Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 54 (1979)

Artikel: Sur les Plongements du Type Déformation.

Autor: Hirschowitz, André

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41564

Comment. Math. Helvetici **54** (1979) 126–132 Birkhäuser Verlag, Basel

Sur les Plongements du Type Déformation

par André Hirschowitz

§0. Introduction

Soient $f_1 : A \to Y_1$ et $f_2 : A \to Y_2$ deux plongements d'une même variété analytique compacte A (dans toute la suite, on ne plonge que des variétés compactes) dans deux variétés Y_1 et Y_2. On dit que ces deux plongements sont *équivalents* s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d] \arrow[dr, "f_2"] & \\ Y_1 & Y \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[r, "\beta"] & Y_2 \end{tikzcd}$$

dans lequel α et β soient des plongements ouverts.

Si $g : A \to X$ est un plongement, on note $A_g^{(n)}$ (ou $A^{(n)}$ s'il n'y a pas risque de confusion) le voisinage infinitésimal d'ordre n de A dans X et $A_g^{(\infty)}$ le voisinage formel de A dans X. Disons que g est *trivial* si g est équivalent à un plongement de A comme fibre d'un produit et que g est *formellement trivial* si $A_g^{(\infty)}$ est le produit de A par un espace formel. Disons maintenant que g est *du type déformation* si g est équivalent au plongement de A comme fibre spéciale dans l'espace total d'une déformation de A. Disons que g est *formellement du type déformation* si $A_g^{(\infty)}$ est l'espace total d'une déformation de A paramétrée par un espace formel. On démontre ici que tout plongement formellement du type déformation est du type déformation. On en déduit les résultats suivants concernant la détermination des plongements: tout plongement formellement trivial est trivial; tout plongement d'une variété X_0 vérifiant $H^1(X_0, \mathcal{O}) = 0$ dans une déformation à un paramètre dont la fibre générale est rigide, est de détermination finie. On retrouve aussi le résultat suivant de Griffiths: si $H^1(A, \mathcal{O}) = H^1(A, \theta) = 0$, θ désignant le fibré tangent, alors tout plongement de A dont le fibré normal est trivial est un plongement trivial.

D'autre part, on en déduit des exemples de plongements formels ne convergeant pas.

Je remercie A. Douady qui m'a expliqué la démonstration du Lemme 1 et H.

W. Schuster qui s'est intéressé à cette affaire et qui m'a indiqué que la Proposition 2 est dûe à Griffiths.

§1. Une application de la thèse de Douady

LEMME 1. *Soit $\Pi: X \to S$ un morphisme propre et plat, où S est un germe et la fibre est connexe en ce sens que les fontions holomorphes globales y sont constantes. Alors le morphisme naturel de $\mathcal{O}_S$ dans $\Pi_* \mathcal{O}_X$ est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION (dûe à Douady). On sait (cf Kiehl-Verdier [11]) qu'il existe un complexe $0 \to L^\cdot$ de fibrés sur S tel que, pour tout changement de base $T \to S$, le complexe $0 \to L^\cdot(T)$ ait pour cohomologie la suite des $R^q\Pi^T_* \mathcal{O}_X(T)$ où Π^T désigne la projection de $X' = T \times_S X$ sur T. On a $\mathcal{O}_X(T) = \mathcal{O}_{X'}$, et $\Pi^T_* \mathcal{O}_{X'}$ reçoit $\mathcal{O}_T$ ce qui permet d'augmenter le complexe avec le fibré trivial C_S de façon que la cohomologie de $C_T \to L^0(T) \to L^1(T)$ soit maintenant conoyau de $\mathcal{O}_T \to \Pi^T_* \mathcal{O}_{X'}$. On applique cela à $T = \{s\}$.

Le conoyau de $\mathcal{O}_T \to \Pi^T_* \mathcal{O}_{X'}$ est alors nul par hypothèse. La suite de fibrés $C_S \to L^0(S) \to L^1(S)$ est donc exacte au point s. Par suite, elle est exacte au voisinage, c'est-à-dire sur S, ce qui signifie que $\mathcal{O}_S \to \Pi_* \mathcal{O}_X$ est surjectif. Comme ce morphisme est évidemment injectif, c'est un isomorphisme. C.Q.F.D.

LEMME 2. *Soit $X' \to T$ un morphisme de germes et Y un sous-espace de X' plat sur T. Si les fibres $Y(t)$ et $X'(t)$ sont égales, alors Y et X' sont égaux.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{F}$ l'idéal de Y. La suite $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{O}_{X'} \to \mathcal{O}_Y \to 0$ est exacte. Comme $\mathcal{O}_Y$ est $\mathcal{O}_T$-plat elle le reste par l'extension des scalaires,

$$0 \to \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_T/\mathcal{M}_t \to \mathcal{O}_{X(t)} \to \mathcal{O}_{Y(t)} \to 0.$$

L'hypothèse implique donc $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_T/\mathcal{M}_t = 0$. Il en résulte que $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{X'}/\mathcal{M}_x$ est nul et d'après le lemme de Nakayama, que $\mathcal{F}$ est nul. C.Q.F.D.

LEMME 3. *Soit $X \to S$ un morphisme propre et plat. On suppose que les fibres sont connexes au sens analytique* (cf. Lemme 1). *Alors le morphisme naturel de S dans l'espace de Douady $\mathcal{D}(X)$ des sous-espaces analytiques compacts de X est un plongement ouvert.*

DÉMONSTRATION. Soit 0 un point de S, soit X_0 la fibre de X au-dessus de 0 et soit $\varphi: Y \to T$ un germe de déformation de X_0 dans X. On peut supposer que S est de Stein. Alors le morphisme naturel de Y dans S se factorise à travers T

d'après le Lemme 1. Soit f le morphisme correspondant de T dans S et posons $X'=f^*(X)$. Le morphisme naturel de Y dans X' est un plongement fermé, comme celui de Y dans $X\times T$, et il commute à la projection sur T.

En outre, les fibres de Y et X' sont égales. D'après le Lemme 2, on a alors $X'=Y$, ce qui prouve que S a la propriété universelle cherchée. C.Q.F.D.

THÉORÈME. *Si g est formellement du type déformation, alors g est du type déformation.*

DÉMONSTRATION. On utilise la solution du petit problème des modules (DOUADY [3]). Soit $\mathscr{D}$ l'espace des sous-espaces analytiques compacts de X, soit a le point de $\mathscr{D}$ correspondant à A et soit $D^{(n)}$ le voisinage infinitésimal d'ordre n du point a dans $\mathscr{D}$. Soit $\mathscr{H}$ le sousespace universel de $\mathscr{D}\times X$ et soit $\mathscr{H}^{(n)}$ sa restriction au-dessus de $\mathscr{D}^{(n)}$. On va montrer que la projection naturelle de $\mathscr{H}$ sur X est un plongement ouvert au voisinage de la fibre spéciale. D'après le Nullstellensatz $\mathscr{H}^{(n)}$ est un sous-espace d'un voisinage infinitésimal de $\{a\}\times A$ donc d'un produit $\mathscr{D}^{(p)}\times A^{(p)}$. Comme $\mathscr{H}^{(n)}$ est aussi un sous-espace de $\mathscr{D}^{(n)}\times X$, c'est un sous-espace de $\mathscr{D}^{(n)}\times A^{(p)}$. Soit $\mathscr{D}_p$ la composante connexe du point a_p correspondant à A dans l'espace des sous-espaces analytiques compacts de $A^{(p)}$ et $\mathscr{H}_p$ le sous-espace universel de $\mathscr{D}_p\times A^{(p)}$.

Par fonctorialité du passage au n^e voisinage infinitésimal, le morphisme de $\mathscr{D}^{(n)}$ dans $\mathscr{D}_p$ correspondant au sous-espace $\mathscr{H}^{(n)}$ de $\mathscr{D}^{(n)}\times A^{(p)}$ se factorise à travers le n^e voisinage infinitésimal de a_p dans $\mathscr{D}_p$. D'après le Lemme 3, ce voisinage infinitésimal est naturellement isomorphe à $\mathscr{D}_n$, la restriction correspondante de $\mathscr{H}_p$ s'identifiant à $\mathscr{H}_n$. Cela signifie que $\mathscr{H}^{(n)}$ est en fait un sous-espace de $\mathscr{D}^{(n)}\times A^{(n)}$. Soit α le morphisme ainsi défini de $\mathscr{D}^{(n)}$ dans $\mathscr{D}_n$. Le morphisme de $\mathscr{D}_n$ dans $\mathscr{D}$ correspondant au sous-espace $\mathscr{H}_n$ de $\mathscr{D}_n\times X$ se factorise, lui aussi par fonctorialité du passage aux voisinages infinitésimaux à travers $\mathscr{D}^{(n)}$. Soit β le morphisme ainsi défini de $\mathscr{D}_n$ dans $\mathscr{D}^{(n)}$. La propriété universelle de $\mathscr{D}_n$ assure que $\alpha\circ\beta$ est l'identité. La propriété universelle de $\mathscr{D}$ assure que l'injection naturelle de $\mathscr{D}^{(n)}$ dans $\mathscr{D}$ se factorise à travers $\beta\circ\alpha$ donc que $\beta\circ\alpha$ est l'identité. Par conséquent α est un isomorphisme. D'après le Lemme 3, la projection naturelle de $\mathscr{H}_n$ sur $A^{(n)}$ est un isomorphisme. Comme α est un isomorphisme, la projection naturelle de $\mathscr{H}^{(n)}$ sur $A^{(n)}$ est aussi un isomorphisme. Cela étant vrai pour tout n, la projection de $\mathscr{H}$ sur X est un plongement ouvert. C.Q.F.D.

COROLLAIRE. *Si $H^1(A,\mathcal{O})=0$ et si le fibré normal au plongement g est trivial, alors g est du type déformation.*

DÉMONSTRATION. Il est bien connu que si g est du type déformation, le fibré normal est trivial. Inversement, soit E l'espace vectoriel des sections du fibré normal. Si le fibré normal est trivial, le morphisme naturel de $A^{(1)}$ dans le premier voisinage infinitésimal de l'origine dans E est lisse et a pour fibre spéciale A. Montrons par récurrence que q est formellement du type déformation.

On suppose que le plongement de A dans $A^{(n)}$ est une déformation dont la base est le voisinage infinitésimal d'ordre n, $F^{(n)}$, de l'origine dans C^k. Soit $(\Pi_1, \ldots, \Pi_k)$ le morphisme correspondant de $A^{(n)}$ dans C^k. Si $\mathcal{F}$ désigne le faisceau d'idéaux de A dans X, la suite exacte

$$0 \to \mathcal{F}^{n+1}/\mathcal{F}^{n+2} \to \mathcal{O}/\mathcal{F}^{n+2} \to \mathcal{O}/\mathcal{F}^{n+1} \to 0$$

donne naissance à la suite exacte:

$$\mathcal{O}(A^{(n+1)}) \to \mathcal{O}(A^{(n)}) \to H^1(A, \mathcal{F}^{n+1}/\mathcal{F}^{n+2}).$$

Mais $\mathcal{F}^{n+1}/\mathcal{F}^{n+2}$ est une puissance symétrique du fibré normal. L'hypothèse assure par conséquent que la restriction $\mathcal{O}(A^{(n+1)}) \to \mathcal{O}(A^{(n)})$ est surjective. Soit alors $(\tilde{\Pi}_1, \ldots, \tilde{\Pi}_k)$ un prolongement de $(\Pi_1, \ldots, \Pi_k)$ à $A^{(n+1)}$. Comme n est au moins égal à 1, il suffit que $(\Pi_1, \ldots, \Pi_k)$ soit lisse (à valeurs dans $F^{(n)}$) pour que $(\tilde{\Pi}_1, \ldots, \tilde{\Pi}_k)$ soit lisse (à valeurs dans $F^{(n+1)}$). Il reste à appliquer le théorème pour obtenir le corollaire. C.Q.F.D.

§2. Determination de plongements

Le problème général est le suivant: soit $g: A \to X$ un plongement; existe-t-il un entier n éventuellement infini tel que tout plongement $g': A \to X'$ où $A_{g'}^{(n)}$ est isomorphe à $A_g^{(n)}$ soit équivalent à g? S'il existe un tel n fini, on dit que g est de détermination finie. Le problème a été résolu dans le cas où le fibré normal est négatif (Grauert [4] Hironaka–Rossi [10]) et abordé dans le cas où le fibré normal est positif (Nirenberg–Spencer [12], Griffiths [5]) et dans le cas où le fibré normal est trivial (Griffiths [5]). On s'intéresse ici à ce dernier cas.

PROPOSITION 1. *Tout plongement formellement trivial est trivial.*

DÉMONSTRATION. Tout plongement formellement trivial est en particulier formellement du type déformation donc du type déformation d'après le théorème. La proposition résulte alors du résultat de Schuster (cf [13]) selon lequel toute déformation formellement triviale est triviale. C.Q.F.D.

PROPOSITION 2. (Griffiths [5] Prop. 3.1.): *Si $H^1(A, \mathcal{O}) = H^1(A, \theta) = 0$ (ici θ désigne le fibré tangent), alors tout plongement de A dont le fibré normal est trivial est le plongement trivial.*

DÉMONSTRATION. D'après le Corollaire du théorème, un tel plongement est du type déformation et comme $H^1(A, \theta)=0$, toute déformation de A est triviale. C.Q.F.D.

PROPOSITION 3. *Soit A compacte avec $H^1(A, \mathcal{O})=0$. Soit $g: A \to X$ un plongement dans une déformation à un paramètre dont la fibre générale F est rigide (c'est-à-dire vérifie $H^1(F, \theta)=0$). Alors g est de détermination finie.*

DÉMONSTRATION. D'après un théorème d'Hervier (cf [8]), il existe un entier n tel que tout plongement $g': A \to X'$ dans une déformation à un paramètre vérifiant $A_g^{(n)} \approx A_{g'}^{(n)}$ est équivalent à g. Mais tout plongement $g': A \to X'$ vérifiant $A_g^{(n)} \approx A_{g'}^{(n)}$ (avec $n \geq 1$) est du type déformation d'après le Corollaire, ce qui permet de conclure. C.Q.F.D.

EXEMPLE. La Proposition s'applique à tout plongement de la variété de Hirzebruch Σ_{2n} comme fibre spéciale d'une famille à un paramètre de $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$.

§3. Plongements formels et plongements convergents

En géométrie algébrique, on connait des plongements formels de la sphère de Riemann qui ne proviennent pas de plongements dans des variétés algébriques (Hironaka–Matsumura [9]). Mais il se pourrait (cf [2]) que tout plongement formel en codimension 1 de la sphère de Riemann soit convergent en géométrie analytique, ce qui s'appliquerait aux exemples de [9]. Nous allons maintenant construire des plongements formels du type déformation qui ne proviennent pas de plongements dans des variétés analytiques.

Le principe est le suivant: on choisit une variété compacte A dont le germe semi-universel de déformation G est universel dans la catégorie des germes d'espaces analytiques donc aussi dans celle des germes d'espaces formels par passage à la limite inductive; on peut prendre pour A une courbe de genre au moins 3 (cf [6], Corollaire 6.6.) ou un tore (cf [7] Remarque 2.7). Notons C_∞ le voisinage formel de 0 dans C et soit j un morphisme de C_∞ dans G qui ne se factorise à travers aucune immersion de C_∞ dans C. Alors la déformation formelle définie par j constitue un plongement formel qui d'après l'hypothèse précédente ne se prolonge pas en plongement du type déformation convergent. D'après le théorème, il ne se prolonge pas du tout. Il reste donc à construire un tel morphisme j.

Si G est isomorphe à C^2 (ou plus généralement est de dimension au moins 2) c'est facile:

PROPOSITION 4. *Il existe un morphisme j de C_∞ dans C^2 ne se factorisant à travers aucune immersion de C_∞ dans C.*

DÉMONSTRATION. On va montrer que si un morphisme j de C_∞ dans C^2 est de la forme $j(x)=(x, f(x))$ et se factorise à travers une immersion p de C_∞ dans C, alors f est une série convergente, ce qui permettra évidemment de conclure. Ecrivons $j=q\circ p$ avec $q=(q_1, q_2)$ convergente. On a donc $q_1\circ p=id$, donc q_1 est inversible et $p=q_1^{-1}$, d'où $f=q_2\circ q_1^{-1}$ ce qui prouve sa convergence. C.Q.F.D.

Si G est de dimension un, il est facile de voir que tout morphisme de C_∞ dans G se factorise à travers une immersion de C_∞ dans C. En revanche, on a la:

PROPOSITION 5. *Il existe un morphisme de C_∞^3 dans C ne se factorisant à travers aucune immersion de C_∞^3 dans C^3, c'est-à-dire une série formelle à trois variables qu'aucun changement de variables ne rend convergente.*

DÉMONSTRATION. On va montrer que pour que

$$s(x, y, z)=xy(y-x)(y-zx)(y-f(z)x)$$

puisse être rendue convergente par changement de variable, il faut que f soit convergente, ce qui permettra de conclure en choisissant f divergente. Soit $x(a, b, c)$, $y(a, b, c)$, $z(a, b, c)$ un changement de variables rendant s convergente. On peut évidemment supposer ce changement de variables tangent à l'identité. Ecrivons $s(x(a, b, c),\ y(a, b, c),\ z(a, b, c))=\sigma(a, b, c)$. Comme les anneaux considérés sont factoriels, la décomposition en facteurs premiers de σ s'écrit $\sigma=\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5$ avec $\sigma_1=xu_1$ $\sigma_2=yu_2$ $\sigma_3=(y-x)u_3$ $\sigma_4=(y-zx)u_4$ $\sigma_5=(y-f(z)x)u_5$ et $u_1u_2u_3u_4u_5=1$, les u_i étant des séries formelles en (a, b, c) valent 1 en zéro et les σ_i étant convergentes. On peut supposer que $a=\sigma_1$ et $b=\sigma_2$. Dans le nouveau système de coordonnées la variété Σ des zéros de σ est la réunion de cinq hypersurfaces lisses Σ_i se coupant le long de l'axe des c. Un calcul élémentaire montre que le birapport en $(0, 0, c)$ des espaces tangents à $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ est $z(0, 0, c)$ et des espaces tangentes à $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_5$ est $f\circ z(0, 0, c)$. Les deux séries d'une variable sont donc convergentes.

Comme

$$\frac{\partial x}{\partial c}(0, 0, 0)=\frac{\partial y}{\partial c}(0, 0, 0)=0,$$

$z(0, 0, c)$ est un changement de variables convergent et donc f est convergente. C.Q.F.D.

Plus généralement, soit $\pi: X\to C$ un germe de déformation à un paramètre non triviale de la variété compacte A. Alors si s désigne la série formelle à trois variables construite dans la démonstration de la proposition précédente, $s^*\pi$ est une déformation formelle non convergente: en effet; si $s^*\pi$ converge, le "lieu trivial" de cette déformation peut être rendu convergent par changement de variables (cf Schuster [14] qui démontre que la réunion des germes de sous-espaces où une déformation est triviale est encore un germe de sous-espace). Or, ce qu'on montre en démontrant la Proposition 5, c'est que $s^{-1}(0)$ ne peut être rendu convergent par aucun changement de variables. Donc toute variété admettant un germe de déformation à un paramètre non triviale admet aussi un plongement formel non convergent (du type déformation, en codimension 3).

DERNIÈRE MINUTE: Bingener et Flenner ont construit de façon analogue un plongement formel non convergent [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BINGENER, J. et FLENNER, H., *Einige Beispiele nichtalgebraischer Singularitaten.* Preprint (Osnabrück).
[2] ROSSI, H. in Proc. Conf. on Complex Analysis, Univ. Minnesota (1964).
[3] DOUADY, A., *Le problème des modules pour les sous-espaces*... Ann. Inst. Fourier *16*, (1966), 1–95.
[4] GRAUERT, H., *Über Modifikationen*... Math. Ann. *146*. (1962), 331–368.
[5] GRIFFITHS, P. A., *The extension problem in complex analysis II: Embeddings with positive normal bundle.* Amer. J. Math. *88* (1966), 366–446.
[6] GROTHENDIECK, A., *Techniques de constructions en géométrie analytique I.* Séminaire Cartan 1960/1961.
[7] ——, *Techniques de constructions en géométrie analytique* IX. Séminaire Cartan 1960/1961.
[8] HERVIER, Y., *Sur les familles à un paramètre de variétés simples, in Variétés Analytiques Compactes,* Lecture Notes in Math. No. 683 Springer.
[9] HIRONAKA, H. et MATSUMURA, L., *Formal functions and formal embeddings.* J. Math. Soc. Jap. *20* (1968), 52–82.
[10] HIRONAKA, H. et ROSSI, H., *Equivalence of embeddings*... Math. Ann., *156*, (1964), 313–333.
[11] KIEHL, R. et VERDIER, J. L., *Ein einfacher Beweis*... Math. Ann. *195* (1971), 24–50.
[12] NIRENBERG, L. et SPENCER, D. C., *On rigidity of holomorphic embeddings.* Contributions to Function Théory. Tata Institute 1960 Bombay.
[13] SCHUSTER, H. W., *Über die Starrheit*.... Manus. Math. *1* (1969), 125–137.
[14] ——, *Über den trivialen Ort von Defomationen* Math. Ann. *194*, (1971), 135–146.

Dept. de Mathématiques,
Université, Parc Valrose,
F-06034 Nice

Reçu le 19 décembre 1977