und  $G = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}$  sei eine diskrete Transformationsgruppe endliche Ordnung, wobei jede Transformation  $\omega_i$  den Bereich  $B$  auf sich abbildet. Jede skalare Funktion  $F$ , welche in Bezug auf die Gruppe  $G$  invariant und im Bereich  $B$  definiert ist, kann dann in der Form*

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^r f[\omega_i(x, y)] \quad (3.11)$$

*und auch in der Form*

$$F(x, y) = \prod_{i=1}^r g[\omega_i(x, y)] \quad (3.12)$$

*dargestellt werden, wobei  $f$  und  $g$  zwei beliebige Funktionen sind. Diese beiden Darstellungen sind dabei äquivalent. (Der Beweis dieses Satzes in allgemeinerer Form ist in [6] gegeben.)*

Auf Grund des Satzes B und Formel (3.11) bekommt man dann den

**SATZ C.** *Jedes Funktional eines Polygons  $\pi_5$  der projektiven Ebene kann in der Form*

$$\begin{aligned} F(x, y) = & f(x, y) + f\left(y, \frac{xy-1}{(x-1)y}\right) + f\left(\frac{xy-1}{(x-1)y}, \frac{xy}{xy-1}\right) \\ & + f\left(\frac{xy}{xy-1}, \frac{xy-1}{x(y-1)}\right) + f\left(\frac{xy-1}{x(y-1)}, x\right) + f\left(x, \frac{xy-1}{x(y-1)}\right) + \\ & + f\left(\frac{xy-1}{x(y-1)}, \frac{xy}{xy-1}\right) + f\left(\frac{xy}{xy-1}, \frac{xy-1}{(x-1)y}\right) + f\left(\frac{xy-1}{(x-1)y}, y\right) + f(y, x) \end{aligned} \quad (3.13)$$

*dargestellt werden, wobei  $f$  eine beliebige Funktion ist, während die Parameter  $x, y$  die zwei auf beliebigen zyklisch aufeinanderfolgenden Diagonalen des Polygons  $\pi_5$  bestimmten und durch (3.6) definierten Doppelverhältnisse sind. Auf Grund der Formel (3.12) bekommt man eine zur (3.13) analoge Darstellung von Funktionen des Polygons  $\pi_5$ , jetzt aber in Produktform.*

In Hinblick auf spätere Anwendungen sei hier noch der Fall des projektiv regulären Fünfecks  $\pi_5$  betrachtet. Dieses wird durch die Beziehungen  $x = y = u =$

$= v = w$  ausgezeichnet. Aus (3.10) bekommt man dann die Gleichung

$$(x^2 - 1)^5 - x^5 = 0,$$

welche nur zwei reelle Wurzeln

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}); \quad x_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

hat. Durch  $x_1$  ist die Klasse von projektiv konvexen regulären Fünfecken bestimmt, und  $x_2$  gehört zur Klasse der projektiv regulären Sternfünfecken.

Es ist selbstverständlich, dass man auf duale Weise das “vollständige Fünfseit”  $\Sigma_5$  der projektiven Ebene definieren kann. Dann kann auch die allgemeine Form von allen seinen Funktionalen angegeben werden.

### (b) $\pi_4$ der affinen Ebene

In dem primitiven Polygon  $\pi_4$  der affinen Ebene sei  $M$  der Schnittpunkt der Diagonalen  $P_1P_3$  und  $P_2P_4$ . Dann wird eine affine Klasse von Vierecken  $\pi_4(x, y)$  durch zwei Teilverhältnisse

$$x = \frac{P_1M}{MP_3}, \quad y = \frac{P_2M}{MP_4} \quad (3.14)$$

bestimmt, welche invarianten Parameter dieser Klasse sind. Auf eine ähnliche Weise wie bei dem  $\pi_5$  der projektiven Ebene wird bewiesen:

**SATZ D.** *Jedes Funktional einer affinen Klasse von primitiven Polygonen  $\pi_4$  kann in der Form*

$$F(x, y) = f(x, y) + f\left(y, \frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) + f\left(\frac{1}{y}, x\right) + f(y, x) + f\left(x, \frac{1}{y}\right) + f\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{x}, y\right)$$

*dargestellt werden, wobei  $f$  eine beliebige Funktion ist, und  $x, y$  die durch (3.14) definierten invarianten Parameter sind. Auch hier kann man für das allgemeine Funktional anstatt der Summenform die Produktform angeben.*

(Ein Beweis dieses Satzes befindet sich in [7] Gleichung 8a.)

Es kann noch die Frage gestellt werden, ob man im Satz C und Satz D die Funktionen  $f$  und  $g$  so wählen kann, dass die so gewonnenen Funktionale eine unmittelbar anschauliche geometrische Bedeutung haben. Diese Frage wird in einigen weiteren Arbeiten beantwortet [7], [8].

### (a) $\pi_3$ der äquiformen und zentroaffinen Ebenen

Es seien in der äquiformen Ebene und in der zentroaffinen Ebene  $P_i(\xi_i, \eta_i)$ ; ( $i = 1, 2, 3$ ) die Eckpunkte des Polygons  $\pi_3$ , wobei vorausgesetzt sei, dass in der zentroaffinen Ebene kein Paar von gegebenen Eckpunkten mit dem Zentrum der zentroaffinen Transformationen kollinear ist.

Im Folgenden seien alle Indizes auf die kleinste natürliche Zahl modulo 3 reduziert. Dann seien die folgenden Bezeichnungen eingeführt.

In der äquiformen Ebene:

$$s_i = \sqrt{(\xi_{i+1} - \xi_{i+2})^2 + (\eta_{i+1} - \eta_{i+2})^2}, \quad (3.15)$$

$$x = \frac{s_2}{s_3}, \quad y = \frac{s_3}{s_1}, \quad z = \frac{s_1}{s_2}.$$

In der zentroaffinen Ebene:

$$S_i = \xi_{i+1}\eta_{i+2} - \xi_{i+2}\eta_{i+1}, \quad (3.16)$$

$$x = \frac{S_2}{S_3}, \quad y = \frac{S_3}{S_1}, \quad z = \frac{S_1}{S_2}.$$

In beiden betrachteten Ebenen sind also jedem  $\pi_3$  drei in Bezug auf die Transformationsgruppe  $\Gamma$  der Ebene invariante Parameter  $x, y, z$  zugeordnet. Von diesen sind nur zwei unabhängig. Dabei ist der Variabilitätsbereich  $B$  dieser Parameter im Falle der äquiformen Ebene durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} xy + y - 1 &\geq 0, \\ xy - y + 1 &\geq 0, \\ -xy + y + 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

bestimmt. Im Falle der äquiaffinen Ebene bildet den Bereich  $B$  die ganze Zahlenebene mit Ausnahme des Koordinatenursprungs.

Jedes Funktional  $F(x, y)$ , welches in beiden Ebenen dem primitiven Polygon  $\pi_3$  zugeordnet werden kann, muss in Bezug auf die Diedergruppe  $G_6 = T_3S_2$  invariant sein. Dabei ist  $T_3$  die zyklische Gruppe, welche durch die Erzeugende

$$\tau \cdots \begin{cases} x \rightarrow y, \\ y \rightarrow \frac{1}{xy} \end{cases}$$

bestimmt ist, während die Gruppe  $S_2$  durch die involutorische Transformation

$$\sigma \cdots \begin{cases} x \rightarrow xy, \\ y \rightarrow \frac{1}{y} \end{cases}$$

erzeugt wird.

Daraus folgt der

SATZ E. *Jedes Funktional des Polygons  $\pi_3$  in der äquiformen und zentroaffinen Ebene kann in der Form*

$$F(x, y) = f(x, y) + f\left(y, \frac{1}{xy}\right) + f\left(\frac{1}{xy}, x\right) + f\left(xy, \frac{1}{y}\right) + f\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{x}, xy\right)$$

*dargestellt werden, wobei  $f$  eine beliebige Funktion ist, und  $x, y$  zwei invariante und unabhängige, durch (3.15) bzw. (3.16) definierte Parameter sind.*

## LITERATUR

- [1] BROUWER, L. E. J., *Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie*, I., Math. Annalen, 67, (1909), 246–267.
- [2] DE KERÉKJÁRTÓ, B., *Sur les groupes transitifs de la droite*, Acta Univ. Szeged., Acta Sci. Math. 10, (1941–1943), 21–35.
- [3] ACZÉL, J. GOŁĄB, S. KUCZMA M. und SIWEK, E., Das Doppelverhältnis als Lösung einer Funktionalgleichung, Ann. Polon. Math. 9 (1960–1961), 183–187.
- [4] SCHWERDTFEGER, H., On  $(n+1)$ -Point Invariants of the Group  $GL(n, F)$ , Linear and Multilinear Algebra, 3 (1975), 105–109.
- [5] SCHWERDTFEGER, H., Invariants of a Class of Transformation Groups, Aeq. Math. 14 (1976), 105–110.
- [6] BILINSKI, S., *Die Invarianten einer diskreten Transformationsgruppe endlicher Ordnung*. (Im Druck) "Rad" Yugosl. Akad.
- [7] BILINSKI, S., *Ein Symmetriemass von Vierecken der affinen Ebene*. (Im Druck) "Rad" Yugosl. Akad.
- [8] BILINSKI, S., *Ein Regularitätsmass von Figuren in Kleinschen Räumen*. (In Vorbereitung).

Eingegangen den 21. Februar 1978