Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 54 (1979)

Artikel: Über Bahnen und deren Deformationen bei linearen Aktionen reduktiver Gruppen.

Autor: Borho, Walter / Kraft, Hanspeter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41561

Comment. Math. Helvetici **54** (1979) 61–104 Birkhäuser Verlag, Basel

Über Bahnen und deren Deformationen bei linearen Aktionen reduktiver Gruppen

WALTER BORHO UND HANSPETER KRAFT

Summary. Let a reductive group G act linearly on a vectorspace V, and let $O \subset V$ be an orbit. For each irreducible representation ω of G, the multiplicity with which ω occurs in the ring of regular functions on O (or on its closure $\bar{O}$) provides an interesting numerical invariant of O. We introduce an algebraic notion of a "deformation" of an orbit into another one. The main goal of this paper is to give sufficient conditions on an orbit, in order that an arbitrary deformation of this orbit has to preserve all the multiplicities mentioned above.

In the special case where $G = \mathrm{PSL}_n$ acts on its Lie-algebra in the usual way, every (nonzero) nilpotent orbit may be deformed into a semisimple orbit, and a conjecture of Dixmier amounts to saying that these deformations should preserve multiplicities. We prove this conjecture to be true in the case where the closure of the nilpotent orbit is a normal variety.

In development of an idea of Dixmier [6], we also introduce a notion of "sheets" of V (maximal irreducible subsets consisting of orbits of a fixed dimension), and we give a useful description (5.4) for all sheets of a semi-simple Lie-algebra.

This paper is strongly influenced by some investigations of B. Kostant [10] on similar problems and extends some of his results.

§1. Einleitung

Sei G eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik 0. Wir betrachten eine lineare Darstellung von G auf einem endlich dimensionalen Vektorraum V und untersuchen die G-Orbiten in V.

1.1. *Nullfaser.* Wir nennen einen Orbit in V *instabil*, wenn sein (Zariski-) Abschluß die Null enthält, anderenfalls heißt er *semi-stabil*. Die semi-stabilen Punkte, also die Punkte p von V, die einen semi-stabilen Orbit erzeugen, sind bekanntlich dadurch gekennzeichnet, daß es eine nicht konstante, homogene invariante Polynomfunktion f auf V mit $f(p) \neq 0$ gibt (vgl. [12], Chap. 1, §2). Bezeichnen wir daher mit Y das maximale Spektrum des Ringes der invarianten Polynomfunktionen auf V und mit $\pi: V \to Y$ den kanonischen Morphismus, so bilden die instabilen Punkte eine Faser von π, nämlich $\pi^{-1}\pi(0)$. Deshalb nennen wir die Menge der instabilen Punkte von V (oder einer Teilmenge $U \subset V$) auch kurz die Nullfaser von V (bzw. U).

1.2. *Deformation.* Manchmal kann man einen instabilen Orbit Gv durch eine "kleine Störung" in einen semi-stabilen Orbit Gu "deformieren" (v, $u \in V$). Diese Sprechweise soll präzise folgendes bedeuten: *Gv ist im Abschluß des Kegels $\bigcup_{0 \neq c \in k} c\, Gu$ enthalten und hat dieselbe Dimension wie Gu.* Dies ist eine geometrische Interpretation des algebraischen Konzeptes einer "Deformation", das wir in dieser Arbeit verwenden (3.1, 3.4). Diese scheinbar sehr enge Auslegung der Idee einer Deformation ist allgemein genug, weil wir *lineare* Gruppenaktionen betrachten. – Das Deformieren erweist sich als nützlich, weil die semi-stabilen Orbiten im allgemeinen einer näheren Untersuchung besser zugänglich sind.

1.3. *Schichten.* Die Vereinigung der Orbiten einer festen Dimension n ist eine lokal abgeschlossene Teilmenge $V^{(n)}$ von V; die irreduziblen Komponenten der Mengen $V^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ nennen wir die *Schichten* von V. Ein abgeschlossener Orbit gehört stets nur zu einer einzigen Schicht (4.2), andere Orbiten können aber durchaus zu mehreren Schichten gleichzeitig gehören. Besonders günstige Verhältnisse liegen vor, wenn eine Schicht S von V die folgende Bedingung erfüllt.

I. (*dichter Orbit*) Die Nullfaser von $\bar{S}$ enthält einen dichten Orbit O.

In dieser Situation folgt nämlich, daß O zu S gehört und daß alle anderen Orbiten der Schicht Deformationen von O (und semi-stabil) sind (Satz 6.1).

1.4. *Lie-Algebra.* Wir sind hauptsächlich an dem Fall interessiert, daß $V = \mathfrak{g}$ die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ einer halbeinfachen Gruppe G ist (auf der G durch die adjungierte Darstellung operiert). In diesem Fall sind die instabilen Orbiten gerade die "*nilpotenten*", also die Gx mit $x \in \mathfrak{g}$, so daß die lineare Abbildung $[x, \;]: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ nilpotent ist, und die abgeschlossenen Orbiten sind gerade die "*halbeinfachen*" Orbiten (d.h. die Gx mit $[x, \;]$ halbeinfach). Wir geben eine Beschreibung für die Schichten von $\mathfrak{g}$ an (Theorem 5.4), aus der unter anderem hervorgeht, daß sie alle die Bedingung I (dichter Orbit) erfüllen (Korollar 5.7). *Jede Schicht der Lie-Algebra enthält* danach *genau einen nilpotenten Orbit, und dieser kann in alle anderen Orbiten der Schicht deformiert werden.* – Es kann allerdings passieren, daß eine ganze Schicht $S (\neq \{0\})$ nur aus einem einzigen Orbit besteht; dieser ungünstigste Fall kommt bei allen einfachen Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ außer $\mathfrak{sl}_n$ vor (weil es von der minimalen Dimension > 0 dann bekanntlich nur einen Orbit gibt); über solche Orbiten sagen unsere Resultate nichts aus.

1.5. *Dixmier-Schichten.* Besonders günstig für unsere Betrachtungen sind dagegen die *Dixmier-Schichten*; so nennen wir die Schichten S der Lie-Algebra, die halbeinfache Orbiten enthalten. (Sie stimmen mit den von Dixmier in [6] studierten Mengen $S^{\sim}$ überein, vgl. 5.1.) Die halbeinfachen Orbiten sind dann die Orbiten allgemeiner Lage in S. Klassische Beispiele für Dixmier-Schichten sind die "reguläre Schicht" – bestehend aus den Orbiten der maximalen Dimension – und die "subregulären Schichten" – bestehend aus den Orbiten der nächst niederen Dimension. Die *reguläre Schicht* ist von Kostant in [10] eingehend untersucht worden. Die vorliegende Arbeit kann als eine Ausweitung seiner Betrachtungen auf andere Schichten angesehen werden (vgl. 1.9). – Ist die Gruppe G *einfach* vom Typ A_n, D_n oder E_n, so gibt es nur *eine subreguläre Schicht*; diese kann beim Studium der Kleinschen Singularität vom selben Typ herangezogen werden, um die "universelle Deformation" in natürlicher Weise zu realisieren (Brieskorn, vgl. [15], [18], [28]); die dabei angestellten Untersuchungen über subreguläre Elemente in der Gruppe liefern auch einen tiefen Einblick in die Struktur der subregulären Schicht der Lie-Algebra.

1.6. $G = \mathrm{PSL}_n$. Im Falle $G = \mathrm{PSL}_n$ sind *alle* Schichten der Lie-Algebra Dixmier-Schichten (Ozeki-Wakimoto [19]), und die Schichten sind paarweise disjunkt (Dixmier [6], vgl. [11]). (Durch beide Eigenschaften zeichnet sich PSL_n vor den einfachen Gruppen anderen Typs aus.) Das bedeutet also, daß jede nilpotente Konjugationsklasse zu genau einer Schicht gehört und darin in eine halbeinfache Konjugationsklasse deformiert werden kann. (Die G-Orbiten in $\mathfrak{sl}_n$ sind bekanntlich genau die Konjugationsklassen von Matrizen mit Spur 0.) Wie sieht diese Beziehung zwischen nilpotenten und halbeinfachen Orbiten explizit aus?

Jede nilpotente Matrix bestimmt eine Partition von n (die Größen der "Kästchen" in der Jordanschen Normalform). Auch eine halbeinfache Matrix bestimmt eine Partition von n (die Vielfachheiten der Eigenwerte). Diese Partitionen hängen nur von der Konjugationsklasse der betrachteten Matrix ab. Umgekehrt bestimmt jede Partition auf diese Weise eindeutig eine nilpotente Konjugationsklasse und eine Familie von halbeinfachen Konjugationsklassen. *Die halbeinfachen Konjugationsklassen, in die sich die nilpotente Konjugationsklasse zur Partition p deformieren läßt, sind nun gerade durch die zu p duale Partition gegeben* (vgl. [11], Satz 2.2).

1.7. *Multiplizitäten.* Auf der k-Algebra aller regulären Funktionen auf einem Orbit O operiert die Gruppe G lokal-endlich (und daher voll reduzibel). Jeder irreduzible G-Modul W kommt dabei mit einer gewissen endlichen Multiplizität vor. Dies liefert interessante numerische Invarianten des Orbits O. Wir nennen sie kurz die "Multiplizitäten von O", und notieren sie $m_W(O)$. Für den Abschluß $\bar{O}$ von O definieren wir $m_W(\bar{O})$ analog. Ist O der reguläre nilpotente Orbit der

Lie-Algebra (1.5), so ist nach Kostant $m_W(O)$ durch die Dimension des Nullgewichtsraumes des dualen G-Moduls W^* zu W gegeben [10]. Dixmier hat für $G = \mathrm{PSL}_n$ eine allgemeine Vermutung aufgestellt, die den Anstoß zu der vorliegenden Arbeit gegeben hat und hier teilweise bewiesen werden soll.

Multiplizitäten-Vermutung von Dixmier. Sei O ein nilpotenter Orbit in $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$. Seien $n = p_1 + \cdots + p_r$ die zugehörige Partition und $n = q_1 + \cdots + q_s$ die duale Partition (1.6). Sei $H \subset \mathrm{GL}_n$ eine Untergruppe der Gestalt $\mathrm{GL}_{q_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{q_s}$. Sei W ein irreduzibler Modul für $G = \mathrm{PSL}_n$ (und damit auch für GL_n). Es bezeichne W^{*H} den Invariantenraum von H im dualen G-Modul W^* zu W. Dann gilt:

$$m_W(\bar{O}) = \dim W^{*H}.$$

Man kann sich relativ leicht überlegen, daß die rechte Seite gerade die Multiplizitäten eines halbeinfachen (und daher abgeschlossenen) Orbits aus derselben Schicht angibt, und daß man die Vermtung deshalb in unserer Terminologie auch so aussprechen kann: *Innerhalb jeder Schicht von $\mathfrak{sl}_n$ sind die Multiplizitäten der Abschlüsse der Orbiten konstant.* – In einem Anhang (zum Kapitel 7) beweisen wir die (schwächere) Aussage: Innerhalb jeder Schicht von $\mathfrak{sl}_n$ sind die Multiplizitäten der Orbiten konstant.

1.8. SATZ. *Sei S eine Schicht von V mit folgenden Eigenschaften:*

I. (*dichter Orbit*) *Die Nullfaser von $\bar{S}$ enthält einen dichten Orbit O.*
II. (*Kodimension*) *Der Rand $\bar{O} \setminus O$ von O hat Kodimension ≥ 2 in $\bar{O}$.*
III. (*Normalität*) *Der Abschluß $\bar{O}$ ist eine normale Varietät.*
IV. (*Zusammenhang*) *Der Stabilisator G_x eines $x \in O$ ist zusammenhängend.*

Dann haben alle Orbiten innerhalb der Schicht S und die Abschlüsse dieser Orbiten die gleichen Multiplizitäten (Theoreme 3.8 und 6.3).

Sei nun $V = \mathfrak{g}$ die Lie-Algebra von G. Dann sind die Bedingungen I und II stets erfüllt (II weil alle Orbiten gerade Dimension haben, für I siehe 1.4); dasselbe gilt für IV im Falle $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$. Dagegen ist es ein offenes Problem, ob III immer erfüllt ist. Für die reguläre Schicht ist III bekannt (Kostant [10]), ebenso für die subreguläre Schicht von $\mathfrak{sl}_n$ (und allgemeiner, wenn in 1.7 $p_2 = p_3 = \cdots = p_r = 1$ genommen wird) nach Hesselink [7]. In diesen Fällen ist die Multiplizitäten-Vermutung von Dixmier also bewiesen. (Man vergleiche hierzu den Nachtrag bei der Korrektur.) Für Anwendungen auf die Einhüllende Algebra von $\mathfrak{g}$ verweisen wir auf [17] (etwa Theorem 2.6) und auf [1] (etwa Satz 3.4 und 3.5).

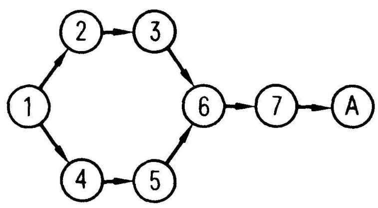
1.9. Unsere Methoden sind stark von den Ideen von Kostant beeinflußt. Er hat in [10] klar herausgearbeitet, welche Bedeutung die Bedingungen I, II und III haben. Allerdings spielt in seinen Betrachtungen (die sich – in unserer Sprache ausgedrückt – auf die "reguläre Schicht" S in V beziehen) noch eine andere Voraussetzung eine zentrale Rolle, nämlich

V. (*Invariante Erzeugung*) *Das Primideal $\mathscr{I}(O)$ der auf O verschwindenden regulären Funktionen wird durch invariante Funktionen erzeugt.*

Diese sehr starke Bedingung ist zwar für die reguläre Schicht der Lie-Algebra erfüllt, aber zum Beispiel schon für die subreguläre Schicht von $\mathfrak{sl}_3$ verletzt. Der Verzicht auf diese Voraussetzung ist einer der wesentlichen methodischen Unterschiede unserer Arbeit zu der von Kostant. Zu einigen Gedanken in unseren Abschnitten 3 und 4 findet man Parallelen in den Arbeiten von D. Luna ([26], [27]).

1.10. Die Bedingung IV (Zusammenhang) an die Schicht S ist notwendig für das Hauptresultat, wie ein Beispiel zeigt (6.6, S eine der beiden subregulären Schichten von $\mathfrak{so}_5$). Im letzten Kapitel lassen wir die Voraussetzungen IV und auch III (Normalität) fallen, betrachten also *beliebige* Schichten der Lie-Algebra. Wir können dann zwar nur noch gewisse grobe Aussagen über die Multiplizitäten beweisen (Theorem 7.1); diese zeigen aber immerhin, daß die Multiplizitäten eines Orbits Gx beim Deformieren tatsächlich sprunghaft anwachsen können, und machen verständlich, daß und wie dieses Phänomen durch die Komponentengruppe G_x/G_x^0 kontrolliert wird. Die Beweise dieses letzten Kapitels verdeutlichen gleichzeitig die Nützlichkeit der im Theorem 5.4 angegebenen Beschreibung der Schichten.

Bemerkung. Die Autoren danken J. Dixmier, M. Duflo, R. Elkik, W. Hesselink, D. Luna und V. L. Popov für Hinweise und Diskussionen zu dieser Arbeit.
Leitfaden:



§2. Einige Halbstetigkeitsaussagen

2.0 Im folgenden arbeiten wir über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k der Charakteristik 0. Alle Varietäten und insbesondere alle endlich dimensionalen Vektorräume werden mit der Zariski-Topologie versehen. Die Halbstetigkeitsaussagen dieses Abschnitts beruhen auf dem folgenden *Satz von Chevalley* ([5], 13.1.3):

Sei $\phi : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten. Dann ist die Funktion $d : X \to \mathbf{N}$, die jedem Punkt $x \in X$ die Dimension seiner Faser $\phi^{-1}(\phi(x))$ im Punkte x zuordnet, halbstetig nach oben.

Dabei heisst eine Funktion $d : X \to \mathbf{N}$ halbstetig nach oben, wenn die Mengen $\{x \in X \mid d(x) \geq n\}$ für alle $n \in \mathbf{N}$ abgeschlossen sind. Ferner erinnern wir daran, daß die Dimension einer Varietät F in einem Punkt $x \in F$ definiert ist als das Maximum der Dimensionen derjenigen irreduziblen Komponenten von F, welche x enthalten (Bezeichnung: $\dim_x F$).

2.1. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich dimensionale Lie-Algebra (über k). Ist V ein $\mathfrak{g}$-Modul, so bezeichnen wir für jede Teilmenge $U \subseteq V$ mit $\mathfrak{g}^U = \{x \in \mathfrak{g} \mid xU = 0\}$ ihren *Zentralisator* in $\mathfrak{g}$ und für jede Teilmenge $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ mit $V^{\mathfrak{a}} = \{v \in V \mid av = 0\}$ ihren *Invariantenraum* in V. Für $v \in V$ schreiben wir statt $\mathfrak{g}^{\{v\}}$ kürzer $\mathfrak{g}^v$.

LEMMA. *Seien V, W zwei endlich dimensionale $\mathfrak{g}$-Moduln. Dann gilt:*

(a) *Die Funktion $f : V \to \mathbf{N}$, $v \mapsto \dim \mathfrak{g}^v$, ist halbstetig nach oben.*

(b) *Die Funktion $g : V \to \mathbf{N}$, $v \mapsto \dim W^{\mathfrak{g}^v}$, ist auf jeder Teilmenge $U \subseteq V$, auf der die Funktion f von* (a) *konstant ist, halbstetig nach oben.*

Beweis. (a) Wir betrachten den Morphismus $\phi : \mathfrak{g} \times V \to V$, $\phi((x, v)) := xv$, und die abgeschlossene Untervarietät $T := \phi^{-1}(0)$ des Produktes $\mathfrak{g} \times V$. Die Einschränkung der Projektion $\mathrm{pr}_V : \mathfrak{g} \times V \to V$ auf T liefert einen Morphismus $\pi : T \to V$, dessen Fasern durch $\pi^{-1}(v) = \mathfrak{g}^v \times \{v\}$ gegeben sind. Nach dem Satz von Chevalley (2.0) ist die Funktion $t \mapsto \dim_t \pi^{-1}(\pi(t))$ halbstetig nach oben auf T, und die Behauptung a) folgt durch Einschränken dieser Funktion auf den "Nullschnitt" $\{0\} \times V \subseteq T$.

(b) Sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra. Sei $n := \dim W$ und $\psi : \mathfrak{h}^n \times W \to W^n$ der durch $(x_1, x_2, \ldots, x_n, w) \mapsto (x_1 w, x_2 w, \ldots, x_n w)$ gegebene Morphismus. Wir behaupten zunächst:

$$\dim \psi^{-1}(0) = \dim_0 \psi^{-1}(0) = n \cdot \dim \mathfrak{h} + \dim W^{\mathfrak{h}}. \tag{1}$$

Die Varietät $\psi^{-1}(0)$ ist homogen (d.h. sie enthält mit jedem Punkt z auch die Gerade kz durch z); folglich enthält jede irreduzible Komponente von $\psi^{-1}(0)$ den Nullpunkt, woraus die erste Gleichheit von (1) folgt. Wegen $\psi^{-1}(0) \supseteq \mathfrak{h}^n \times W^{\mathfrak{h}}$ erhalten wir $\dim \psi^{-1}(0) \geq n \cdot \dim \mathfrak{h} + \dim W^{\mathfrak{h}}$. Sei nun S eine irreduzible Komponente von $\psi^{-1}(0)$, und sei $\pi : S \to W$ induziert durch die Projektion $\mathrm{pr}_W : \mathfrak{h}^n \times W$

$\to W$. Wir haben nur noch die Ungleichung $\dim S \leq n \cdot \dim \mathfrak{h} + \dim W^{\mathfrak{h}}$ nachzuweisen. Ist $\pi(S) \not\subseteq W^{\mathfrak{h}}$, so folgt offenbar $S \subseteq \mathfrak{h}^n \times W^{\mathfrak{h}}$ und damit die Behauptung. Ist $\pi(S) \not\subseteq W$, so gibt es ein $w \in \pi(S) \setminus W^{\mathfrak{h}}$, und für dieses gilt $\pi^{-1}(w) = (\mathfrak{h}^w)^n \times \{w\}$ mit $\mathfrak{h}^w \neq \mathfrak{h}$. Wir erhalten $\dim S \leq \dim \pi(S) + \dim \pi^{-1}(w) \leq \dim W + n \cdot \dim \mathfrak{h}^w = n \cdot (1 + \dim \mathfrak{h}^w) \leq n \cdot \dim \mathfrak{h}$. (Für die erste Ungleichung benütze man die bekannte Dimensionsformel, vgl. [4], I, §3, 6.3.) Damit ist die Behauptung (1) bewiesen. Nun betrachten wir den Morphismus

$$\Phi : V \times \mathfrak{g}^n \times W \to V^n \times W^n,$$

$(v, x_1, x_2, \ldots, x_n, w) \mapsto (x_1 v, x_2 v, \ldots, x_n v, x_1 w, x_2 w, \ldots, x_n w)$ und die abgeschlossene Untervarietät $T := \Phi^{-1}(0) \subseteq V \times \mathfrak{g}^n \times W$. Die Projektion $\mathrm{pr}_V : V \times \mathfrak{g}^n \times W \to V$ induziert einen surjektiven Morphismus $\mu : T \to V$ mit den Fasern

$$\begin{aligned} \mu^{-1}(v) &= \{v\} \times \{(x_1, \ldots, x_n, w) \mid x_i \in \mathfrak{g}^v, x_i w = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq n\} \\ &\subseteq \{v\} \times (\mathfrak{g}^v)^n \times W. \end{aligned}$$

Nach (1) gilt nun $\dim_{(v,0,0,\ldots,0)} \mu^{-1}(v) = n \cdot \dim \mathfrak{g}^v + \dim W^{\mathfrak{g}^v}$, und daraus folgt mit dem Satz von Chevalley (2.0) die Behauptung b) wie unter a).

2.2. Wir betrachten nun eine lineare algebraische Gruppe G (über k) mit Lie-Algebra $\mathrm{Lie}\, G =: \mathfrak{g}$ und eine lineare Darstellung von G in einem endlich dimensionalen Vektorraum V. (Wir betrachten nur "rationale" Darstellungen, d.h. solche Darstellungen, welche durch polynomiale Funktionen gegeben sind.) Für jede Teilmenge $A \subseteq G$ bezeichnen wir mit $V^A := \{v \in V \mid gv = v$ für alle $g \in A\}$ deren *Invariantenraum* in V und für jedes Element $v \in V$ mit $G_v := \{g \in G \mid gv = v\}$ den *Stabilisator* von v in G. Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ operiert auf V. Für $v \in V$ gilt bekanntlich $\mathrm{Lie}\, G_v = \mathfrak{g}^v$ ([8], Theorem 13.2). Für eine abgeschlossene Untergruppe $H \subseteq G$ mit Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ folgt daraus $V^{\mathfrak{h}} = V^{H^0}$, wobei wir mit H^0 die *Zusammenhangskomponente der Eins* von H bezeichnen.

LEMMA. *Seien V, W endlich dimensionale Vektorräume, auf denen die Gruppe G linear operiert. Dann gilt:*

(a) *Die Funktion $v \mapsto \dim Gv$, die jedem Punkt von V seine Orbitdimension zuordnet, ist halbstetig nach unten.*

(b) *Ist U eine Teilmenge von V mit der Eigenschaft, daß die Stabilisatoren G_u für alle $u \in U$ die gleiche Dimension haben, so ist die Funktion $u \mapsto \dim W^{G_u^0}$ halbstetig nach oben auf U.*

Nach den Vorbemerkungen folgt dies unmittelbar aus Lemma 2.1. (Für die – wohlbekannte – Aussage a) *z. B.* beachtet man $\dim Gv = \dim G/G_v = \operatorname{codim}_G G_v = \operatorname{codim}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}^v$.)

2.3. Sei weiterhin eine lineare Darstellung einer algebraischen Gruppe G in einem endlich dimensionalen Vektorraum V gegeben. Für jede Varietät U bezeichnen wir mit $\mathcal{R}(U)$ den Ring ihrer *regulären Funktionen.* Ist $U \subseteq V$ eine G-stabile Untervarietät, so operiert G *lokal endlich* auf $\mathcal{R}(U)$. Ist nun G *reduktiv,* so ist diese Darstellung "voll reduzibel", das heißt, $\mathcal{R}(U)$ ist direkte Summe endlich dimensionaler einfacher G-Untermoduln. Die dabei auftretenden "Multiplizitäten" sind numerische Invarianten der G-Varietät U.

Von nun an sei G stets eine *reduktive Gruppe.* Unter einem G-Modul M verstehen wir im folgenden einen k-Vektorraum M, auf dem G lokal endlich durch eine (rationale) lineare Darstellung operiert. Mit Ω bezeichnen wir die Menge der Isomorphieklassen endlich dimensionaler einfacher G-Moduln. Für jeden G-Modul M und jedes $\omega \in \Omega$ sei $m_\omega(M)$ die Multiplizität, mit der ein einfacher Modul vom Typ ω in M als direkter Summand vorkommt. Ist $U \subseteq V$ eine G-stabile Untervarietät, so setzen wir zur Abkürzung

$$m_\omega(U) := m_\omega(\mathcal{R}(U)) \quad \text{für alle} \quad \omega \in \Omega$$

und sprechen kurz von "*den Multiplizitäten von U*".

Ist $Gv (v \in V)$ ein Orbit, so betrachten wir neben seiner Dimension auch die Multiplizitäten $m_\omega(Gv)$ als ein "Mass für seine Grösse". Da die Varietät Gv zu G/G_v G-isomorph ist, sind die Algebren $\mathcal{R}(Gv)$ und $\mathcal{R}(G/G_v)$ in kanonischer Weise G-isomorph. Zudem kann man die Algebra $\mathcal{R}(G/G_v)$ mit der Unteralgebra $\mathcal{R}(G)^{G_v} \subseteq \mathcal{R}(G)$ der unter den Rechtstranslationen mit Elementen aus G_v invarianten Funktionen auf G identifizieren; auf dieser ist durch die Linkstranslationen eine G-Operation gegeben. Wir erhalten also einen G-äquivarianten Isomorphismus

$$\mathcal{R}(Gv) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}(G)^{G_v}. \tag{1}$$

Ist W ein einfacher G-Modul vom Typ ω $(\omega \in \Omega)$, W^* der duale G-Modul, so gilt nach der "Reziprozitätsformel von Frobenius" (vgl. etwa [10], 2.1, Prop. 8)

$$m_\omega(\mathcal{R}(G)^{G_v}) = \dim W^{*G_v} \quad (<\infty), \tag{2}$$

das heißt, die Multiplizität von W in $\mathcal{R}(G)^{G_v}$ ist gleich der Multiplizität der trivialen Darstellung von G_v in W^*. Aus (1) und (2) erhalten wir

$$m_\omega(Gv) = \dim W^{*G_v}; \tag{3}$$

aus dem Lemma 2.2b) ergibt sich daher der folgende Satz:

SATZ. *Seien G und V wie oben und $U \subseteq V$ eine Teilmenge mit der Eigenschaft, daß für alle $u \in U$ die Stabilisatoren G_u gleiche Dimension haben und zusammenhängend sind. Dann ist für jedes $\omega \in \Omega$ die Multiplizität $m_\omega(Gu)$ der Bahn Gu $(u \in U)$ eine nach oben halbstetige Funktion $U \to \mathbf{N}$.*

2.4. *Beispiel.* Sei $G = \mathrm{PSL}_n$ (oder $G = \mathrm{GL}_n$) und $V = \mathfrak{g}$ die Lie-Algebra von G (versehen mit der adjungierten Operation von G). In diesem Falle geht aus [14] Chap. III hervor, daß *der Stabilisator G_x für jedes $x \in \mathfrak{g}$ zusammenhängend ist.* Weil dies für die Anwendungen in dieser Arbeit eine wichtige Rolle spielt, geben wir kurz den Grund dafür an: Die Gruppe GL_n ist die Einheitengruppe der assoziativen Algebra $M_n (= \mathfrak{gl}_n$ als Vektorraum) der $n \times n$-Matrizen. Ist $A := \{a \in M_n \mid ax = xa\}$ die Unteralgebra der mit x kommutierenden Elemente von M_n, so ist G_x die Einheitengruppe von A; diese ist offen in A und folglich zusammenhängend ([4], II, §1, 2.3; vgl. auch [14], 3.22). Die Behauptung für PSL_n folgt aus der Tatsache, daß die adjungierte Darstellung von GL_n über den kanonischen surjektiven Homomorphismus $\mathrm{GL}_n \to \mathrm{PSL}_n$ faktorisiert.

§3. Assoziierte Kegel und Deformationen von Orbiten

Von nun an seien eine zusammenhängende reduktive Gruppe G und eine lineare Darstellung von G in einem endlich dimensionalen Vektorraum V fest vorgegeben. Wir setzen $\dot{k} := k \setminus \{0\}$.

3.1 Eine Teilmenge U von V nennen wir *homogen* oder einen *Kegel*, wenn für alle $t \in \dot{k}$ gilt: $t \cdot U = U$. Eine abgeschlossene Teilmenge ist genau dann homogen, wenn sie das Nullstellengebilde von homogenen algebraischen Gleichungen ist.

Wir wollen jeder Teilmenge U von V einen abgeschlossenen Kegel $\mathscr{K}U \subset V$ gleicher Dimension zuordnen. Dafür identifizieren wir den Ring $\mathscr{R}(V)$ der regulären Funktionen auf V mit der symmetrischen Algebra $S(V^*)$ des Dualraumes V^* von V. Diese trägt eine natürliche Graduierung. Jeder Funktion $f \in \mathscr{R}(V)$ ordnen wir die homogene Funktion $\mathrm{gr}\, f \in \mathscr{R}(V)$ gleichen Grades zu, die sich von f nur durch Glieder kleineren Grades unterscheidet. Jedem Teilraum $T \subseteq \mathcal{R}(V)$ wird der graduierte Teilraum gr $T \subseteq \mathcal{R}(V)$ zugeordnet, welcher von den gr f mit $f \in T$ aufgespannt wird. Ist $I \subseteq \mathcal{R}(V)$ ein Ideal, so ist auch gr I ein Ideal und $\mathcal{R}(V)/\mathrm{gr}\, I$ hat die gleiche Krull-Dimension wie $\mathcal{R}(V)/I$ (vgl. [3], 5.5).

Das Nullstellengebilde eines Ideals I von $\mathcal{R}(V)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{V}(I)$ und das Ideal der auf einer Teilmenge U von V verschwindenden Funktionen mit $\mathcal{J}(U)$.

DEFINITION. Unter dem *assoziierten Kegel* einer Teilmenge $U \subseteq V$ verstehen wir die homogene abgeschlossene Teilmenge $\mathcal{V}(\mathrm{gr}\, \mathcal{J}(U))$; wir bezeichnen ihn mit $\mathcal{K}U$.

Neben dem assoziierten Kegel einer Teilmenge $U \subseteq V$ betrachten wir auch den *von U erzeugten Kegel* $\mathcal{C}U$:

$$\mathcal{C}U := \bigcup_{t \in k} t \cdot U.$$

Eigenschaften: (1) $\mathcal{K}U = \mathcal{K}\bar{U}$. *Zudem gilt* $\mathcal{K}U = U$ *genau dann, wenn* U *ein abgeschlossener Kegel ist.*

(2) *Ist* $\mathcal{C}U$ *der von* U *erzeugte Kegel, so gilt* $\mathcal{K}U \subseteq \overline{\mathcal{C}U}$.

(3) *Sind* U_1, U_2 *Teilmengen von* V, *so gilt* $\mathcal{K}(U_1 \cup U_2) = \mathcal{K}U_1 \cup \mathcal{K}U_2$.

(4) *Ist* $I \subset \mathcal{R}(V)$ *ein Ideal mit* $U = \mathcal{V}(I)$, *so ist* $\mathcal{K}U = \mathcal{V}(\mathrm{gr}\, I)$.

Für (2) beachte man, daß $\overline{\mathcal{C}U}$ das Nullstellengebilde des größten in $\mathcal{J}(U)$ enthaltenen homogenen Ideals ist. Für (3) und (4) verwende man die Beziehung gr $T \cdot$ gr $T' \subseteq$ gr $T \cdot T'$ für beliebige Unterräume T, T' von $\mathcal{R}(V)$; dabei bezeichnen wir für Unterräume $A, B \subseteq \mathcal{R}(V)$ mit $A \cdot B$ den von den Monomen $a \cdot b$ mit $a \in A$ und $b \in B$ aufgespannten Unterraum.

3.2 Da die Graduierung auf $\mathcal{R}(V)$ *G-invariant* ist, ist für jeden G-stabilen Teilraum $T \subseteq \mathcal{R}(V)$ auch der graduierte Teilraum gr T G-stabil. Aus der vollen Reduzibilität der Darstellung von G auf $\mathcal{R}(V)$ folgt, daß T und gr T als G-Moduln isomorph sind, und das gleiche gilt auch für die Restklassenmoduln $\mathcal{R}(V)/T$ und $\mathcal{R}(V)/\mathrm{gr}\, T$. Insbesondere gibt es für jedes G-stabile Ideal I von $\mathcal{R}(V)$ einen G-Modulisomorphimus (aber i.A. keinen Algebrenisomorphismus)

$$\mathcal{R}(V)/I \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}(V)/\mathrm{gr}\, I.$$

Da auch das Radikal $\sqrt{\mathrm{gr}\, I}$ G-stabil ist, erhalten wir damit einen surjektiven G-Modulhomomorphismus

$$\mathcal{R}(V)/I \to \mathcal{R}(V)/\sqrt{\mathrm{gr}\, I}. \tag{*}$$

LEMMA. *Der assoziierte Kegel $\mathcal{K}U$ einer G-stabilen Teilmenge U von V ist G-stabil und hat die Eigenschaft*

$$m_\omega(\mathcal{K}U) \leq m_\omega(U) \quad \text{für alle} \quad \omega \in \Omega.$$

Beweis. Nach Definition ist $\mathcal{R}(\mathcal{K}U) = \mathcal{R}(V)/\sqrt{\mathrm{gr}\, I}$ mit $I := \mathcal{J}(U)$. Zudem gilt $\mathcal{R}(U) \supseteq \mathcal{R}(\bar{U}) = \mathcal{R}(V)/I$. Die Behauptung folgt unter Verwendung von (*).

Zusammenfassend können wir sagen: Die Zuordnung $U \mapsto \mathcal{K}U$ ist *dimensionstreu, inklusionserhaltend, überführt G-stabile Teilmengen in G-stabile Teilmengen und läßt die Multiplizitäten höchstens kleiner werden.*

3.3 Es ist im allgemeinen nicht ganz problemlos, den oben auf algebraische Weise definierten "assoziierten Kegel" einer Teilmenge von V geometrisch zu beschreiben. Wir interessieren uns jedoch hauptsächlich für den assoziierten Kegel eines semi-stabilen Orbits (1.1), und der hat eine höchst einfache geometrische Bedeutung (Satz 3.4). Wir stellen hier zunächst einige Notationen und wohlbekannte Tatsachen zusammen, die die invarianten Funktionen betreffen.

Ist ein irreduzibler, abgeschlossener, G-stabiler Kegel X in V gegeben, so bezeichne $R := \mathcal{R}(X)$ seinen Koordinatenring, $C := R^G$ den G-Invariantenring und Y das maximale Spektrum von C. Nach Hilbert ist C eine endlich erzeugte k-Algebra, Y also wieder eine affine Varietät. Die Inklusion $C \hookrightarrow R$ induziert eine Abbildung von X auf Y, die wir mit $\pi : X \to Y$ bezeichnen. Alle Fasern von π sind zusammenhängend und G-stabil und enthalten genau einen abgeschlossenen Orbit; dieser ist im Abschluß jedes andern Orbits der Faser enthalten (siehe hierzu etwa [12], *I* §2). Die Faser $\pi^{-1}\pi(0)$ besteht also genau aus den "*instabilen Orbiten*", d.h. denjenigen Orbiten, deren Abschluß die Null enthält; wir nennen $\pi^{-1}\pi(0)$ "*die Nullfaser von X*".

Die k-Algebren R und C erben eine kanonische Graduierung von dem Polynomring $\mathcal{R}(V)$; für diese ist

$$C_+ := \{f \in C \mid f(\pi(0)) = 0\}$$

das einzige homogene Maximalideal von C. Die Nullfaser ist das Nullstellengebilde von C_+ in X,

$$\pi^{-1}\pi(0) = \mathcal{V}(RC_+)$$

und folglich die einzige homogene Faser von π. Die Orbiten in den anderen Fasern von π nennen wir *semi-stabil* (vgl. 1.1).

3.4. Der folgende Satz soll nur der geometrischen Veranschaulichung dienen; logisch wird er im folgenden nicht benötigt.

SATZ. *Sei Gu ($u \in V$) ein semistabiler Orbit, $U := \overline{Gu}$ sein Abschluß in V. Dann ist der assoziierte Kegel von Gu gleich $\overline{\mathscr{C}U} \setminus \mathscr{C}U$,*

$$\mathscr{K}Gu = \overline{\mathscr{C}U}/\mathscr{C}U$$

(also gleich dem "Rand" des von $\dot{U}$ erzeugten Kegels).

Beweis. Wir setzen $X = \overline{\mathscr{C}U}$ und benutzen die in 3.3 eingeführten Notationen. Wir müssen beweisen, daß X die disjunkte Vereinigung von $\mathscr{C}U$ mit $\mathscr{K}U$ ist. Es genügt deshalb, zu zeigen:

(1) $\mathscr{K}U = \pi^{-1}\pi(0)$ *ist die Nullfaser und*
(2) $\mathscr{C}U = \pi^{-1}(Y \setminus \pi(0))$ *ist die Vereinigung der übrigen Fasern.*

Wir bemerken dafür zunächst, daß Y eindimensional ist: Denn $\pi(\mathscr{C}Gu) = \pi(G\dot{k}u) = \pi(\dot{k}u)$ ist einerseits dicht in Y und andererseits höchstens eindimensional, und weil u semi-stabil, also $\pi(u) \neq \pi(0)$ ist, kann $\pi(\dot{k}u) \subset Y$ nicht nulldimensional sein. – Wir geben nun $y \in Y$, $y \neq \pi(0)$ beliebig vor und betrachten eine irreduzible Komponente F der Faser $\pi^{-1}\pi(y)$. Nach einer allgemeinen Eigenschaft der Fasern eines Morphismus gilt dann $\dim F + \dim Y \geqslant \dim X = \dim U + \dim Y$, und daraus folgt $\dim F = \dim U$. Wegen $\pi(F) \neq \pi(0)$ ist $\dim \mathscr{C}F = \dim F + 1 = \dim X$ und deshalb muß $\mathscr{C}F$ die offene dichte Teilmenge $\mathscr{C}Gu$ von X treffen; es ist also etwa $au \in bF$ mit $a, b \in \dot{k}$ und somit $cu \in F$ mit $c = ab^{-1}$. Weil F aber G-stabil ist, folgt nun $Gcu = cGu \subseteq F$ also $cU \subseteq F$, mithin $cU = F$. Dies beweist (2) und außerdem, daß für alle $y \in Y \setminus \pi(0)$

$$\pi^{-1}(y) = a_1 U \cup \cdots \cup a_s U$$

mit passenden $a_1, \ldots, a_s \in \dot{k}$ gilt. Weil Y eindimensional ist, wird $\pi(0)$ in Y durch eine beliebige homogene Funktion $0 \neq f \in C$ definiert, das heißt, $\{\pi(0)\}$ ist das Nullstellengebilde von f in Y. Das Nullstellengebilde von f in X ist daher

$$\pi^{-1}(\pi(0)) = \mathscr{V}(fR) \qquad (= \mathscr{V}(C_+R)).$$

Wir betrachten nun das Nullstellengebilde $Z := \mathcal{V}((f+1)\cdot R)$ der inhomogenen invarianten Funktion $f+1 \in C$ in X. Dies ist offenbar eine endliche Vereiningung von Fasern $\pi^{-1}(y)$ mit $y \neq \pi(0)$ und deshalb, wie wir gesehen haben, von der Gestalt

$$Z := \mathcal{V}((f+1)R) = b_1 U \cup \cdots \cup b_r U \quad \text{mit} \quad b_1, \ldots, b_r \in \dot{k}.$$

Mit 3.1 (3) schließen wir daraus

$$\mathcal{K}Z = \mathcal{K}b_1 U \cup \cdots \cup \mathcal{K}b_r U = \mathcal{K}U \cup \cdots \cup \mathcal{K}U = \mathcal{K}U.$$

Andererseits überlegt man sich, daß fR das assoziierte graduierte Ideal von $(f+1)R$ ist (benutze die Nullteilerfreiheit von R); deshalb gilt

$$\mathcal{K}Z = \mathcal{K}\mathcal{V}((f+1)R) = \mathcal{V}(fR) = \pi^{-1}(\pi(0)).$$

Dies beweist nun (1) und damit den Satz.

Bemerkung. Nennen wir für den Moment einen Orbit "homogen", falls er es als Teilmenge von V ist (vgl. 3.1) und "inhomogen" sonst. Semi-stabile Orbiten sind offenbar inhomogen, aber instabile nicht notwendig homogen. Man sieht leicht an Beispielen, daß der Satz für beliebige inhomogene Orbiten nicht richtig ist. Richtig bleibt aber $\mathcal{K}Gu \subseteq \overline{\mathcal{C}Gu} \backslash \mathcal{C}Gu$, wie man sich sofort überlegt. – Wir weisen darauf hin, daß alle weiteren Resultate dieser Arbeit richtig bleiben, wenn man statt semi-stabiler Orbiten allgemeiner "inhomogene" (und statt instabiler "homogene") zuläßt.

3.5. DEFINITION. Seien $v \in V$ ein instabiler und $u \in V$ ein semi-stabiler Punkt. Wir sagen, der Orbit Gv könne in den Orbit Gu *deformiert* werden, wenn Gv im assoziierten Kegel von Gu enthalten ist und die gleiche Dimension wie Gu hat. Wir nennen einen instabilen Orbit *deformierbar*, wenn er in einen semi-stabilen deformiert werden kann.

Beispiel. Für die adjungierte Darstellung einer halbeinfachen Gruppe lassen sich alle semi-stabilen Orbiten durch Deformieren instabiler Orbiten gewinnen. (Es gibt nur endlich viele nilpotente Orbiten!) Für beliebige Darstellungen halbeinfacher Gruppen trifft dies jedoch nicht zu. (Auf ein einfaches Gegenbeispiel hat uns V. L. Popov aufmerksam gemacht: Man betrachte die Operation von $G = \mathrm{SL}_2$ durch Linksmultiplikation auf dem Matrizenring $M_2(k)$.) Bei der adjungierten Operation einer *einfachen* Gruppe G auf der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sind im Falle $G = \mathrm{SL}_n$ *alle* instabilen Orbiten $\neq \{0\}$ deformierbar (vgl. 1.6). In allen anderen

Fällen gibt es jedoch einen einzigen Orbit der minimalen Dimension >0; dieser ist offensichtlich (instabil und) nicht deformierbar (vgl. 1.4).

SATZ. *Sei $v \in V$ ein instabiler Punkt mit zusammenhängendem Stabilisator G_v. Läßt sich Gv in den semi-stabilen Orbit Gu $(u \in V)$ deformieren, so gilt:*

$$(*) \qquad m_\omega(Gv) \geq m_\omega(Gu) \quad \text{für alle} \quad \omega \in \Omega.$$

Beweis. Für einen einfachen G-Modul W betrachten wir die Funktion $f: \mathscr{C}Gu \cup Gv \to \mathbf{N}$, $y \mapsto \dim W^{G_y^0}$. Sie ist auf $\mathscr{C}Gu$ konstant, denn für jedes $y \in \mathscr{C}Gu$ ist G_y zu G_u, also G_y^0 zu G_u^0 und schließlich $W^{G_y^0}$ zu $W^{G_u^0}$ konjugiert. Nach Lemma 2.2b) ist f halbstetig nach oben, und nach Voraussetzung ist Gv in $\mathscr{K}Gu \subset \overline{\mathscr{C}Gu}$ enthalten (3.1(2)); also gilt $f(u) \leq f(v)$. Bezeichnen wir mit $\omega \in \Omega$ den Typ des dualen Moduls W^*, so folgt hiermit nach den Überlegungen in 2.3 wegen $G_v = G_v^0$: $m_\omega(Gu) = \dim W^{G_u} \leq \dim W^{G_u^0} = f(u) \leq f(v) = \dim W^{G_v} = m_\omega(Gv)$, wie behauptet.

3.6. ZUSATZ. *Gilt im Satz 3.5 (*) sogar das Gleichheitszeichen (für alle $\omega \in \Omega$), so ist der Stabilisator G_u von u ebenfalls zusammenhängend.*

Beweis. Zunächst folgt aus der letzten Zeile im Beweis des Satzes $W^{G_u} = W^{G_u^0}$ für alle einfachen G-moduln W und damit nach der Reziprozitätsformel (2.3) $\mathscr{R}(G/G_u) = \mathscr{R}(G/G_u^0)$. Der kanonische Morphismus $G/G_u^0 \to G/G_u$ ist ein Quotient von G/G_u^0 nach einer treu operierenden endlichen Gruppe, nämlich G_u/G_u^0 (vgl. [4] III, §3, 1.8b)). Daher ist der Körper L der rationalen Funktionen auf G/G_u^0 über dem Körper K der rationalen Funktionen auf G/G_u endlich algebraisch vom Grad $[G_u : G_u^0]$. Zudem ist K der Quotientenköper von $\mathscr{R}(G/G_u)$, denn G/G_u ist isomorph zur offenen Untervarietät Gu der affinen Varietät $\overline{Gu}$. Andererseits ist $\mathscr{R}(G/G_u^0)$ ganz abgeschlossen in L (für eine beliebige normale Varietät X ist $\mathscr{R}(X)$ ganz abgeschlossen im Körper der rationalen Funktionen auf X). Also muß $L = K$ und somit $[G_u : G_u^0] = 1$ sein.

Bemerkungen. (a) Im allgemeinen braucht im Satz 3.5 der Stabilisator G_u *nicht* zusammenhängend zu sein: Zum Beispiel läßt sich der (einzige) instabile Orbit Gv der Dimension 3 in der vierdimensionalen irreduziblen Darstellung von $G = SL_2$ in alle semi-stabilen Orbiten Gu der Dimension 3 deformieren; es ist $G_v = \{1\}$ zusammenhängend, aber G_u $(\cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ nicht (vgl. [22], 12.1).

(b) Die Voraussetzung im Satz 3.5, daß G_v zusammenhängend sei, ist wirklich notwendig: Zum Beispiel können beim Deformieren des sechsdimensionalen instabilen (= nilpotenten) Orbits der Lie-Algebra $\mathfrak{so}_5$ die Multiplizitäten echt größer werden (vgl. dazu 6.6 und §7).

3.7. Neben dem Funktionenring $\mathcal{R}(Gv)$ eines Orbits Gv und dessen Multiplizitäten $m_\omega(Gv)$ interessieren wir uns auch für den Ring $\mathcal{R}(\overline{Gv})$ der regulären Funktionen auf dem Abschluß des Orbits und dessen Multiplizitäten $m_\omega(\overline{Gv})$. Er ist deshalb interessant, weil er nicht nur Informationen über den Orbit selbst, sondern auch über dessen Einbettung in den Raum V enthält. Im Falle der adjungierten Darstellung von G auf der Lie-Algebra hat der Rand $\overline{Gv}\setminus Gv$ eines Orbits stets eine Kodimension $\geqslant 2$ in $\overline{Gv}$ (weil in diesem Falle alle Orbiten gerade Dimension haben und im Abschluß eines Orbits nur endlich viele andere liegen). Kostant hat darauf aufmerksam gemacht ([10], 2.2, Proposition 9), daß in einer solchen Situation ein enger Zusammenhang zwischen $\mathcal{R}(Gv)$ und $\mathcal{R}(\overline{Gv})$ besteht:

LEMMA. *Sei Gv ($v \in V$) ein Orbit, dessen Rand eine Kodimension $\geqslant 2$ im Abschluß $\overline{Gv}$ hat. Dann ist $\mathcal{R}(Gv)$ der ganze Abschluß von $\mathcal{R}(\overline{Gv})$.*

Wegen der Wichtigkeit für das folgende geben wir kurz den Grund dafür an: Sei $\eta : Z \to \overline{Gv}$ die Normalisierung von $\overline{Gv}$, also $\mathcal{R}(Z)$ der ganze Abschluß von $\mathcal{R}(\overline{Gv})$. Da Gv normal ist, induziert η einen Isomorphismus $\eta' : Z' := \eta^{-1}(Gv) \xrightarrow{\sim} Gv$, und es gilt folglich $\mathcal{R}(Z') = \mathcal{R}(Gv)$. Da Z normal ist und $\operatorname{codim}_Z Z\setminus Z' \geqslant 2$ gilt, folgt $\mathcal{R}(Z) = \mathcal{R}(Z')$: Jede reguläre Funktion f auf Z' läßt sich auf Z fortsetzen, da auf einer normalen Varietät die Menge der Punkte, wo eine rationale Funktion nicht definiert ist, entweder leer oder von der Kodimension 1 ist ([5], §20, Corollaire 20.4.12).

3.8. Wir können nun eines der Hauptresultate dieser Arbeit formulieren. Es besagt, daß Orbiten mit gewissen guten Eigenschaften sich nicht stark verändern, wenn man sie deformiert. Diese "guten" Eigenschaften eines Orbits $Gv (v \in V)$ sind die folgenden:

(i) *Der Stabilisator G_v ist zusammenhängend.*
(ii) *Der Rand $\overline{Gv}\setminus Gv$ hat Kodimension $\geqslant 2$ in $\overline{Gv}$.*
(iii) *Der Abschluß $\overline{Gv}$ ist eine normale Varietät.*
(iv) *Es gilt $\mathcal{R}(\overline{Gv}) = \mathcal{R}(Gv)$.*

Diese Eigenschaften sind nicht unabhängig: (iv)$\Rightarrow$(iii), und umgekehrt gilt unter der Voraussetzung (ii) auch (iii)$\Rightarrow$(iv).

THEOREM. *Sei Gv ($v \in V$) ein instabiler Orbit mit den Eigenschaften* (i), (ii), (iii) (*oder auch nur* (i) *und* (iv)). *Läßt sich Gv in einen semi-stabilen Orbit Gu*

deformieren, so gilt für alle $\omega \in \Omega$:

$$m_\omega(Gu) = m_\omega(\overline{Gu}) = m_\omega(\overline{Gv}) = m_\omega(Gv).$$

Außerdem vererben sich die Eigenschaften (i), (ii), (iii) (bzw. (i) und (iv)) *von* Gv *auf* Gu.

Bemerkung. Da G zusammenhängend ist, ist ein Orbit Gu ($u \in V$) stets irreduzibel und sein Ideal $\mathcal{J}(Gu)$ daher prim; aber das assoziierte graduierte Ideal $\operatorname{gr} \mathcal{J}(Gu)$ braucht im allgemeinen nicht einmal halbprim zu sein (Gegenbeispiel: gewisse sechsdimensionale Orbiten in $\mathfrak{so}_5$), und der assoziierte Kegel $\mathcal{K}Gu = \mathcal{V}(\operatorname{gr} \mathcal{J}(Gu))$ braucht nicht irreduzibel zu sein (Gegenbeispiel: die Darstellung $t(x, y) = (tx, t^{-1}y)$, $t \in \dot{k}$, der multiplikativen Gruppe $\dot{k}$ auf dem k^2). Wir erwähnen deshalb den folgenden

ZUSATZ. *In der Situation des Theorems gilt* $\mathcal{K}(Gu) = \overline{Gv}$ *und* $\operatorname{gr} \mathcal{J}(Gu) = \mathcal{J}(Gv)$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{R}(\overline{Gv}) = \mathcal{R}(Gv)$. Sei $I := \mathcal{J}(Gu)$; dann gilt

$$\mathcal{R}(Gu) \supseteq \mathcal{R}(\overline{Gu}) = \mathcal{R}(V)/I, \tag{1}$$

und die beiden G-Moduln $\mathcal{R}(V)/I$ und $\mathcal{R}(V)/\operatorname{gr} I$ sind isomorph (3.2). Die kanonischen G-Homomorphismen

$$\phi : \mathcal{R}(V)/\operatorname{gr} I \to \mathcal{R}(\mathcal{K}Gu)$$

und (2)

$$\psi : \mathcal{R}(\mathcal{K}Gu) \to \mathcal{R}(\overline{Gv})$$

sind surjektiv. Wir erhalten aus (1) und (2) für jedes $\omega \in \Omega$

$$m_\omega(Gu) \geq m_\omega(\overline{Gu}) = m_\omega(\mathcal{R}(V)/\operatorname{gr} I) \geq m_\omega(\mathcal{K}Gu) \geq m_\omega(\overline{Gv}) = m_\omega(Gv). \tag{3}$$

Andererseits ist nach Satz 3.5 $m_\omega(Gv) \geq m_\omega(Gu)$ und folglich steht in (1) und (3) überall das Gleichheitszeichen. Damit ist der erste Teil des Theorems bewiesen.

Zugleich folgt aber auch, daß die beiden Homomorphismen ϕ und ψ in (2) bijektiv sind. Es gilt daher $\operatorname{gr} I = \mathcal{J}(\overline{Gv})$ und folglich $\mathcal{K}Gu = \overline{Gv}$, was den Zusatz beweist.

Die Gleichheit in (1) besagt, daß der Orbit Gu die Bedingung (iv) und damit auch (iii) erfüllt. Aus 3.6 folgt nun, daß auch G_u zusammenhängend ist, also die Eigenschaft (i) hat. Erfüllte Gu die Bedingung (ii) nicht, so wäre $Z=\overline{Gu}\backslash Gu$ eine abgeschlossene G-stabile Teilmenge der Kodimension 1 in $\overline{Gu}$. Dann ist auch $\mathcal{K}Z\subseteq\mathcal{K}\overline{Gu}=\overline{Gv}$ eine G-stabile Teilmenge der Kodimension 1 in $\overline{Gv}$, also erfüllt dann auch Gv die Bedingung (ii) nicht. Damit sind das Theorem und der Zusatz bewiesen.

§4. Schichten

4.1. Für jede Teilmenge U von V und jede Zahl $n\in\mathbf{N}$ bezeichne $U^{(n)}$ die Menge der $u\in U$, die einen G-Orbit der Dimension $\dim Gu=n$ erzeugen. Ist n_0 maximal mit $U^{(n_0)}\neq\varnothing$, so nennen wir die Elemente von $U^{(n_0)}$ die *regulären Elemente von* U und schreiben $U^{\mathrm{reg}}:=U^{(n_0)}$ für die Menge aller dieser Elemente. Nach Lemma 2.2a) ist U^{reg} stets offen in U.

DEFINITION. Sei $U\subseteq V$ eine G-stabile abgeschlossene Teilmenge. Für jedes $n\in\mathbf{N}$ zerlege man die lokal abgeschlossene Teilmenge $U^{(n)}$ in ihre irreduziblen Komponenten. Jede dieser Komponenten nennen wir eine *Schicht* von U. Ist U irreduzibel, so ist U^{reg} (die Vereinigung der Bahnen maximaler Dimension in U) eine Schicht von U; wir nennen sie *die reguläre Schicht von* U.

Die Schichten einer G-stabilen abgeschlossenen Teilmenge $U\subseteq V$ sind lokal abgeschlossene G-stabile Teilmengen von U. Die Schichten von V sind offenbar Kegel in V. Wir werden uns deshalb im folgenden auf die Betrachtung von Kegeln beschränken.

Für jede Teilmenge T von V bezeichne GT die von T erzeugte G-stabile Teilmenge. Ist T irreduzibel, so auch $\overline{GT}$. Zu jeder irreduziblen Teilmenge $T\subseteq V$ kann man die reguläre Schricht $(\overline{GT})^{\mathrm{reg}}$ von $\overline{GT}$ betrachten. Man beachte, daß $G(\bar{T}^{\mathrm{reg}})$ zwar eine dichte Teilmenge dieser Schicht ist, aber im allgemeinen nicht mit ihr übereinstimmt. Es ist gerade das zentrale Problem dieser Arbeit, in solchen Situationen diejenigen Orbiten zu beschreiben, die in $\overline{GT}^{\mathrm{reg}}$ gegenüber $G(\bar{T}^{\mathrm{reg}})$ neu hinzugekommen sind. Sind zum Beispiel u, $v\in U$ wie im Satz 3.5 gegeben und ist T die Gerade ku, so ist $GT^{\mathrm{reg}}=\mathscr{C}Gu(=\bigcup_{t\in k}tGu)$, aber $\overline{GT}^{\mathrm{reg}}=GT^{\mathrm{reg}}\cup Gv$.

4.2. Ein Element $u\in V$ kann durchaus zu mehreren verschiedenen Schichten von V gehören (Beispiel 6.6). Wenn aber der Orbit Gu abgeschlossen (in V) ist, gehört er zu einer einzigen Schicht, wie wir nun beweisen wollen. Gleichzeitig wird sich zeigen, wie man diese Schicht ausgehend von u konstruieren kann, und wir werden auch ihre Dimension berechnen (4.3).

SATZ. *Sei Gu ($u \in V$) ein abgeschlossener Orbit. Dann ist Gu in genau einer Schicht S von V enthalten, und es ist $S = \overline{GT^{\text{reg}}}$ mit $T := V^{\mathfrak{g}^u}$* (Dabei bezeichnet $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra von G.)

Beweis. Offenbar ist $T = \{t \in V \mid \mathfrak{g}^t \supseteq \mathfrak{g}^u\}$, also $T^{\text{reg}} = \{t \in V \mid \mathfrak{g}^t = \mathfrak{g}^u\}$ und folglich

$$GT^{\text{reg}} = \{x \in V \mid \mathfrak{g}^x \text{ konjugiert zu } \mathfrak{g}^u\}. \tag{1}$$

Sei S eine Schicht von V, welche u enthält. Da Gu abgeschlossen in V ist, ist der Stabilisator G_u reduktiv ([20], siehe auch [21], Theorem 1). Nach einem Resultat von Richardson ([13], Proposition 3.3) erhalten wir hieraus, daß die Menge

$$U := \{x \in V \mid G_x^0 \text{ konjugiert zu einer Untergruppe von } G_u\}$$

eine offene Umgebung von u in V ist. Offenbar ist

$$U \cap S \subseteq \{x \in V \mid G_x^0 \text{ konjugiert zu } G_u^0\} = \{x \in V \mid \mathfrak{g}^x \text{ konjugiert zu } \mathfrak{g}^u\},$$

also wegen (1): $U \cap S \subseteq GT^{\text{reg}}$. Da GT^{reg} irreduzibel ist, folgt hieraus $\bar{S} = \overline{U \cap S} = \overline{GT^{\text{reg}}} = \overline{GT}$ und daher $S = \bar{S}^{\text{reg}} = \overline{GT^{\text{reg}}}$. Damit ist der Satz bewiesen.

4.3 ZUSATZ. (a) *Es gilt* $\dim S = \dim Gu + \dim T - \dim Nu$ $(\leq \dim Gu + \dim T)$ *mit* $N := \{g \in G \mid gT = T\}$.

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\dim S = \dim Gu + \dim T$.

(ii) *Die Gruppe $W := N/_T$ ist endlich.*

(iii) $\mathfrak{g}^{\mathfrak{g}^u} \subseteq \mathfrak{g}^u$.

Beweis. Zu a). Wir bemerken vorweg, daß

$$Gt \cap T^{\text{reg}} = Nt \quad \text{für alle} \quad t \in T^{\text{reg}} \tag{2}$$

gilt. Denn sind $g \in G$ und $t \in T^{\text{reg}}$ mit $gt \in T^{\text{reg}}$, so folgt $\mathfrak{g}^{gt} = \mathfrak{g}^t = \mathfrak{g}^u$ und daher $gT = gV^{\mathfrak{g}^t} = V^{\mathfrak{g}^u} = T$, also $g \in N$. Wir betrachten den Morphismus $\phi: G \times T^{\text{reg}} \to G \cdot T^{\text{reg}} \subseteq S$, $\phi(g, t) := gt$ und die Projektion $\text{pr}: G \times T^{\text{reg}} \to T^{\text{reg}}$. Dann gilt für eine Faser $F := \phi^{-1}\phi(g, t)$ von ϕ nach (2): $\text{pr}(F) = N \cdot t$ und $F \cap \text{pr}^{-1}(nt) = gG_t n^{-1} \times \{nt\} \cong G_t$ für $n \in N$. Wir erhalten $\dim F = \dim G_t + \dim Nt$. Wegen $\mathfrak{g}^t = \mathfrak{g}^u$ für alle $t \in T^{\text{reg}}$ ist diese Dimension konstant gleich $\dim G_u + \dim Nu$. Es folgt

$\dim S = \dim GT^{\mathrm{reg}} = \dim G + \dim T^{\mathrm{reg}} - (\dim G_u + \dim Nu) = \dim Gu \dotplus \dim T - \dim Nu$.

Zu (b): Nach a) ist die Äquivalenz von (i) mit (ii) klar (benutze auch 2.1a)). Sei $\mathfrak{n}$ die Lie-Algebra von N. Es ist dann

$$\mathfrak{n} = \{x \in \mathfrak{g} \mid xT \subseteq T\} \supseteq \mathfrak{g}^u = \{x \in \mathfrak{g} \mid xT = 0\}. \tag{3}$$

Die Aussage (ii) ist offensichtlich äquivalent zu der Aussage

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{g}^u. \tag{ii'}$$

Hieraus folgt aber (iii), da nach (3) der Zentralisator $\mathfrak{g}^{\mathfrak{g}^u}$ von $\mathfrak{g}^u$ in $\mathfrak{n}$ enthalten ist.

Um schließlich (iii)$\Rightarrow$(ii') zu beweisen, benutzen wir, daß $\mathfrak{g}^u$ reduktiv in $\mathfrak{g}$ ist (denn Gu ist abgeschlossen, und daher ist G_u reduktiv nach [20], [21], vgl. Beweis Satz 4.2). Es gibt daher ein $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}^u$-stabiles Komplement $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{g}^u$ in $\mathfrak{n}$. Andererseits ist $\mathfrak{g}^u$ offenbar ein Ideal in $\mathfrak{n}$ (vgl. (3)). Also gilt einerseits $[\mathfrak{r}, \mathfrak{g}^u] \subseteq \mathfrak{r}$ und andererseits $[\mathfrak{r}, \mathfrak{g}^u] \subseteq \mathfrak{g}^u$, mithin $[\mathfrak{r}, \mathfrak{g}^u] = 0$. Aus (iii) folgt nun $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{g}^{\mathfrak{g}^u} \subseteq \mathfrak{g}^u$, also $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}^u$. Damit ist alles bewiesen.

4.4 KOROLLAR. *Sei S eine Schicht von V, die einen (in V) abgeschlossenen Orbit enthält. Dann gilt*

$$\dim S \leq \dim Gv + \dim V^{\mathfrak{g}^v} \quad \textit{für alle} \quad v \in S.$$

Dies folgt sofort aus 4.3(a) und 2.1(b).

4.5 SATZ. *Sei v ein Element in V, dessen Stabilisator G_v einen maximalen Torus von G enthält. Dann ist der Orbit Gv abgeschlossen, und v gehört zu genau einer Schicht S von V; diese hat die Dimension*

$$\dim S = \dim Gv + \dim V^{\mathfrak{g}^v}.$$

Ist zudem G_v zusammenhängend und V ein einfacher G-Modul, dessen dualer Modul V^* vom Typ ω ($\omega \in \Omega$) ist, so gilt

$$\dim S = \dim Gv + m_\omega(Gv).$$

Beweis. Die erste Behauptung ist wohlbekannt (siehe z.B. [15], Corollary 1, S. 70), die zweite folgt aus 4.2. Nach Voraussetzung enthält $\mathfrak{g}^v$ eine Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$. Es gilt deshalb $\mathfrak{g}^{\mathfrak{g}^v} \subseteq \mathfrak{g}^{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}^v$ und die erste Dimensionsformel folgt mit 4.3, Zusatz (b). Nach 2.3(2) erhalten wir hieraus auch die zweite Dimensionsformel.

§5. Schichten der Lie-Algebra

Wir betrachten nun den Fall der adjungierten Darstellung einer zusammenhängenden halbeinfachen Gruppe G auf ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ (also $V=\mathfrak{g}$). Wir geben eine "explizite" Beschreibung aller Schichten von $\mathfrak{g}$ (Theorem 5.4) und erhalten als eines der Hauptresultate dieses Abschnittes, daß jede Schicht eine irreduzible Nullfaser hat, also genau einen nilpotenten Orbit enthält (5.7 und 5.8a)). Wir setzen o.E. G adjungiert voraus.

5.1. Wir erinnern an einige wohlbekannte Tatsachen (vgl. etwa [15]).

LEMMA. *Für ein Element $h \in \mathfrak{g}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*
(i) *Der Orbit Gh ist abgeschlossen.*
(ii) *h ist halbeinfach* (d.h. genauer: $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} h$ ist halbeinfach).
(iii) *Der Zentralisator $\mathfrak{g}^h$ ist eine Levi-Unteralgebra.*

Eine *Levi-Unteralgebra* von $\mathfrak{g}$ ist eine Unteralgebra $\mathfrak{m}$, die eine *Cartan-Unteralgebra* $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ umfaßt und deren Wurzelsystem bezüglich $\mathfrak{h}$ *linear abgeschlossen* in dem von $\mathfrak{g}$ ist. Eine solche Unteralgegra ist reduktiv, und ihr Zentrum $\mathfrak{k}$ hat die Eigenschaften

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^{\mathfrak{m}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{g}^{\mathfrak{k}}.$$

Es gibt nur endlich viele G-Konjugationsklassen von Levi-Unteralgebren: sie entsprechen bijektiv den Konjugationsklassen linear-abgeschlossener Teilmengen des Wurzelsystems unter der Operation der Weyl-Gruppe.

Sei nun ein halbeinfaches Element $h \in \mathfrak{g}$ gegeben, und setzen wir $\mathfrak{m} := \mathfrak{g}^h$, $\mathfrak{k} := \mathfrak{g}^{\mathfrak{m}}$. Nach dem Lemma oben und dem Satz 4.2 *gehört h zu einer einzigen Schicht von $\mathfrak{g}$, und diese läßt sich in der Form $\overline{G\mathfrak{k}}^{\mathrm{reg}}$ beschreiben.*

Bemerkung. Die Betrachtung von Schichten dieser Art geht auf J. Dixmier zurück: Er betrachtet in [6] zwei halbeinfache Elemente h, h' von $\mathfrak{g}$ als äquivalent, wenn $\mathfrak{g}^h$ zu $\mathfrak{g}^{h'}$ konjugiert ist und nennt die Äquivalenzklassen "nappes"; zu jedem "nappe" S studiert er dann die Menge $S^{\sim}$ der Elemente $x \in \bar{S}$ mit $\dim \mathfrak{g}^x = \dim \mathfrak{g}^h$ $(h \in S)$. In unsere Terminologie übersetzt, ist Dixmier's "nappe" S offenbar die Menge $G\mathfrak{k}^{\mathrm{reg}}$, wo $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^{\mathfrak{g}^h} (h \in S)$, und Dixmiers $S^{\sim}$ ist nichts anderes als $\overline{G\mathfrak{k}}^{\mathrm{reg}}$, also eine *Schicht* in unserem Sinne. Wir führen deshalb folgende Sprechweise ein:

DEFINITION. Eine *Dixmier-Schicht* von $\mathfrak{g}$ ist eine Schicht, die ein halbeinfaches Element enthält.

Für $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ sind alle Schichten Dixmier-Schichten (Ozeki-Wakimoto [19], vgl. [11]), für die anderen einfachen Lie-Algebren aber nicht (dies folgt aus Resultaten in [19]).

5.2. Sei $y \in \mathfrak{g}$ ein beliebiges Element und sei $y = x + h$ seine Jordanzerlegung (h halbeinfach, $x \in \mathfrak{g}^h$ nilpotent). Wir setzen

$$\mathfrak{m} := \mathfrak{g}^h, \quad \mathfrak{k} := \mathfrak{g}^{\mathfrak{m}} \quad \text{und} \quad M := G_h \quad (M \text{ ist zusammenhängend [10] 3.2 Lemma 5}).$$

Wir sagen, ein Element $y' \in \mathfrak{g}$ habe "*ähnliche Jordanzerlegung*" wie y, wenn es ein $g \in G$ gibt, so daß für die Jordanzerlegung $gy' = x' + h'$ von gy' gilt: $M = G_h = G_{h'}$ und $Mx' = Mx$.

Damit wird auf $\mathfrak{g}$ eine Äquivalenzrelation definiert, deren Äquivalenzklassen wir *Zerlegungsklassen* nennen. Offenbar ist die Zerlegungsklasse von y (wie oben) gleich $G(x + \mathfrak{k}^{\text{reg}})$. Wir erhalten

$$\mathfrak{g} = \bigcup_{\mathfrak{m}} \bigcup_{x} G(x + \mathfrak{k}^{\text{reg}}) \tag{$*$}$$

wobei wir $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^{\mathfrak{m}}$ setzen, $\mathfrak{m}$ ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen von Levi-Unteralgebren und x jeweils ein Repräsentatensystem der nilpotenten Konjugationsklassen in $\mathfrak{m}$ durchläuft. Nach Dynkin ist daher ($*$) eine endliche Vereinigung und wir erhalten:

LEMMA. $\mathfrak{g}$ *ist disjunkte endliche Vereinigung seiner Zerlegungsklassen und jede Zerlegungsklasse ist irreduzibel.*

(Die Irreduzibilität einer Zerlegungsklasse folgt unmittelbar aus ihrer Beschreibung als Bild der irreduziblen Varietät $G \times (x + \mathfrak{k}^{\text{reg}})$.)

Bemerkung. Für nicht konjugierte Levi-Unteralgebren $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ und beliebige nilpotente $x \in \mathfrak{m}$, $x' \in \mathfrak{m}'$ sind die zugehörigen Zerlegungsklassen $G(x + \mathfrak{k}^{\text{reg}})$ und $G(x' + \mathfrak{k}'^{\text{reg}})$ disjunkt. Ist aber $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$, so gilt $G(x + \mathfrak{k}^{\text{reg}}) = G(x' + \mathfrak{k}^{\text{reg}})$ genau dann, wenn x und x' unter dem Normalisator $N_G(\mathfrak{m}) = N_G(M)$ konjugiert sind; es gilt $N_G(M)^0 = M$ aber i.a. nicht $N_G(M) = M$. Die erste Vereinigung in ($*$) ist also disjunkt, die zweite i.a. jedoch nicht.

5.3. LEMMA. *Zu jeder Schicht S von $\mathfrak{g}$ gibt es eine Zerlegungsklasse von $\mathfrak{g}$, welche in S enthalten und dicht ist.*

Beweis. Jede Zerlegungsklasse Z von $\mathfrak{g}$ ist in einem $\mathfrak{g}^{(n)}$ ($n \in \mathbf{N}$) enthalten ($Z = Z^{\text{reg}}$, denn die Isotropiegruppen G_z, $z \in Z$, sind untereinander konjugiert). Nach 5.2 ist daher jedes $\mathfrak{g}^{(n)}$ eine endliche Vereinigung von Zerlegungsklassen. Da diese irreduzibel sind, enthält jede irreduzible Komponente von $\mathfrak{g}^{(n)}$ eine dichte Zerlegungsklasse.

Bemerkung. Wir werden später sehen (5.8 (d)), daß jede Schicht eine (endliche) Vereinigung von Zerlegungsklassen ist.

5.4. THEOREM. *Sei S eine Schicht von $\mathfrak{g}$. Dann gibt es eine parabolische Unteralgebra $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{g}$ und ein auflösbares Ideal $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{p}$, so daß gilt:*

$$S = G\mathfrak{r}^{\text{reg}}, \quad \bar{S} = G\mathfrak{r}.$$

Beweis. Nach Lemma 5.3 gibt es ein $y \in S$ mit Jordanzerlegung $y = x + h$ (h halbeinfach), so daß

$$\bar{S} = \overline{G(x+\mathfrak{k})} \tag{1}$$

ist mit $\mathfrak{m} := \mathfrak{g}^h$, $\mathfrak{k} := \mathfrak{g}^{\mathfrak{m}}$. In der reduktiven Untergruppe $M := G_h$ gibt es nach Kostant (vgl. [14], III, 4.19) eine parabolische Untergruppe P_2 von M und ein nilpotentes Ideal $\mathfrak{n}_2$ der Lie-Algebra $\mathfrak{p}_2$ von P_2, so daß der P_2-Orbit P_2x (offen und) dicht in $\mathfrak{n}_2$ ist. Sei nun $P_1 \subset G$ eine parabolische Untergruppe von G mit Levi-Anteil M ($P_1 = M \cdot B$ für eine geeignete Borel-Untergruppe B von G), auflösbarem Radikal R_1 und unipotentem Radikal U_1, also

$$P_1 = M \cdot R_1 = M \cdot U_1.$$

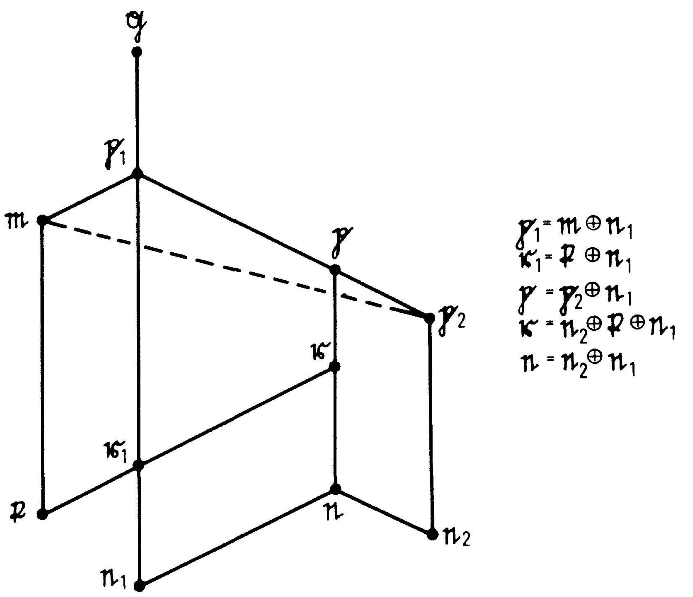
Für die zugehörigen Lie-Algebren $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{n}_1$ gilt dann entsprechend

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{m} + \mathfrak{r}_1 = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \oplus \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{n}_1.$$

Behauptung 1. *Mit $\mathfrak{p} := \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n} := \mathfrak{n}_2 + \mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{r} := \mathfrak{k} + \mathfrak{n}$ sind die Behauptungen des Theorems erfüllt.*

Zunächst ist leicht zu sehen, daß $\mathfrak{p}$ eine parabolische Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ und daß $\mathfrak{r}$ ein auflösbares Ideal von $\mathfrak{p}$ ist. (Wegen $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_1$ ist $[\mathfrak{p}, \mathfrak{r}] \subseteq [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{r}_1] + [\mathfrak{p}, \mathfrak{n}_2] \subseteq \mathfrak{r}_1 + [\mathfrak{p}_2, \mathfrak{n}_2] + [\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2] \subseteq \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{n}_2 + \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{r}$.) Weiter gilt $x + \mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{n}_2 + \mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{r}$, also nach (1)

$$\bar{S} = \overline{G(x+\mathfrak{k})} \subseteq \overline{G\mathfrak{r}} = G\mathfrak{r}. \tag{2}$$



Dabei gilt $\overline{G\mathfrak{r}} = G\mathfrak{r}$, weil $\mathfrak{r}$ stabil unter der parabolischen Untergruppe $P := P_2 U_1$ (mit Lie-Algebra $\mathfrak{p}$) von G ist (verwende [15], p. 68, Lemma 2). Die Behauptung 1 ergibt sich nun unmittelbar aus (2) und der folgenden Aussage:

Behauptung 2. *Die Zerlegungsklasse* $G(x + \mathfrak{t}^{\text{reg}})$ *enthält eine offene dichte Teilmenge von* $\mathfrak{r}$, *nämlich*

$$P(x + \mathfrak{t}^{\text{reg}}) = P_2 x + \mathfrak{t}^{\text{reg}} + \mathfrak{n}_1.$$

Sei $z \in x + \mathfrak{t}^{\text{reg}}$ beliebig, etwa $z = x + a$. Der Stabilisator von z in U_1 ist trivial, denn $G_z \subseteq G_a = M$ und $M \cap U_1 = 1$. Es gilt daher

$$\dim U_1 z = \dim U_1 = \dim \mathfrak{n}_1. \tag{3}$$

Andererseits ist $U_1 z \subseteq z + \mathfrak{n}_1$, denn U_1 operiert trivial auf $\mathfrak{p}_1/\mathfrak{n}_1$. Weil $U_1 z$ außerdem abgeschlossen ist ([15], p. 35, Proposition), folgt aus (3)

$$U_1 z = z + \mathfrak{n}_1. \tag{4}$$

Wegen $\mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{m} = \mathfrak{g}^{\mathfrak{t}} = \mathfrak{g}^a$ ist $P_2 z = P_2(x + a) = (P_2 x) + a$. Da die Gleichung (4) offenbar für jedes $z = px + a$ mit $p \in P_2$ gilt, folgt nun

$$P(x + a) = U_1 P_2(x + a) = U_1((P_2 x) + a) = P_2 x + a + \mathfrak{n}_1 \tag{5}$$

für alle $a \in \mathfrak{t}^{\text{reg}}$, also

$$P(x + \mathfrak{t}^{\text{reg}}) = P_2 x + \mathfrak{t}^{\text{reg}} + \mathfrak{n}_1.$$

Der Abschluß dieser Menge umfaßt $\overline{P_2x}+\mathfrak{k}+\mathfrak{n}_1=\mathfrak{n}_2+\mathfrak{k}+\mathfrak{n}_1=\mathfrak{r}$. Deshalb ist sie (offen und) dicht in $\mathfrak{r}$. – Dies beweist die Behauptung 2 und damit das Theorem.

5.5. Der Beweis von 5.4 liefert noch einige zusätzliche Einsichten in die hier präsentierte Beschreibung der Schichten von $\mathfrak{g}$, die wir im folgenden anmerken wollen. (Sie werden im §7 eine wesentliche Rolle spielen.) Seien dazu $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{n}$, P wie in 5.4 (Behauptungen 1 and 2).

ZUSATZ. *Sei z ein Element aus $\mathfrak{r}^{\mathrm{reg}}(\subseteq S)$. Dann gilt:*

(a) $\dim G_z=\dim \mathfrak{p}/\mathfrak{n}$.
(b) $\dim Gz=\dim \mathfrak{n}+\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$.
(c) $\overline{Pz}=z+\mathfrak{n}$.
(d) $G_z^0\subseteq P$.
(e) *Gehört z zur dichten Zerlegungsklasse der Schicht, so ist sogar $G_z\subseteq P$* (das heißt $G_z=P_z$).
(f) *$Gz\cap\mathfrak{r}$ ist eine Vereinigung von endlich vielen P-Orbiten.*

Beweis. Wir benutzen die bei der Konstruktion von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{n}$ im Beweis von 5.4 eingeführten Notationen. Für das Element $y=x+h$ in der dichten Zerlegungsklasse der Schicht ist dann $G_y=(G_h)_x=M_x$, und nach Konstruktion von P_2 in [14] gilt $M_x\subseteq P_2$. Wegen $P_2\subseteq P$ beweist das die Aussage e). Außerdem folgt $G_y=M_x=(P_2)_x$, also

$$\dim G_y=\dim (P_2)_x=\dim P_2-\dim P_2x=\dim P_2-\dim \mathfrak{n}_2$$
$$=\dim \mathfrak{p}_2/\mathfrak{n}_2=\dim \mathfrak{p}/\mathfrak{n},\quad \text{und}$$
$$\dim Gy=\dim \mathfrak{g}-\dim \mathfrak{p}/\mathfrak{n}=\dim \mathfrak{n}+\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{p}.$$

Das beweist (a) und (b).

Da $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{n}$ Ideale von $\mathfrak{p}$ sind ($[\mathfrak{p},\mathfrak{n}]=[\mathfrak{p},\mathfrak{n}_2+\mathfrak{n}_1]\subseteq[\mathfrak{p},\mathfrak{n}_2]+[\mathfrak{p}_1,\mathfrak{n}_1]\subseteq[\mathfrak{p}_2+\mathfrak{n}_1,\mathfrak{n}_2]+\mathfrak{n}_1\subseteq\mathfrak{n}_2+[\mathfrak{n}_1,\mathfrak{p}_1]+\mathfrak{n}_1=\mathfrak{n}_2+\mathfrak{n}_1=\mathfrak{n}$), sind $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{n}$ P-stabil, und wegen

$$[\mathfrak{p},\mathfrak{r}]\subseteq\mathfrak{r}\cap[\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_1]=(\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{n})\cap([\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\oplus\mathfrak{n}_1)=\mathfrak{n}$$

operiert P auf $\mathfrak{r}/\mathfrak{n}$ trivial. Deshalb gilt $Pz\subseteq z+\mathfrak{n}$ für jedes $z\in\mathfrak{r}$. Ist nun $z\in\mathfrak{r}^{\mathrm{reg}}$, so folgt nach (a)

$$\dim \mathfrak{p}/\mathfrak{n}=\dim G_z\geqslant\dim P_z=\dim P-\dim Pz\geqslant\dim P-\dim(z+\mathfrak{n})$$
$$=\dim \mathfrak{p}/\mathfrak{n}.$$

Also steht hier überall das Gleichheitszeichen. Aus $\dim G_z = \dim P_z$ folgt $G_z^0 = P_z^0$, also d), und aus $\dim Pz = \dim(z+\mathfrak{n})$ folgt nun $\overline{Pz} = z + \mathfrak{n}$, also c).

Die Aussage (f) schließlich hat folgenden Grund: Für ein beliebiges Element $r \in \mathfrak{r}$ ist $r + \mathfrak{n} = \tau(r) + \mathfrak{n}$ mit genau einem Element $\tau(r) \in \mathfrak{k}$, und man kann sich überlegen, daß dieses $\tau(r)$ unter P zum halbeinfachen Anteil von r konjugiert ist. Bezeichnet nun W die Weyl-Gruppe von $\mathfrak{g}$ bezüglich einer Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, die $\mathfrak{k}$ umfaßt, so kann ein $r \in \mathfrak{r}$ höchstens dann unter G zu z konjugiert sein, wenn $\tau(r)$ unter W zu $\tau(z)$ konjugiert ist. Diese Überlegung zeigt, daß Gz nur endlich viele Nebenklassen aus $\mathfrak{r}/\mathfrak{n}$ trifft, etwa $z_1 + \mathfrak{n}, \ldots, z_m + \mathfrak{n}$ mit $z_1, \ldots, z_m \in \mathfrak{r} \cap Gz$. Weil alle z_i zu z konjugiert sind, liegen sie sogar in $\mathfrak{r}^{\text{reg}}$, und nach Teil (c) folgt, daß z_i einen dichten P-Orbit in $z_i + \mathfrak{n}$ erzeugt (für $i = 1, \ldots, m$). Damit sieht man: $Gz \cap \mathfrak{r} = Pz_1 \cup \cdots \cup Pz_m$.

Bemerkung. Wir halten fest, daß $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{n}$ P-stabil sind und daß P auf $\mathfrak{r}/\mathfrak{n}$ trivial operiert (siehe oben). Wir werden später sehen (Korollar 5.8 (b)), daß jede Nebenklasse $z + \mathfrak{n} \in \mathfrak{r}/\mathfrak{n}$ ein Element aus $\mathfrak{r}^{\text{reg}}$ enthält, so daß also nach (c) *jede solche Nebenklasse einen dichten P-Orbit enthält.*

5.6. Das Theorem 5.4 legt die Frage nahe, ob man denn auch stets eine Schicht S von $\mathfrak{g}$ erhält, wenn man von einem beliebigen auflösbaren Ideal $\mathfrak{r}$ einer parabolischen Unteralgebra $\mathfrak{h}$ ausgeht und die Menge $S = G\mathfrak{r}^{\text{reg}}$ bildet. Die Antwort ist i.a. negativ (z.B. immer dann, wenn man $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{g}$ und für $\mathfrak{r}$ das Nilradikal von $\mathfrak{p}$ nimmt). Wir heben deshalb hervor:

SATZ. *Ist $\mathfrak{r}$ das auflösbare Radikal einer parabolischen Unteralgebra $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{g}$, so ist $S := G\mathfrak{r}^{\text{reg}}$ eine Schicht von $\mathfrak{g}$.*

Beweis. Ist nämlich $\mathfrak{m}$ eine maximale reduktive Unteralgebra ("Levi-Faktor") von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{k} := \mathfrak{g}^{\mathfrak{m}}$, so ist $G\mathfrak{k}^{\text{reg}}$ eine Zerlegungsklasse aus halbeinfachen Elementen, und nach Satz 4.2 ist $\overline{G\mathfrak{k}^{\text{reg}}}$ eine Schicht von $\mathfrak{g}$ (vgl. die Ausführungen in 5.1). Schließlich entnimmt man aus [2], 5.17 (oder auch aus den Argumenten in 5.4), daß $\overline{G\mathfrak{k}} = G\mathfrak{r}$ ist.

Bemerkung. Die so erhaltenen speziellen Schichten enthalten eine dichte Zerlegungsklasse aus halbeinfachen Elementen; es sind also *Dixmier-Schichten.* Umgekehrt werden auch alle Dixmier-Schichten so erhalten: Im Falle einer Dixmier-Schicht S liefert die Konstruktion in 5.4 offenbar für $\mathfrak{r}$ das volle auflösbare Radikal von $\mathfrak{p}$. (In 5.4 (1) wird $x = 0$, also $\mathfrak{n}_2 = 0$, $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1$.) Man kann sogar sagen: *Im Theorem* 5.4 *ist die Schicht $S = G\mathfrak{r}^{\text{reg}}$ genau dann eine Dixmier-Schicht, wenn $\mathfrak{r}$ das Radikal von $\mathfrak{p}$ ist.*

5.7. Wir kommen jetzt zu der (für diese Arbeit) wichtigsten Folgerung aus dem Theorem 5.4. Sei $\pi: \mathfrak{g} \to Y$ der kanonische Morphismus auf das maximale Spektrum Y des Ringes der G-invarianten Funktionen auf $\mathfrak{g}$ (vgl. 3.3). Hat ein Element $y \in \mathfrak{g}$ den halbeinfachen Anteil h, so gilt bekanntlich $\pi(h) = \pi(y)$ (siehe etwa [15]). Es ist daher Gh der einzige abgeschlossene Orbit der Faser $\pi^{-1}\pi(y)$ und alle Elemente aus $\pi^{-1}\pi(y)$ haben einen zu h konjugierten halbeinfachen Bestandteil. Insbesondere ist die Nullfaser $\pi^{-1}\pi(0)$ gleich der Menge $\mathcal{N}$ der nilpotenten Elemente von $\mathfrak{g}$.

KOROLLAR. *Für jede Schicht S der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist die Nullfaser von $\bar{S}$ irreduzibel.*

Beweis. Nach den Vorbemerkungen ist die Nullfaser von $\bar{S}$ gleich $\mathcal{N} \cap \bar{S}$. Mit $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{n}$ wie in 5.4 (Behauptung 1) ist aber $\bar{S} = G\mathfrak{r}$ und $\mathcal{N} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{n}$, also $\mathcal{N} \cap \bar{S} = \mathcal{N} \cap G\mathfrak{r} = G\mathfrak{n}$. Diese Menge ist irreduzibel (als Bild von $G \times \mathfrak{n}$).

Bemerkung. Für den Spezialfall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ findet man dieses Resultat schon bei Dixmier ([6], Proposition 4.8), allerdings in anderer Sprache (vgl. 5.1) und mit einem vollkommen anderen Beweis. Allgemeiner wurde dann bei Johnston-Richardson [9] und in [2], 5.17 der Fall der Dixmier-Schichten behandelt (vgl. auch [1]); dort findet man schon die in 5.6 angegebene Beschreibung der Dixmier-Schichten sowie die Beobachtung, daß daraus sofort die Irreduzibilität der Nullfaser folgt. – Man beachte, daß von den hier für den Fall beliebiger Schichten (für den Beweis des Theorems 5.4) angestellten Überlegungen die meisten trivial werden, wenn man sie auf den Fall der Dixmier-Schichten spezialisiert.

5.8. Wir geben noch einige weitere Konsequenzen aus dem Theorem 5.4 an, von denen später allerdings nur (a) und (b) gebraucht werden.

KOROLLAR (a). *Jede Schicht S von $\mathfrak{g}$ enthält genau einen nilpotenten Orbit.*

Beweis. Wir betrachten die Einschränkung des Morphismus $\pi: \mathfrak{g} \to Y$ (5.7) auf $\bar{S}$, $\pi': \bar{S} \to \pi(\bar{S})$. Sei d die Dimension der Orbiten in S. Da $S \subseteq \bar{S}$ offen und dicht ist, folgt aus 2.0, daß alle Fasern von π' eine Dimension $\geqslant d$ haben, insbesondere auch die Nullfaser $\pi'^{-1}\pi'(0) = \bar{S} \cap \mathcal{N}$. Diese ist nach 5.7 irreduzibel und enthält daher einen dichten Orbit O (es gibt nur endlich viele nilpotente Orbiten). Wegen $\dim O = \dim \bar{S} \cap \mathcal{N} \geqslant d$ gehört O zu S und ist offenbar der einzige nilpotente Orbit in S. (Man kann auch den nachfolgenden Satz 6.1 benutzen.)

KOROLLAR (b). *Seien* S, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{n}$ *wie im Theorem. Dann ist* $S \cap (z+\mathfrak{n}) \neq \emptyset$ *für jedes* $z \in \mathfrak{r}$.

Beweis. Die Menge $G(kz+\mathfrak{n})$ ist irreduzibel und umfaßt $G\mathfrak{n} = \mathcal{N} \cap \bar{S}$ (vgl. 5.7), also auch den nilpotenten Orbit der Schicht S (Korollar (a)). Es ist also $G(kz+\mathfrak{n}) \cap S \neq \emptyset$ und somit auch $S \cap (kz+\mathfrak{n}) \neq \emptyset$. Weil S offen in seinem Abschluß ist, gibt es $t \in k$ mit $S \cap (tz+\mathfrak{n}) \neq \emptyset$. Weil G linear operiert, hat S deshalb auch einen nicht leeren Durchschnitt mit $t^{-1}(tz+\mathfrak{n}) = z+\mathfrak{n}$, wie behauptet.

KOROLLAR (c). *Sei* $S = G\mathfrak{r}^{\text{reg}}$ *wie im Theorem. Sei* r *der Rang von* $\mathfrak{r}$ (die Dimension einer maximalen abelschen, in $\mathfrak{g}$ reduktiven Unteralgebra $\mathfrak{k}$), *und sei* d *die Dimension der Orbiten in* S. *Dann ist*

$$\dim S = r + d.$$

(Denn d ist die Dimension der Fasern und r die Dimension des Bildes von $\pi \mid \bar{S}$.)

KOROLLAR (d). *Jede Schicht* S *von* $\mathfrak{g}$ *ist eine* (endliche) *Vereinigung von Zerlegungsklassen* (5.2).

Beweis. Sei $y' = h' + x'$ die Jordan-Zerlegung eines Elementes von S (h halbeinfach), $\mathfrak{m}' = \mathfrak{g}^{h'}$, $\mathfrak{k}' = \mathfrak{g}^{\mathfrak{m}'}$. Wir müssen zeigen, daß seine ganze Zerlegungsklasse $G(x'+\mathfrak{k}'^{\text{reg}})$ zu S gehört. Sei $G(x+\mathfrak{k}^{\text{reg}})$ eine *dichte* Zerlegungsklasse in S (5.3). Aus 5.4, Behauptung 1 geht hervor, daß $\bar{S} = G\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{r} = \mathfrak{k} + \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}$ nilpotent, ist. Nach einer geeigneten Konjugation können wir o.E. $y' \in \mathfrak{r}$ und sogar $h' \in \mathfrak{k}$ annehmen. Es folgt dann $\mathfrak{m}' := \mathfrak{g}^{h'} \supseteq \mathfrak{g}^{\mathfrak{k}} =: \mathfrak{m}$, also

$$\mathfrak{k}' = \mathfrak{g}^{\mathfrak{m}'} \subseteq \mathfrak{g}^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{k}.$$

Folglich ist $x' + \mathfrak{k}'$ in $\mathfrak{r}$, also $G(x'+\mathfrak{k}')$ in $G\mathfrak{r} = \bar{S}$ enthalten. Die Zerlegungsklasse $G(x'+\mathfrak{k}'^{\text{reg}})$ liegt daher ganz in $\bar{S}^{\text{reg}} = S$, was zu zeigen war.

Bemerkung. Aus dem Beweis des Theorems 5.4 ergibt sich sofort das folgende Resultat (das wegen Lemma 5.3 das Theorem 5.4 mit einschließt). *Sei* $y \in \mathfrak{g}$ *ein beliebiges Element mit Jordanzerlegung* $y = x + h$ (h *halbeinfach,* $x \in \mathfrak{g}^h$) *und sei* $\mathfrak{m} := \mathfrak{g}^h$, $\mathfrak{k} := \mathfrak{g}^{\mathfrak{m}}$. *Dann gibt es eine parabolische Unteralgebra* $\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{g}$ *und ein auflösbares Ideal* $\mathfrak{r}$ *in* $\mathfrak{p}$ *mit*

$$\overline{G(x+\mathfrak{k})} = G\mathfrak{r}.$$

Wir erhalten daraus unmittelbar die folgende Präzisierung von Korollar (c) und von Lemma 5.2:

KOROLLAR (e). *Der Abschluß einer Zerlegungsklasse von $\mathfrak{g}$ ist eine (endliche) Vereinigung von Zerlegungsklassen.*

Hieraus folgt leicht (durch Induktion nach der Dimension der Abschlüsse):

KOROLLAR (f). *Die Zerlegungsklassen von $\mathfrak{g}$ sind lokal abgeschlossene (irreduzible) Teilmengen.*

5.9. *Beispiel.* Sei $G = \mathrm{Sp}(6, \mathbf{C})$ (Typ C_3). Dann besteht $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(6, \mathbf{C})$ aus 9 Schichten von den Dimensionen 21, 18, 18, 15, 15, 13, 11, 6, 0 mit den Orbitdimensionen 18, 16, 16, 14, 14, 12, 10, 6, 0. Neben den 7 Dixmier-Schichten gibt es zwei Schichten aus nichtpolarisierbaren Orbiten: die 6-dimensionale (bestehend aus einem einzigen Orbit) und eine der beiden 15-dimensionalen (bestehend aus einer 1-parametrigen Familie von 14-dimensionalen Orbiten). Die beiden subregulären Schichten (der Dimension 18) enthalten denselben nilpotenten Orbit, die beiden 15-dimensionalen Schichten sind hingegen disjunkt.

§6. Zur Multiplizitätenvermutung von Dixmier

6.1. Der folgende Satz wird die Verbindung zwischen den Betrachtungen über Schichten (§§4 und 5) und unseren Resultaten über Multiplizitäten (§§2 und 3) herstellen. Wir betrachten eine lineare Darstellung von G auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V.

SATZ. *Sei S eine Schicht von V mit der Eigenschaft, daß die Nullfaser von $X := \bar{S}$ einen dichten Orbit O enthält. Wie in 3.3 bezeichne $\pi: X \to Y$ die kanonische Projektion auf das maximale Spektrum der invarianten Funktionen auf X. Dann enthält jede irreduzible Komponente einer beliebigen Faser von π einen dichten Orbit; dieser gehört zur Schicht S und hat als assoziierten Kegel $\bar{O}$. Der Orbit O ist der einzige instabile Orbit der Schicht und kann in jeden anderen Orbit der Schicht deformiert werden.*

Beweis. Wir benutzen die in 3.3 eingeführten Notationen ($R := \mathcal{R}(X)$, $C := R^G$, $C_+ \subseteq C$ das einzige homogene Maximalideal von C). Sei y ein Punkt von Y und $\mathfrak{m}$ das zugehörige Maximalideal von C. Dann ist C_+ das assoziierte graduierte Ideal zu $\mathfrak{m}$. Das die Nullfaser von $\bar{S}$ definierende Ideal C_+R (vgl. 3.3) ist deshalb im assoziierten graduierten Ideal von $\mathfrak{m}R$ enthalten. Da sich beim Übergang von einem Ideal zum assoziierten graduierten die Krull-Dimension nicht ändert (vgl, [3], 5.5), folgt daraus

$$\dim \pi^{-1}(y) = \dim \mathcal{V}(\mathfrak{m}R) \leq \dim \mathcal{V}(C_+R) = \dim \pi^{-1}(\pi(0)) = \dim O.$$

Da jeder Orbit in X in einer Faser $\pi^{-1}(y)$ enthalten sein muß, ist $\dim O$ offenbar die maximale Orbit-Dimension in X, also $O \subseteq X^{\text{reg}} = S$. Für diejenigen irreduziblen Komponenten einer Faser, die S treffen, muß die Dimension sogar gleich $\dim O$ sein. Weil aber S offen und dicht in X ist, muß dies andererseits schon die minimale Dimension sein, die eine irreduzible Komponente einer Faser von π überhaupt haben kann (verwende 2.0). Dies beweist:

Die irreduziblen Komponenten der Fasern von π haben sämtlich die Dimension $\dim O = \dim \pi^{-1}\pi(0)$.

Sei nun $y \neq \pi(0)$ und F eine irreduzible Komponente von $\pi^{-1}(y)$. Nach den Überlegungen zu Anfang des Beweises ist der assoziierte Kegel $\mathcal{K}F$ in der Nullfaser $\pi^{-1}\pi(0)$ enthalten, und es ist

$$\dim \mathcal{K}F = \dim F = \dim \pi^{-1}\pi(0).$$

Weil G und damit auch $\bar{O} = \pi^{-1}\pi(0)$ irreduzibel sind, folgt daraus

$$\mathcal{K}F = \pi^{-1}\pi(0) = \bar{O}.$$

Da nun der Abschluß $\overline{\mathscr{C}F}$ des von F erzeugten Kegels den assoziierten Kegel $\mathcal{K}F$ umfaßt (3.1 (2)), trifft er die Schicht S: denn $S \cap \mathcal{K}F \supseteq O$ (siehe oben). Da S offen in X ist, folgt daraus $S \cap \mathscr{C}F \neq \emptyset$, etwa $S \cap tF \neq \emptyset$ mit $t \in \dot{k}$. Dann ist aber natürlich auch $S \cap F \neq \emptyset$, und daraus folgt, daß F einen dichten Orbit O' enthält ($O' \subset S$). Es ist nun klar, daß O in diesen Orbit O' deformiert werden kann. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

6.2. *Bemerkungen.* (a) Satz und Beweis 6.1 bleiben unverändert richtig, wenn man darin für X einen beliebigen G-stabilen irreduziblen abgeschlossenen Kegel von V und $S = X^{\text{reg}}$ nimmt. Der folgende Zusatz bleibt richtig, wenn man über die Nullfaser von X lediglich voraussetzt, daß ihre Dimension gleich der der Orbiten in S ist.

(b) ZUSATZ. *Unter den Voraussetzungen des Satzes* 6.1 *ist der Morphismus*

$\pi: X \to Y$ *äquidimensional* (das heißt: alle irreduziblen Komponenten aller Fasern von π haben dieselbe Dimension).

(c) Mit den gleichen Methoden kann man auch folgendes beweisen:

Sei $X \subseteq V$ ein G-stabiler irreduzibler abgeschlossener Kegel. Hat die Nullfaser von X die Eigenschaft, daß jede ihrer irreduziblen Komponenten einen dichten Orbit enthält, so hat jede Faser von π diese Eigenschaft, und π ist äquidimensional.

6.3. THEOREM. *Sei S eine Schicht der halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Dann enthält S genau einen nilpotenten Orbit $Gx (x \in \mathfrak{g})$. Ist der Abschluß $\overline{Gx}$ normal und der Stabilisator G_x zusammenhängend, so gilt*

$$(*) \qquad m_\omega(Gx) = m_\omega(\overline{Gx}) = m_\omega(Gz) \quad \text{für alle} \quad z \in S \quad \text{und} \quad \omega \in \Omega,$$

das heißt, alle Orbiten in S (und ihre Abschlüsse) haben dieselben Multiplizitäten.

Beweis. Nach 5.7 enthält die Nullfaser von $\bar{S}$ einen dichten Orbit Gx, das heißt, der Satz 6.1 ist anwendbar. Danach ist Gx der einzige nilpotente Orbit in S und in jeden anderen Orbit Gz von S deformierbar. Nach 3.4 sind alle Voraussetzungen des Theorems 3.8 erfüllt, und daraus folgt die Behauptung.

6.4. KOROLLAR. *Sei S eine Schicht der Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, so daß die halbeinfachen Matrizen $h \in S$ höchstens einen mehrfachen Eigenwert haben. Dann gilt die Gleichung* 6.3 $(*)$ *für alle x, $z \in S$ und $\omega \in \Omega$.*

Beweis. Der Stabilisator G_x ist für *jedes* Element $x \in \mathfrak{sl}_n$ zusammenhängend (3.4). Sei nun Gx der nilpotente Orbit in einer Schicht S mit der im Korollar angegebenen Eigenschaft. Wir erinnern daran, daß die Schichten und die nilpotenten Orbiten von $\mathfrak{sl}_n$ durch die Partitionen von n klassifiziert werden (vgl. dazu 1.6). Die angegebene Bedingung besagt, daß S einer Partition $n = p + 1 + \cdots + 1$ entspricht. Dann entspricht Gx der dualen Partition $n = q + 1 + \cdots + 1$ $(q = n - p)$. Für diese nilpotenten Orbiten beweist Hesselink [7], daß ihr Abschluß normal ist. Nun folgt das Korollar aus dem Theorem 6.3.

6.5. *Bermerkungen.* Damit haben wir die Multiplizitäten-Vermutung von Dixmier (1.7) für n verschiedene Schichten von $\mathfrak{sl}_n$ bewiesen, darunter die reguläre Schicht (für die sie nach Kostant bekannt war) und die subreguläre Schicht.

Ob der Abschluß $\overline{Gx}$ für *alle* nilpotenten Orbiten Gx einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ *normal* ist, (und damit insbesondere das Korollar 6.4 für alle

Schichten von $\mathfrak{sl}_n$ gilt), ist ein offenes Problem. Kostant [10] hat dies für den regulären nilpotenten Orbit bewiesen, und Hesselink [7] für einige weitere Fälle, darunter der oben für $\mathfrak{sl}_n$ benutzte, sowie der Fall des nilpotenten Orbits der minimal Dimension >0 in einer beliebigen einfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Der letztere Fall war auch schon von Popov und Vinberg [16] behandelt worden, ist allerdings für $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{sl}_n$ hier uninteressant, weil diese nilpotenten Orbiten nicht deformierbar sind (vgl. 14).

6.6. *Beispiel.* (a) Sei $G = \mathrm{PSO}_5$. Dann hat die Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_5$ genau fünf Schichten; davon sind vier Dixmier-Schichten, nämlich die reguläre Schicht (der Dimension 10, bestehend aus Orbiten der Dimension 8), die beiden subregulären Schichten (der Dimension 7, bestehend aus Orbiten der Dimension 6) und die "Nullschicht" (der Dimension 0). Außerdem gibt es eine nicht Dixmier'sche Schicht der Dimemsion 4, bestehend aus dem einzigen Orbit der Dimension 4. – Die beiden subregulären Schichten enthalten denselben nilpotenten Orbit. Dessen Abschluß ist nach Hesselink [7] normal, aber der zugehörige Stabilisator ist *nicht* zusammenhängend. (Er hat zwei Zusammenhangskomponenten.) Für eine der beiden subregulären Schichten ist die Gleichung 6.3 ($*$) trotzdem richtig, für die andere aber nicht.

(b) Weitgehend analoge Verhältnisse liegen vor, wenn G die einfache Gruppe vom Typ G_2 ist. Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ hat dann wieder vier Dixmier-Schichten: die reguläre (Dimension 14, Orbitdimension 12), zwei subreguläre (Dimension 11, Orbitdimension 10) und die Nullschicht. Außerdem gibt es noch genau zwei weitere Schichten, bestehend aus je einem einzigen Orbit der Dimension 8 bzw. 6. Die beiden subregulären Schichten enthalten denselben nilpotenten Orbit. Für ein Element x aus diesem Orbit ist G_x/G_x^0 isomorph zur symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_3$ von drei Ziffern. Wieder ist das Theorem 6.3 also nicht auf die subregulären Schichten anwendbar, und tatsächlich ist 6.3 ($*$) für eine dieser beiden Schichten nicht erfüllt. Dies wollen wir nun für ein spezielles ω näher ausführen.

(c) Sei nun G einfach vom Typ B_2 bzw. G_2 und sei ω der Isomorphietyp eines einfachen G-moduls V der Dimension 5 bzw. 7. Wir fixieren eine Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und betrachten das zugehörige Wurzelsystem. Seien α eine kurze und $\tilde{\alpha}$ eine lange Wurzel. Seien $0 \neq h \in \mathfrak{h}$ orthogonal zu α und $0 \neq \tilde{h} \in \mathfrak{h}$ orthogonal zu $\tilde{\alpha}$. Dann sind $S := \overline{Gkh}^{\mathrm{reg}}$ und $\tilde{S} = \overline{Gk\tilde{h}}^{\mathrm{reg}}$ die beiden subregulären Schichten.

Die Gewichte von V sind genau die (4 bzw. 6) kurzen Wurzeln und die Null. Insbesondere ist der Nullgewichtsraum eindimensional. Für ein reguläres halbeinfaches Element $y \in \mathfrak{g}$ gilt daher

$$m_\omega(Gy) = \dim V^{\mathfrak{h}} = 1.$$

Weil $\mathfrak{m} := \mathfrak{g}^h$ als Wurzelsystem $\{\pm\alpha\}$ hat, wird offenbar $V^{\mathfrak{m}} = 0$; hingegen hat $\tilde{\mathfrak{m}} := \mathfrak{g}^{\tilde{h}}$ als Wurzelystem $\{\pm\tilde{\alpha}\}$ und daher wird $V^{\tilde{\mathfrak{m}}} = V^{\tilde{\mathfrak{b}}}$. Also gilt

$$m_\omega(Gh) = 0,$$

aber

$$m_\omega(G\tilde{h}) = 1.$$

Dies zeigt, daß die Gleichung 6.3 $(*)$ *nur für eine der beiden subregulären Schichten S, $\tilde{S}$ richtig sein kann* (und zwar nur für die mit der kleineren Multiplizität $m_\omega(Gh)$, also nur für S, wie sofort aus der Methode der assoziierten Kegel (3.2) folgt). – Die Tatsache, daß die subreguläre Schicht $\tilde{S}$ die Gleichungen 6.3 $(*)$ nicht erfüllen kann, ergibt sich auch aus einem allgemeinen Resultat (Theorem 7.1), dem das nun folgende Kapitel gewidmet ist.

§7. Zum Einfluß der Komponentengruppe G_x/G_x^0 auf die Multiplizitäten eines Orbits Gx

7.1. In diesem Kapitel wollen wir untersuchen, was geschieht, wenn man im Theorem 6.3 die Voraussetzungen über Zusammenhang und Normalität fallen läßt. Dabei müssen wir uns im Allgemeinen auf relativ grobe Aussagen über die "asymptotische Verteilung" der Multiplizitäten $m_\omega(Gx)$ (bei variablem $\omega \in \Omega$) beschränken. Hierzu führen wir in Ω einen Längenbegriff ein: Ist das höchste Gewicht eines einfachen Moduls vom Typ ω eine Summe von l Fundamentalgewichten, so setzen wir $|\omega| := l$. Ist nun A eine endlich erzeugte kommutative k-Algebra, auf der G lokal endlich mit endlichen Multiplizitäten operiert, so definieren wir ihre "Multiplizitätenfunktion" $\mathscr{F}(A)\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ durch

$$\mathscr{F}(A)(n) := \sum_{|\omega| \leq n} m_\omega(A).$$

Man kann sich überlegen, daß diese Funktion sich asymptotisch wie ein Polynom verhält; genauer gesagt ist (vgl. [1])

$$\mathscr{F}(A)(n) = qn^d + 0(n^{d-1}) \qquad (n \to \infty)$$

mit passenden $d \in \mathbf{N}$, $0 < q \in \mathbf{Q}$. Im folgenden machen wir meist nur Aussagen über den "Führungsterm" qn^d solcher Funktionen; Gleichungen, die nur bis auf Terme kleinerer Ordnung in n gelten, markieren wir durch einen Punkt ($\doteq$, wie in [1]). Ist U ein Orbit (oder der Abschluß eines Orbits) in einer Varietät mit

G-Operation, so ist $m_\omega(U) = m_\omega(\mathcal{R}(U))$ für alle $\omega \in \Omega$, und wir setzen zur *Abkürzung* $\mathcal{F}(U) := \mathcal{F}(\mathcal{R}(U))$.

Nach Lemma 3.7 und [1], Lemma 2.6 gilt für alle Orbiten Gx in der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G:

$$(*) \qquad \mathcal{F}(Gx) \doteq \mathcal{F}(\overline{Gx}).$$

Dies bedeutet, daß bei einer derartigen Vergröberung unserer Aussagen über die Multiplizitäten der Unterschied zwischen Gx und $\overline{Gx}$ (insbesondere auch die delikate Frage nach der Normalität von $\overline{Gx}$) keine Rolle mehr spielt.

7.2. Wir können jetzt das Hauptergebnis dieses Kapitels aussprechen. Wir betrachten – wie im §5 – die adjungierte Operation einer zusammenhängenden halbeinfachen Gruppe G auf ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$.

THEOREM. *Sei S eine Schicht von $\mathfrak{g}$. Sei P eine parabolische Untergruppe von G, mit Lie-Algebra $\mathfrak{p}$, so daß $S = G\mathfrak{r}^{\mathrm{reg}}$ für ein auflösbares Ideal $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{p}$ ist* (5.4). *Dann gilt für alle x, $y \in \mathfrak{r}^{\mathrm{reg}}$:*

$$[G_x : P_x]\mathcal{F}(Gx) \doteq [G_y : P_y]\mathcal{F}(Gy).$$

Bevor wir zum Beweis des Theorems kommen (siehe 7.6, sowie die Vorbereitungen in 7.4, 7.5 und die nachgestellten Lemmata 7.8 bis 7.10), merken wir zunächst einiges zu seiner näheren Erläuterung an.

(a) Wir erinnern daran, daß nach 5.5d)

$$G_x^0 \subset G_x \cap P = P_x \subset G_x$$

gilt. *Insbesondere ist $[G_x : P_x]$ endlich*, nämlich ein Teiler der Zahl $[G_x : G_x^0]$.

(b) *Spezialfall. Für ein nilpotentes $x \in \mathfrak{r}^{\mathrm{reg}}$ sei G_x zusammenhängend (oder auch nur $G_x = P_x$). Dann gilt $G_y = P_y$ für beliebiges $y \in \mathfrak{r}^{\mathrm{reg}}$ und daher $\mathcal{F}(Gx) \doteq \mathcal{F}(Gy)$ für alle $y \in S$.*

(Denn für $y \in \mathfrak{r}^{\mathrm{reg}}$ gilt nach dem Theorem $[G_y : P_y] \cdot \mathcal{F}(Gy) \doteq \mathcal{F}(Gx) \doteq \mathcal{F}(\overline{Gx}) \leq \mathcal{F}(\overline{Gy}) \doteq \mathcal{F}(Gy)$, und hieraus folgt $[G_y : P_y] = 1$, also $\mathcal{F}(Gx) \doteq \mathcal{F}(Gy)$.)

(c) Gehört $y \in \mathfrak{r}^{\mathrm{reg}}$ zu der dichten Zerlegungsklasse (5.3) in der Schicht S, so ist $[G_y : P_y] = 1$ (5.5e)). Deshalb kann man die Behauptung im Theorem auch so formulieren: *Sei z ein festes Element "allgemeiner Lage" in S* (d.h. aus der dichten Zerlegungsklasse). *Dann gilt für alle $x \in \mathfrak{r}^{\mathrm{reg}}$:*

$$\mathcal{F}(Gx) \doteq [G_x : P_x]^{-1}\mathcal{F}(Gz).$$

(d) Betrachten wir nun speziell den Fall einer *Dixmier-Schicht* S. Dann ist $\mathfrak{r}$ das Radikal von $\mathfrak{p}$ (5.6), und die Bedingung $x \in \mathfrak{r}^{\text{reg}}$ bedeutet gerade, daß $\mathfrak{p}$ eine *Polarisierung* von x ist (vgl. [1], 6.2, 6.5 und [6] für die Terminologie). *Für nilpotentes x stimmt die im Theorem auftretende Zahl $[G_x : P_x]$ mit der Anzahl der zu $\mathfrak{p}$ konjugierten Polarisierungen von x überein.* (Benutze [6], Lemma 5.1, sowie die Tatsache, dass P selbstnormalisierend ist.)

7.3. KOROLLAR. *Seien S eine Dixmier-Schicht von $\mathfrak{g}$, $h \in S$ ein halbeinfaches und $x \in S$ ein nilpotentes Element. Weiter sei $\mathfrak{p}$ eine Polarisierung von h, und n bezeichne die Anzahl der zu $\mathfrak{p}$ konjugierten Polarisierungen von x. Dann gilt*

$$\mathscr{F}(Gh) \doteqdot n \cdot \mathscr{F}(Gx).$$

Dies folgt aus dem Theorem mit der Bemerkung *d*).

Beispiele. (a) Sei G einfach vom Typ B_2, und seien S, $\tilde{S}$ die beiden subregulären Schichten wie in 6.6c). Ein subreguläres nilpotentes Element x hat nach Ozeki-Wakimoto ([19], Example 6.2, (2)) genau drei Polarisierungen $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$; dabei bestimmt $\mathfrak{p}_1$ (gemäß Satz 5.6) die Schicht S, und $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_3$ sind zu einander konjugiert und bestimmen die Schicht $\tilde{S}$. Das heißt: Im Korollar oben ist $n = 1$ für die eine subreguläre Schicht und $n = 2$ für die andere ($\tilde{S}$). – Insbesondere sehen wir wieder, daß die Multiplizitätengleichungen im Theorem 6.3 für die Schicht $\tilde{S}$ nicht gelten: denn aus $\mathscr{F}(Gh) \doteqdot 2\mathscr{F}(Gx)$ folgt $m_\omega(Gh) > m_\omega(Gx)$ für unendlich viele $\omega \in \Omega$.

(b) Für G einfach vom Typ G_2 und die beiden subregulären Schichten $\tilde{S}$ bzw. S (wie in 6.6 (c)) erhält man analog $n = 3$ bzw. $n = 1$ (n wie im Korollar). Auch bei den Typen B_l, C_l und F_4 gibt es je zwei subreguläre Schichten $\tilde{S}$ bzw. S, und man erhält $n = 2$ bzw. $n = 1$. Bei den Typen A_l, D_l, E_l gibt es nur eine subreguläre Schicht S, und für diese ist $n = 1$.

7.4. LEMMA. *Mit P und x wie im Theorem* 7.2 *gilt*

$$[G_x : P_x]\mathscr{F}(Gx) \doteqdot \mathscr{F}(G/P_x).$$

Beweis. Auf der Varietät G/G_x^0 operieren die endlichen Gruppen $E := G_x/G_x^0$ und $F := P_x/G_x^0$ durch Rechtstranslationen, und diese Operation kommutiert mit der von G durch Linkstranslationen. Wir können $\mathscr{R}(Gx) = \mathscr{R}(G/G_x)$ mit $\mathscr{R}(G/G_x^0)^E$ und $\mathscr{R}(G/P_x)$ mit $\mathscr{R}(G/G_x^0)^F$ identifizieren. Nach dem Lemma 2.7 in [1] wird dann

$$(\# E)\mathscr{F}(Gx) \doteqdot \mathscr{F}(G/G_x^0) \doteqdot (\# F)\mathscr{F}(G/P_x).$$

Wegen $\# E/\# F=[E:F]=[G_x:P_x]$ ergibt das die Behauptung.

7.5. *Eine äquivalente Formulierung des Theorems* 7.2.

Der Beweis des Theorems beruht auf einer genaueren Analyse des G-äquivarianten Morphismus

$$\mu: G\times\mathfrak{r}\to G\mathfrak{r}=\bar{S}, \qquad (g, y)\mapsto gy,$$

von $G\times\mathfrak{r}$ auf den Abschluß der Schicht S. Weil er surjektiv ist, liefert er uns eine Einbettung der Funktionenringe

$$\mu^*:\mathcal{R}(G\mathfrak{r})\hookrightarrow\mathcal{R}(G\times\mathfrak{r})=\mathcal{R}(G)\otimes\mathcal{R}(\mathfrak{r}).$$

Lassen wir auf $G\times\mathfrak{r}$ zusätzlich noch P durch

$$(*)\qquad p(g, y)=(gp^{-1}, py)\qquad (\text{für}\quad g\in G, p\in P, y\in\mathfrak{r})$$

operieren, so ist μ konstant auf den P-Bahnen, und wir erhalten daher eine Einbettung von $\mathcal{R}(G\mathfrak{r})$ in den entsprechenden P-Invariantenring $\mathcal{R}(G\times\mathfrak{r})^P$. Aus dem Lemma 7.9(b) unten entnehmen wir nun die folgende Tatsache:

Aussage 1. *Die Algebra* $B:=\mathcal{R}(G\times\mathfrak{r})^P$ *ist als Modul über* $A:=\mathcal{R}(G\mathfrak{r})$ *endlich erzeugt.*

Folglich ist das maximale Spektrum Z von B eine affine Varietät mit G-Operation, und die Inklusion $A\hookrightarrow B$ liefert eine G-äquivariante endliche "(verzweigte) Überlagerung"

$$\lambda: Z\to G\mathfrak{r}=\bar{S}.$$

Wegen der Endlichkeit des Morphismus λ ist das Urbild von $S=G\mathfrak{r}^{\mathrm{reg}}$ offenbar gleich Z^{reg}. Beim Übergang von einem Element x der Schicht S zu einem seiner Urbilder in Z verkleinert sich i.a. der Stabilisator, und zwar gilt:

Aussage 2. *Für alle* $x\in\mathfrak{r}^{\mathrm{reg}}$ *und* $z\in\lambda^{-1}(x)$ *ist* $G_z=P_x$.

Diese Behauptung folgt nach dem Lemma 7.10 unten aus 5.5(d) und (f). Aus dem Lemma 7.4 und der Aussage 2 ersieht man nun, daß unser Theorem 7.2 zu der folgenden Aussage äquivalent ist:

Aussage 3. *Für alle* z_1, $z_2\in Z^{\mathrm{reg}}$ *gilt* $\mathcal{F}(Gz_1)\doteq\mathcal{F}(Gz_2)$

Schließlich bemerken wir, daß $\mathcal{F}(Gz) \doteq \mathcal{F}(\overline{Gz})$ für alle $z \in Z^{\text{reg}}$ gilt. (Dies folgt mit demselben Argument wie 7.1 (*); denn wegen der Endlichkeit von λ ist die Kodimension von $\overline{Gz} \setminus Gz$ in $\overline{Gz}$ mindestens 2.) Also ist die Aussage 3 auch äquivalent zu:

Aussage 4. *Für alle* $z_1, z_2 \in Z^{\text{reg}}$ *gilt* $\mathcal{F}(\overline{Gz_1}) \doteq \mathcal{F}(\overline{Gz_2})$.

7.6. *Beweis des Theorems* 7.2 (Reduktion auf die Lemmata 7.8 bis 7.10).

Sei $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{r}$ das Ideal der $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$-nilpotenten Elemente in $\mathfrak{r}$, wie in 5.4. Ohne Einschränkung können wir im Theorem $x \in \mathfrak{n}$ annehmen und uns deshalb auf die Betrachtung des (i.a. kleineren) Ideals $\mathfrak{r}' := ky + \mathfrak{n}$ an Stelle von $\mathfrak{r}$ beschränken ($x, y \in \mathfrak{r}'^{\text{reg}}$, ohne Einschränkung $y \notin \mathfrak{n}$). Wir definieren nun μ', A', B' und $\lambda' : Z' \to G\mathfrak{r}'$ analog zu μ, A, B, $\lambda : Z \to G\mathfrak{r}$ in 7.5. Alle Überlegungen in 7.5 gelten ebenso für diese modifizierte Situation. So sieht man, daß es für den Beweis des Theorems genügt, folgendes zu beweisen:

Aussage 4'. *Für alle* $z_1, z_2 \in Z'^{\text{reg}}$ *gilt* $\mathcal{F}(\overline{Gz_1}) \doteq \mathcal{F}(\overline{Gz_2})$

Wir beweisen nun sogar viel mehr als dies, nämlich:

(1) *Behauptung: Für alle* $z_1, z_2 \in Z'^{\text{reg}}$ *und alle* $\omega \in \Omega$ *ist* $m_\omega(\overline{Gz_1}) = m_\omega(\overline{Gz_2})$.

Zum Beweis dieser Behauptung bemerken wir zunächst, daß $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{r}'$ P-stabil sind und daß P auf $\mathfrak{r}'/\mathfrak{n}$ trivial operiert und in jeder Nebenklasse von $\mathfrak{r}'/\mathfrak{n}$ einen dichten Orbit hat (5.5, Bemerkung). Wir identifizieren $\mathfrak{r}'/\mathfrak{n}$ mit dem Grundkörper k mittels $ty + \mathfrak{n} \mapsto t$. Die Projektion $G \times \mathfrak{r}' \to \mathfrak{r}' \to \mathfrak{r}'/\mathfrak{n} = k$ wird damit zu einer Funktion f aus $C' := \mathcal{R}(G \times \mathfrak{r}')$; für $g \in G$, $t \in k$, $n \in \mathfrak{n}$ ist $f(g, ty + n) = t$. In der Algebra C' ist folglich das Ideal $(f - t)C'$ für jedes $t \in k$ ein Primideal, und die Restklassenalgebra $C'/(f-t)C'$ ist gleich dem Koordinatenring $\mathcal{R}(f^{-1}(t))$ der Faser $f^{-1}(t) = G \times (ty + \mathfrak{n})$. Nun ist Z' das maximale Spektrum von $B' = C'^P$. Da die Funktion f invariant unter den Aktionen von P und G (vgl. 7.5 (*)) ist, gilt $(f-t)B' = ((f-t)C')^P = (f-t)C' \cap B'$; also ist $(f-t)B'$ ein Primideal von B'. Das Nullstellengebilde dieses Primideals in Z' ist gleich dem Bild von $f^{-1}(t) = G \times (ty + \mathfrak{n})$ unter dem kanonischen Morphismus $G \times \mathfrak{r}' \to Z'$.

Seien nun $z_1, z_2 \in Z'^{\text{reg}}$ wie in der Behauptung vorgegeben; ohne Einschränkung nehmen wir an, daß sie zum Bild von $\{1\} \times \mathfrak{r}'$ unter der kanonischen Abbildung $G \times \mathfrak{r}' \to Z'$ gehören. Dann ist $y_i := \lambda'(z_i) = t_i y + n_i \in \mathfrak{r}'^{\text{reg}}$ mit $t_i \in k$, $n_i \in \mathfrak{n}$, und $(1, y_i)$ ist ein Urbild von z_i in $G \times \mathfrak{r}' (i = 1, 2)$. Nach 5.5 erzeugt $(1, y_i)$ einen dichten $G \times P$-Orbit in $G \times (y_i + \mathfrak{n})$. Also erzeugt z_i einen dichten G-Orbit im Bild von $G\times(y_i+\mathfrak{n})$ in Z'. Die Vorüberlegungen zeigen daher: Der Koordinatenring von $\overline{Gz_i}$ ist gleich $B'/(f-t_i)B'$,

$$\mathcal{R}(\overline{Gz_i})=\mathcal{R}(\text{Bild } G\times(t_iy+\mathfrak{n}))=B'/(f-t_i)B' \qquad (i=1,2). \tag{2}$$

Die Graduierung von $\mathcal{R}(\mathfrak{r}')$ induziert eine Graduierung auf $\mathcal{R}(G)\otimes\mathcal{R}(\mathfrak{r}')\supset B'$. Für diese ist f homogen vom Grade 1. Deshalb ist das assoziierte graduierte Ideal zu $(f-t)B'$ gleich fB', und es folgt

$$m_\omega(B'/(f-t)B')=m_\omega(B'/fB') \tag{3}$$

für alle $t\in k$, $\omega\in\Omega$. Aus (2) und (3) folgt nun die Behauptung (1), und diese impliziert, wie wir gesehen haben, das Theorem.

7.7. Wir möchten anmerken, dass der Beweis oben Einsichten liefert, die weit über das im Theorem 7.2 formulierte Resultat hinausgehen. Als ein Beispiel geben wir hier die folgende Anwendung der Betrachtungen von 7.6. (Eine weitere Anwendung folgt im Anhang.)

ZUSATZ. (Notationen 7.2): *Für ein nilpotentes $x\in\mathfrak{r}^{\mathrm{reg}}$ gelte*

(1) $G_x=P_x$ *und* (2) $\overline{Gx}$ *ist normal.*

Dann gilt für alle $y\in S$, $\omega\in\Omega$

(a) $m_\omega(Gx)=m_\omega(Gy)$ *und* (b) $m_\omega(Gy)=m_\omega(\overline{Gy})$.

Beweis. Es genügt, die in 7.6 beschriebene Situation zu betrachten (wir übernehmen die dortigen Bezeichnungen). Sei $z_0\in\lambda'^{-1}(x)$ ein Urbild von x in Z'. Wir betrachten die folgenden Aussagen:

(2′) $\overline{Gz_0}$ *ist normal;*

(2″) $\overline{Gz}$ *ist normal für alle $z\in Z'^{\mathrm{reg}}$.*

Wir zeigen: Unter der Voraussetzung (1) gilt (2)$\Rightarrow$(2′)$\Rightarrow$(2″)$\Rightarrow$(a). Weil (b) eine Folge von (2) und (a) ist ($m_\omega(\overline{Gx})\leq m_\omega(\overline{Gy})\leq m_\omega(Gy)=m_\omega(Gx)=m_\omega(\overline{Gx})$ nach 3.2 und 3.7), wird der Zusatz damit bewiesen sein.

(2)$\Rightarrow$(2′). Die Einschränkung von $\lambda':Z'\to G\mathfrak{r}'$ auf den Orbit Gz_0 ist eine endliche Überlagerung $Gz_0\to Gx$ vom Grad $[G_x:P_x]$ (vgl. 7.5, Aussage 2), und daher nach (1) sogar ein Isomorphismus. Die Einschränkung von λ' auf $\overline{Gz_0}$ muss deshalb wegen (2) ebenfalls ein Isomorphismus sein. Also ist $\overline{Gz_0}$ normal.

(2')$\Rightarrow$(2''). Sei $z \in Z'^{\mathrm{reg}}$ gegeben, ohne Einschränkung z ein Urbild von $y \in \mathfrak{r}'^{\mathrm{reg}}$. Nach den Überlegungen in 7.6 ist der Koordinatenring $\mathcal{R}(\overline{Gz_0})$ gleich dem assoziierten graduierten Ring des Koordinatenringes $\mathcal{R}(\overline{Gz})$. Hieraus folgt nun, dass mit $\mathcal{R}(\overline{Gz_0})$ auch $\mathcal{R}(\overline{Gz})$ normal ist. (Der Quotientenkörper K von $\mathcal{R} := \mathcal{R}(\overline{Gz})$ besitzt eine $\mathbf{Z}$-Filtrierung, welche auf R die gegebene Filtrierung induziert; für diese ist der assoziierte graduierte Ring gr K in kanonischer Weise in den Quotientenkörper von $R_0 := \mathcal{R}(\overline{Gz_0})$ eingebettet. Der ganze Abschluss $\tilde{R}$ von R in K ist ein endlich erzeugter R-Modul; es gibt daher ein $f \in R$ mit $f \cdot \tilde{R} \supseteq R$. Hieraus folgt $gr\ R \supseteq gr(f \cdot \tilde{R}) = gr\ f \cdot gr\ \tilde{R}$, letzteres wegen der Nullteilerfreiheit von $gr\ K$. Es ist daher $gr\ \tilde{R}$ ein endlich erzeugter $gr\ R$-Modul, also ganz über $gr\, R = R_0$. Wir erhalten daraus $gr\, \tilde{R} = R_0 = gr\, R$ und folglich $\tilde{R} = R$.)

7.8. *$G \times^P \mathfrak{r}$ als G-Menge.*

Wir haben jetzt noch einige technische Lemmata zu beweisen, welche wir im Laufe des Beweises von Theorem 7.2 benutzt haben. Dabei soll gleichzeitig der geometrische Hintergrund dieses Beweises etwas erhellt werden.

Für jede Untergruppe P von G und jede P-Menge (Menge mit P-Operation) X definieren wir eine "induzierte G-Menge" $G \times^P X$ wie folgt: Wir lassen $G \times P$ auf $G \times X$ durch

$$(h, p) \cdot (g, x) := (hgp^{-1}, px) \quad \text{für} \quad g, h \in G, p \in P, x \in X,$$

operieren, bezeichnen mit

$$\mathbf{(g, x)} := \{(gp^{-1}, px) \mid p \in P\}$$

die von (g, x) erzeugte P-Bahn und definieren $G \times^P X$ als die Menge aller dieser Bahnen $\mathbf{(g, x)}$ Sei nun $\mathfrak{r}$ eine P-stabile Teilmenge einer G-Menge* $\mathfrak{g}$. Dann wird durch $\mathbf{(g, x)} \mapsto gx$ eine Abbildung $\Phi: G \times^P \mathfrak{r} \to G\mathfrak{r}$ wohldefiniert. Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} G \times \mathfrak{r} \arrow[d] \arrow[dr] & \\ G \times^P \mathfrak{r} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\iota"'] & G\mathfrak{r} \\ G/P \times G\mathfrak{r} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (g, x) \arrow[d, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \\ \mathbf{(g, x)} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & gx \\ (gP, gx) \arrow[ur, mapsto] & \end{tikzcd}$$

---

* Obwohl wir hier der Klarheit halber eine abstrakte Situation betrachten, wählen wir die Notationen schon so wie bei der Anwendung auf die Situation im Theorem 7.2.

Im folgenden Lemma stellen wir einige Eigenschaften der G-Menge $G\times^P\mathfrak{r}$ zusammen; die Beweise sind einfach.

LEMMA. (a) *Für alle* $x\in\mathfrak{r}$, $z\in\Phi^{-1}(x)$ *ist* G_z *gleich* P_x.

(b) *Für alle* $x\in\mathfrak{r}$ *ist der G-Orbit* $G(1,x)$ *gleich* $G\times^P Px$.

(c) *Die P*-Orbiten in $\mathfrak{r}$ *entsprechen bijektiv den G-Orbiten in* $G\times^P\mathfrak{r}$, *vermöge* $Px\mapsto G\times^P Px$.

(d) *Bei dieser Bijektion entsprechen die G-Orbiten in* $\Phi^{-1}(Gx)$ *gerade den P-Orbiten in* $Gx\cap\mathfrak{r}$.

(e) *Im Diagramm oben ist* $(g,x)\mapsto(gP,gx)$ *eine injektive G-äquivariante Abbildung* ι *von* $G\times^P\mathfrak{r}$ *in* $G/P\times\mathfrak{g}$. (Dabei betrachten wir die durch $h(gP,x)=(hgP,hx)$ gegebene G-Operation auf $G/P\times\mathfrak{g}$.)

Beweisen wir etwa (a): Mit passendem $g\in G$, $y\in\mathfrak{r}$ ist $z=(g,y)$, also $x=gy$. Welche $h\in G$ stabilisiern z? Offenbar gilt $h(g,y)=(hg,y)=(g,y)$ genau dann, wenn es $p\in P$ mit $(hg,y)=(gp^{-1},py)$ gibt, das heißt, wenn es $p\in P_y$ mit $hg=gp^{-1}$ gibt. Die letzte Bedingung bedeutet aber $h\in gP_yg^{-1}$. Wegen $gP_yg^{-1}=P_x$ beweist dies $G_z=P_x$.

7.9. $G\times^P\mathfrak{r}$ *als G-Varietät.*

(a) In der Situation von 7.8 sei nun $\mathfrak{g}$ eine G-Varietät (algebraische Varietät mit G-Operation), P eine *abgeschlossene* Untergruppe von G und $\mathfrak{r}$ eine lokal abgeschlossene P-stabile Teilmenge von $\mathfrak{g}$. Dann ist auch $G/P\times\mathfrak{g}$ eine G-Varietät, und die Einbettung ι (7.8(e)) identifiziert $G\times^P\mathfrak{r}$ mit einer lokal-abgeschlossenen G-stabilen Teilmenge von $G/P\times\mathfrak{g}$. Ist $\mathfrak{r}$ sogar abgeschlossen, so auch $\iota(G\times^P\mathfrak{r})$. (Zum Beweis benutzt man, daß der Morphismus $G\times\mathfrak{g}\to G/P\times\mathfrak{g}$ offen ist und daß deshalb Teilmengen von $G/P\times\mathfrak{g}$ lokal abgeschlossen sind, sobald ihr Urbild in $G\times\mathfrak{g}$ es ist.) Auf diese Weise können und wollen wir $G\times^P\mathfrak{r}$ von nun an als eine G-Varietät auffassen. Die globalen regulären Funktionen auf dieser (i.a. nicht affinen!) Varietät kann man andererseits auch mit P-invarianten Funktionen auf $G\times\mathfrak{r}$ identifizieren (vermöge der Surjektion $G\times\mathfrak{r}\to G\times^P\mathfrak{r}$), und man überlegt sich leicht, daß dann sogar

$$\mathcal{R}(G\times^P\mathfrak{r})=\mathcal{R}(G\times\mathfrak{r})^P$$

wird. (Allgemeiner gilt $\mathcal{R}(Y)=\mathcal{R}(X)^P$ für jede lokal abgeschlossene Teilmenge Y von $G/P\times\mathfrak{g}$ und ihr Urbild X in $G\times\mathfrak{g}$.)

(b) Sei nun P eine *parabolische* Untergruppe. Dann ist G/P eine *vollständige* Varietät und die Projektion $\mathrm{pr}_2\colon G/P\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ also ein *eigentlicher* Morphismus (insbesondere abgeschlossen). Ist außerdem $\mathfrak{r}$ abgeschlossen in $\mathfrak{g}$, also $\iota(G\times^P\mathfrak{r})$ abgeschlossen in $G/P\times\mathfrak{g}$ (siehe (a)), so folgt, daß $\mathrm{pr}_2(\iota(G\times^P\mathfrak{r}))=\Phi(G\times^P\mathfrak{r})=G\mathfrak{r}$

abgeschlossen in $\mathfrak{g}$ ist. (Diese Tatsache haben wir übrigens in §5 wiederholt benutzt.) Weiter sieht man so, dass *der Morphismus* $\Phi: G\times^P\mathfrak{r}\to G\mathfrak{r}$ *eigentlich* ist. Hieraus folgt bekanntlich ([5], III, §3, Théorème 3.2.1):

LEMMA. *Unter den angegebenen Voraussetzungen ist* $\mathscr{R}(G\times^P\mathfrak{r})(=\mathscr{R}(G\times\mathfrak{r})^P$ *nach* (a)) *als* $\mathscr{R}(G\mathfrak{r})$*-Modul endlich erzeugt.*

7.10. *Die Stein-Faktorisierung von* $G\times^P\mathfrak{r}\to G\mathfrak{r}$.

Wir betrachten eine parabolische Untergruppe $P\subset G$ und eine P-stabile abgeschlossene Teilmenge $\mathfrak{r}$ der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G. Der kanonische Morphismus $\Phi: G\times^P\mathfrak{r}\to G\mathfrak{r}$ ist dann eigentlich (7.9b)). Bezeichnen wir mit Z das maximale Spektrum des Funktionenringes $\mathscr{R}(G\times^P\mathfrak{r})=\mathscr{R}(G\times\mathfrak{r})^P$ (7.9(a)), so gibt es eine (offensichtlich eindeutig bestimmte) Zerlegung

$$G\times^P\mathfrak{r}\xrightarrow{\sigma}Z\xrightarrow{\lambda}G\mathfrak{r}$$

von Φ in surjektive G-äquivariante Morphismen σ und λ. (Dies ist die sogenannte "Stein-Faktorisierung" des eigentlichen Morphismus Φ, vgl. [5], III, 4, Théorème 4.3.1.)

LEMMA. *Sei* $x\in\mathfrak{r}$ *gegeben. Folgende drei Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\Phi^{-1}(x)$ *ist endlich.*
(ii) σ *bildet* $\Phi^{-1}(Gx)$ *bijektiv auf* $\lambda^{-1}(Gx)$ *ab.*
(iii) $G_x^0\subseteq P$ *und* $Gx\cap\mathfrak{r}$ *ist Vereinigung endlich vieler P-Orbiten.*

Sind diese Aussagen für x erfüllt, so gilt $G_z=P_x$ *für alle* $z\in\lambda^{-1}(x)$.

Beweis. (i)$\Rightarrow$(ii) Nach Grothendieck (loc. cit.) sind die Fasern von σ *zusammenhängend.* Mit $\Phi^{-1}(x)$ sind nun auch die darin enthaltenen Fasern von σ *endlich.* Also sind diese Fasern einelementig; das heißt, σ bildet $\Phi^{-1}(x)$ injektiv ab. Wegen der G-Äquivarianz gilt dasselbe für $\Phi^{-1}(Gx)$. So folgt (ii) aus (i). Umgekehrt folgt (i) aus (ii), weil λ endlich ist (7.9(b)). Die Äquivalenz von (i) und (iii) folgt unmittelbar aus dem Lemma 7.8. (Nach 7.8(a) und (d) ist $\#\Phi^{-1}(x)=m\cdot[G_x:P_x]$, $m:=\#((\mathfrak{r}\cap G_x)/P)$.) Die letzte Behauptung folgt aus (ii) mit Lemma 7.8a).

Anhang. Beweis einer Multiplizitäten-Gleichung ohne Normalitäts-Voraussetzung

In diesem Anhang beweisen wir mit cohomologischen Methoden, dass innerhalb jeder Schicht von $\mathfrak{sl}_n$ die Multiplizitäten der Orbiten konstant sind. Wir zeigen sogar allgemeiner:

A1. THEOREM. *Sei S eine Dixmier-Schicht der halbeinfachen Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$. *Sei $P \subset G$ eine parabolische Untergruppe mit Lie-Algebra* $\mathfrak{p}$, *so dass $S = G\mathfrak{r}^{\mathrm{reg}}$ gilt mit dem auflösbaren Radikal* $\mathfrak{r}$ *von* $\mathfrak{p}$ (Satz 5.6). *Für ein nilpotentes Element $x \in \mathfrak{r}^{\mathrm{reg}}$ sei $G_x = P_x$. Dann gilt*

$$m_\omega(Gy) = m_\omega(Gx) \quad \textit{fur alle} \quad y \in S,\ \omega \in \Omega.$$

Beweis. Es genügt wiederum, die Situation von 7.6 zu betrachten; wir übernehmen die dortigen Bezeichnungen. Sei z_0 ein Urbild von x in Z'. Für den Beweis des Theorems genügt es zu zeigen, dass $\overline{Gz_0}$ normal ist; denn wie wir schon in 7.7 ((2′)$\Rightarrow$(a)) gesehen haben, folgt daraus die Behauptung.

Mit den Überlegungen und Bezeichnungen von 7.6 erhalten wir für den Koordinatenring von $\overline{Gz_0}$ die Beschreibung (vgl. 7.6(2)):

$$\mathcal{R}(\overline{Gz_0}) = B'/fB' \subseteq \mathcal{R}(G \times \mathfrak{n})^P.$$

Da $\mathcal{R}(G \times \mathfrak{n})^P$ normal ist, genügt es zu zeigen, dass hier Gleichheit gilt. Es läuft deshalb alles darauf hinaus nachzuweisen, *dass der kanonische* (durch Einschränkung gegebene) *Homomorphismus ρ von $B' = \mathcal{R}(Z') = \mathcal{R}(G \times \mathfrak{r}')^P$ nach $\mathcal{R}(G \times \mathfrak{n})^P$ surjektiv ist.*

Nach 7.9(a) können wir B' auch als den Ring der globalen regulären Funktionen auf $Y := G \times^P \mathfrak{r}'$ auffassen und $\mathcal{R}(G \times \mathfrak{n})^P$ als den Ring der globalen regulären Funktionen auf der abgeschlossenen Untervarietät $N := G \times^P \mathfrak{n}$ von Y. Dann ist ρ der kanonische (Einschränkungs) Homomorphismus von $B' = \mathcal{R}(Y)$ nach $\mathcal{R}(N)$. Weiter ist N das Nullstellengebilde von f in Y. Bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_Y$ bzw. $\mathcal{O}_N$ die Strukturgarben der Varietäten Y bzw. N, so erhalten wir sogar die folgende exakte Sequenz von Garben ($f\cdot$ bezeichnet die Multiplikation mit f)

$$0 \to \mathcal{O}_Y \xrightarrow{f\cdot} \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_N \to 0;$$

denn es gilt $\sqrt{f\mathcal{O}_Y} = f\mathcal{O}_Y$, da f, aufgefasst als Morphismus $Y \to k$, glatt ist. Diese liefert die exakte Cohomologie-Sequenz

$$(*) \quad 0 \to H^0(Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{f\cdot} H^0(Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\rho} H^0(N, \mathcal{O}_N)$$
$$\to H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{f\cdot} H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \to H^1(N, \mathcal{O}_N) \to \cdots$$

Darin ist $H^0(Y, \mathcal{O}_Y) = \mathcal{R}(Y) = B'$ und $H^0(N, \mathcal{O}_N) = \mathcal{R}(N)$, und der dritte Pfeil ist unser Homomorphismus ρ, dessen Subjektivität zu beweisen ist. Aus der Exaktheit von $(*)$ folgt, dass der Cokern von ρ im Kern von $f\cdot$, also erst recht in dem

"f-Torsionsuntermodul"

$$M := \{c \in H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \mid f^n c = 0 \text{ für ein } n \in \mathbf{N}\}$$

enthalten ist. Wir brauchen also nur $M = 0$ zu zeigen. Dazu bemerken wir zunächst, dass die Cohomologie-Moduln $H^i(Y, \mathcal{O}_Y)$ endlich erzeugte B'-Moduln sind ([5], III, §3, Théorème 3.2.1; der Morphismus $Y \to Z$ auf das maximale Spektrum von B' ist eigentlich, vgl. 7.9(b)). Deshalb ist auch M endlich erzeugt. Nach dem Lemma A2 unten gilt nun $H^1(N, \mathcal{O}_N) = 0$. Aus $(*)$ folgt daher $f \cdot H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = H^1(Y, \mathcal{O}_Y)$, also auch $f \cdot M = M$. Deshalb muss $M = 0$ sein, und das Theorem ist bewiesen.

A2. Auf die folgenden Überlegungen hat uns R. Elkik hingewiesen. Bekanntlich ist N ein Vektorbündel über $X := G/P$ mit typischer Faser $\mathfrak{n}$. Die Killingform auf $\mathfrak{g}$ induziert einen kanonischen Isomorphismus von $\mathfrak{n}^*$ mit $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, dem Tangentialraum von X in P. Hieraus folgt unmittelbar, dass N das *Contangentialbündel* über X ist.

LEMMA. *Es gilt* $H^i(N, \mathcal{O}_N) = 0$ *für* $i > 0$.

Beweis. Sei Ω_N die Garbe der Differentiale über N. Dann ist die maximale äussere Potenz $\Lambda^{\max}\Omega_N$ gleich der Strukturgarbe $\mathcal{O}_N$: Der glatte Morphismus $\varphi : N \to X$ induziert die exakte Sequenz

$$0 \to \varphi^*\Omega_X \to \Omega_N \to \Omega_{N/X} \to 0,$$

welche lokal spaltet ([5], IV, §17, Proposition 17.2.3 (ii)). Man erhält daraus einen kanonischen Isomorphimus

$$\Lambda^{\max}\Omega_N \cong \Lambda^{\max}\Omega_X \otimes \Lambda^{\max}\Omega_{N/X}.$$

Da N das Cotangentialbündel über X ist, folgert man leicht, dass die lokal freien Garben $\varphi^*\Omega_X$ und $\Omega_{N/X}$ zueinander dual sind, woraus $\Lambda^{\max}\Omega_N \cong \mathcal{O}_N$ folgt. Sei nun T das maximale Spektrum von $\mathcal{R}(N)$ und $\mu : N \to T$ der kanonische Morphismus. Dieser ist eigentlich und birational (vgl. 7.10). Da N glatt ist. ergibt sich aus einem Satz von Grauert-Riemenschneider ([23], Satz 2.3; dieser ist anwendbar, vgl. hierzu den Anfang des Beweises von Proposition 2.2 in [25]; siehe auch [24] S. 50),dass die höheren direkten Bilder $R^i\mu_*\Lambda^{\max}\Omega_N = 0$ sind für $i > 0$. Nach dem Vorangehenden ist $\Lambda^{\max}\Omega_N = \mathcal{O}_N$, und es folgt $H^i(N, \mathcal{O}_N) = 0$, da T affin ist.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Borho W., *Definition einer Dixmier-Abbildung für* $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$; Inv. math. *40*, 143–169 (1977).

[2] Borho W. und Jantzen J. C., *Über primitive Ideale in Einhüllenden halbeinfacher Lie-Algebren*; Inv. math. *39*, 1–53 (1977).

[3] Borho W. und Kraft H. *Über die Gelfand-Kirillov Dimension*; Math. Ann. *220*, 1–24 (1976).

[4] Demazure M. und Gabriel P., *Groupes algébriques*; North-Holland, Amsterdam 1970.

[5] Dieudonné J. und Grothendieck A., *Eléments de géométrie algébrique III, IV*; Publ. Math. IHES n^0 *11, 17, 20, 24, 28, 32.*

[6] Dixmier J., *Polarisations dans les algébres de Lie semi-simples complexes*; Bull. Sci. Math. *99*, 45–63 (1975).

[7] Hesselink W., *The normality of closures of orbits in a Lie algebra*; Comment. Math. Helv. *54*, (1979).

[8] Humphreys J. E., *Linear algebraic groups*; Springer GT, New York-Heidelberg-Berlin 1976.

[9] Johnston D. S. und Richardson R. W., *Conjugacy classes in parabolic subgroups of semisimple algebraic groups II*; preprint Durham 1976.

[10] Kostant B., *Lie group representations on polynomial rings*; Amer. J. Math. *85*, 327-404 (1963).

[11] Kraft H., *Parametrisierung der Konjugationsklassen in* $\mathfrak{sl}_n$; Math. Ann. *234*, 209–220 (1978).

[12] Mumford D., *Geometric Invarient Theory*; Ergebnisse der Math. *34*, Springer, Berlin 1965.

[13] Richardson R. W., *Principal Orbit Types for Algebraic Transformation Spaces in Characteristic Zero*; Inv. math. *16*, 6–14 (1972),

[14] Springer T. A. und Steinberg R., *Conjugacy Classes*; *in "Seminar on algebraic groups and related finite groups"*, Springer LN *131*, (1970).

[15] Steinberg R., *Conjugacy Classes in Algebraic Groups*; Springer LN *366* (1974).

[16] Vinberg E. B. und Popov V. L., *On a class of quasihomogeneus affine varieties*; Math. USSR Izvestija, *6* (1972), n^0 4.

[17] Borho W., *Recent advances in enveloping algebras of semisimple Lie algebras; Sém. Bourbaki* n^0 *489* (1976).

[18] Esnault H., *Singularités rationelles et groupes algébriques*; Thèse de troisième cycle, Paris VII (1976).

[19] Ozeki H. und Wakimoto M., *On polarisations of certain homogeneous spaces*; Hiroshima Math. J. *2*, 445–482 (1972).

[20] Matsushima Y., *Espaces homogènes de Stein des groupes de Lie complexes*; Nagoya Math. J. *16*, 205–218 (1960).

[21] Bialynicki-Birula A., *On homogeneous affine spaces of linear algebraic groups*; Amer. J. Math. *85*, 577–582 (1963).

[22] Richardson R. W., *Deformations of Lie Subgroups and the Variation of Isotropy Subgroups*; Acta math. *129*, 35–73 (1972).

[23] Grauert H., und Riemenschneider O., *Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen*; Inv. math. *11* 263–292 (1970).

[24] Kempf G., Knudson F., Mumford D. und Saint-Donat B., *Toroidal Embeddings I*; Springer LN *339* (1973).

[25] Hartshorne R. und Ogus A., On the factoriality of local rings of small embedding codimension; Communications in A. *1* 415-437 (1974).

[26] Luna D., *Slices étales*; Bull. Soc. math. France, Mémoire *33*, 81–105 (1973).

[27] Luna D., Adhérences d'orbite et invariants; Inv. math. *29*, 231–238 (1975).

[28] Slodowy P., Einfache Singularitäten und einfache algebraische Gruppen; Regensburger Mathematische Schriften *2*, (1978).

Nachtrag bei der Korrektur. Von C. Procesi und dem zweiten Autor wurde inzwischen bewiesen, dass die Abschlüsse aller Konjugationsklassen in $\mathfrak{sl}_n$ normale Varietäten sind. Damit ist also auch die Multiplizitäten-Vermutung von Dixmier (1.7) bewiesen.

Sonderforschungsbereich
Theoretische Mathematik
Universität Bonn
Wegelerstr. 10
D-53 Bonn

Eingegangen den 1. November 1977