Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 53 (1978)

Artikel: Ein Verzerrungssatz für schlichte Funktionen.
Autor: Blatter, Christian
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40794

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici **53** (1978) 651–659 Birkhäuser Verlag, Basel

Ein Verzerrungssatz für schlichte Funktionen

VON CHRISTIAN BLATTER

1. Das Folgende ist ein Beitrag zur Theorie der schlichten analytischen Funktionen $f: D \to \mathbf{C}$, $D := \{z \mid |z| < 1\}$. Die Menge dieser Funktionen bezeichnen wir mit $\tilde{S}$, die Menge der normierten ($f(0) = 0$, $f'(0) = 1$) derartigen Funktionen wie üblich mit S. Die Funktionen $f \in S$ genügen dem sogenannten *Koebeschen Verzerrungssatz*:

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \quad \forall z \in D, \tag{1}$$

siehe z.B. [4], S. 21. Diese Ungleichungen sind natürlich für Schlichtheit nicht hinreichend, anderseits aber scharf: Für die *Koebe-Abbildung*

$$k(z) := \frac{z}{(1-z)^2} \tag{2}$$

und $z \leq 0$ ($z \geq 0$) gilt in (1) links (rechts) das Gleichheitszeichen. Wir beweisen eine Ungleichung für Funktionen $f \in \tilde{S}$, die im Gegensatz zu (1) zwei freie Variable enthält. Sie liefert den Mindestabstand der Punke $f(z_0)$ und $f(z_1)$, wenn $f'(z_0)$ und $f'(z_1)$ gegeben sind, und stellt eine notwendige und hinreichende Bedingung für Schlichtheit dar.

SATZ. *Für beliebiges $f \in \tilde{S}$ und beliebige Punkte z_0, $z_1 \in D$ gilt*

$$|f(z_0) - f(z_1)|^2 \geq \frac{\sinh 2\rho}{8 \cosh 4\rho} \sum_{i=0,1} (1-|z_i|^2)^2 \, |f'(z_i)|^2, \tag{3}$$

dabei bezeichnet ρ den hyperbolischen abstand von z_0 und z_1. Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn f zur Abbildung (2) *konform äquivalent ist und z_0, z_1 auf der Symmetrieachse von f liegen.*

Vom geometrischen Gehalt einmal abgesehen ist für allfällige Anwendungen dieser Ungleichung auf Koeffizientenprobleme der folgende Umstand von Bedeutung (vgl. die Ergebnisse von FitzGerald [1]): Schreibt man (3) in der Form

$$\Psi(f, z_0, z_1) \geqslant 0,$$

so ist Ψ eine hermitisch-quadratische Funktion des Koeffizientenvektors von f und wegen

$$\operatorname{tgh} \rho = \left| \frac{z_0 - z_1}{1 - \bar{z}_0 z_1} \right|$$

eine reell-analytische Funktion der Variablen z_0, $z_1 \in D$.

2. Es sei $f \in \tilde{S}$, und es seien z_0, z_1 zwei beliebige Punkte in D. Die Verbindungsstrecke σ_{01} der Bildpunke $f(z_0)$ und $f(z_1)$ liegt entweder ganz in $f(D)$ oder nicht. Im ersten Fall (=: I) ist ihr Urbild ein analytischer Bogen γ_{01} in D von endlicher Länge $2L$, im zweiten Fall (=: II) enthält $f^{-1}(\sigma_{01})$ wenigstens zwei analytische Bögen γ_0 und γ_1, die von z_0 bzw. z_1 ausgehend bis zum Rand von D laufen und damit beide unendliche hyperbolische Länge besitzen. Es sei $\gamma: s \mapsto z(s)$ einer der erwähnten Bögen in D, bezogen auf die hyperbolische Bogenlänge, und

$$\sigma: \ s \mapsto w(s) := f(z(s)) \tag{4}$$

der Bildbogen in der w-Ebene. Wir schreiben

$$\dot{w}(s) =: \lambda(s) e^{i\Theta(s)}; \tag{5}$$

dabei ist $\Theta(s)$ bei den hier gemachten Annahmen konstant, und $\lambda(s) > 0$ stellt den lokalen Streckungsfaktor von der hyperbolischen Metrik im Punkt $z := z(s) \in D$ zur euklidischen Metrik im Punkt $f(z) \in \mathbf{C}$ dar. Für den Abstand der Punkte $f(z_0)$ und $f(z_1)$ erhalten wir damit im Fall I:

$$\Delta := |f(z_0) - f(z_1)| = \int_{-L}^{L} \lambda(s)\, ds$$

und im Fall II:

$$\Delta \geqslant \int_{\gamma_0} \lambda(s)\, ds + \int_{\gamma_1} \lambda(s)\, ds. \tag{6}$$

3. Ueber die Funktion λ bzw. $u := \log \lambda$ werden wir in den Abschnitten 6 und 7 folgendes beweisen:

$$|\dot{u}(s)| \leq 4 \quad \forall s, \tag{7}$$

$$\ddot{u}(s) \leq 2(16 - \dot{u}^2(s)) \quad \forall s. \tag{8}$$

Wir wenden uns zunächst dem Fall I zu und beginnen mit dem folgenden

LEMMA. *Die Funktion* $u : [-L, L] \to \mathbf{R}$ *genüge den Bedingungen* (7) *und* (8). *Dann gibt es eine Lösung* u_* *der Differentialgleichung*

$$\ddot{y} = 2(16 - \dot{y}^2), \tag{9}$$

die an den Stellen $\pm L$ *dieselben Werte annimmt wie* u, *und es gilt*

$$u(s) \geq u_*(s) \quad \forall s \in [-L, L]. \tag{10}$$

Beweis. Wegen (7) gilt jedenfalls

$$-8L \leq u(L) - u(-L) \leq 8L, \tag{11}$$

und die Grenzfälle treten nur auf, falls $\dot{u}(s) \equiv \pm 4$. Die Funktionen

$$y(s) := \tfrac{1}{2} \log (\cosh 8s + \tau \sinh 8s) + c, \quad \tau \in [-1, 1], c \in \mathbf{R}, \tag{12}$$

sind Lösungen der Differentialgleichung (9). Eine kurze Rechnung liefert

$$y(L) - y(-L) = \operatorname{artgh} (\tau \operatorname{tgh} 8L);$$

durch geeignete Wahl von $\tau \in [-1, 1]$ lässt sich daher der angeschribenen Differenz jeder Wert im Intervall $[-8L, 8L]$ erteilen. Wegen (11) folgt hieraus die Existenz einer Funktion u_*, die das angegebene Randwertproblem löst.

In den Grenzfällen $\dot{u}(s) \equiv \pm 4$ wird $\tau = \pm 1$ und $u_*(s) \equiv u(s)$. Die Ungleichung (10) ist dann trivialerweise erfüllt. Im allgemeinen Fall ist $|\tau| < 1$, und mit $\tau =: \operatorname{tgh} c'$, $c' \in \mathbf{R}$, erhält man aus (12):

$$\dot{u}_*(s) = 4 \operatorname{tgh} (8s + c'),$$

wir dürfen daher für den Rest des Beweises

$$|\dot{u}_*(s)|<4 \quad \forall s\in[-L, L]$$

annehmen. Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $s_0\in[-L, L]$ mit $\dot{u}(s_0)=\dot{u}_*(s_0)$. Wir zeigen zunächst:

$$\dot{u}(s)\leqslant\dot{u}_*(s) \quad \forall s\in[s_0, L]. \tag{13}$$

Widrigenfalls sei

$$s_1:=\inf\{s\geqslant s_0 \mid \dot{u}(s)>\dot{u}_*(s)\}.$$

Dann ist

$$\dot{u}(s_1)=\dot{u}_*(s_1)\in\,]-4, 4[. \tag{14}$$

Wegen (8) gilt in einer geeigneten Umgebung $U_\delta(s_1)$:

$$\frac{\ddot{u}(t)}{2(16-\dot{u}^2(t))}\leqslant 1=\frac{\ddot{u}_*(t)}{2(16-\dot{u}_*^2(t))}$$

und somit für $s\in[s_1, s_1+\delta[$:

$$\operatorname{artgh}\frac{\dot{u}}{4}\bigg|_{s_1}^{s}\leqslant\operatorname{artgh}\frac{\dot{u}_*}{4}\bigg|_{s_1}^{s}.$$

Wegen (14) folgt hieraus $\dot{u}(s)\leqslant\dot{u}_*(s)$ für alle s unmittelbar rechts von s_1, im Widerspruch zur Definition von s_1. Aus (13) folgt: $u-u_*$ ist im Intervall $[s_0, L]$ monoton fallend. Wegen $u(L)=u_*(L)$ ist daher $u(s)\geqslant u_*(s)$ für alle $s\in[s_0, L]$. —Analog schliesst man für das Teilintervall $[-L, s_0]$. q.e.d.

4. Nach dem beim Beweis des Lemmas Gesagten ist

$$\Delta=\int_{-L}^{L}\lambda(s)\,ds\geqslant\int_{-L}^{L}\lambda_*(s)\,ds \tag{15}$$

mit

$$\lambda_*(s)=C(\cosh 8s+\tau\sinh 8s)^{1/2},$$

wobei die Parameter C und τ so zu wählen sind, dass gilt:

$$\lambda_*(-L)=\lambda(-L)=:\lambda_0, \quad \lambda_*(L)=\lambda(L)=:\lambda_1.$$

Setzt man $\lambda_0^2+\lambda_1^2=:R^2$, so ergibt sich folgende Bedingung für C:

$$2C^2\cosh 8L=R^2.$$

Damit erhalten wir anstelle von (15):

$$\Delta \geqslant \frac{R}{\sqrt{2\cosh 8L}}\int_{-L}^{L}(\cosh 8s+\tau\sinh 8s)^{1/2}\,ds. \tag{16}$$

Wir bezeichnen das Integral rechter Hand mit $B(\tau)$. Wegen

$$B''(\tau)=-\tfrac{1}{4}\int_{-L}^{L}\frac{\sinh^2 8s}{(\cosh 8s+\tau\sinh 8s)^{3/2}}\,ds<0 \quad (-1\leqslant\tau\leqslant 1)$$

nimmt $B(\tau)$ auf $[-1, 1]$ das Minimum in den Punkten $\tau:=\pm 1$ an, und man erhält

$$B(\tau)\geqslant\int_{-L}^{L}(\cosh 8s+\sinh 8s)^{1/2}\,ds=\tfrac{1}{2}\sinh 4L \quad (-1\leqslant\tau\leqslant 1).$$

Wird dies in (16) eingesetzt, so folgt schliesslich

$$\Delta^2\geqslant\frac{\sinh^2 4L}{8\cosh 8L}R^2, \tag{17}$$

und zwar gilt das Gleichheitszeichen nur im Fall $\tau=\pm 1$, d.h. $\dot{u}(s)\equiv\pm 4$. Wir notieren noch:

$$\frac{\sinh^2 4L}{8\cosh 8L}\nearrow\frac{1}{16} \quad (L\to\infty).$$

Nun war ja $2L$ die hyperbolische Länge einer Kurve, die die beiden Punkte z_0 und z_1 verbindet. Bezeichnen wir den hyperbolischen Abstand dieser beiden Punkte mit ρ, so dürfen wir anstelle von (17) schreiben:

$$\Delta^2\geqslant\frac{\sinh^2 2\rho}{8\cosh 4\rho}(\lambda_0^2+\lambda_1^2). \tag{18}$$

Im Fall II (siehe (6)) trifft diese Formel (mit $>$) trivialerweise zu: Wegen $\dot{u}(s) \geqslant -4$ gilt längs γ_i $(i=0,1)$:

$$\lambda(s) \geqslant \lambda_i e^{-4s}.$$

Damit wird

$$\Delta \geqslant (\lambda_0 + \lambda_1) \int_0^\infty e^{-4s}\, ds$$

und somit

$$\Delta^2 > \frac{1}{16}(\lambda_0^2 + \lambda_1^2).$$

Wird (18) schliesslich auf f, z_0 und z_1 umgeschrieben (für λ siehe (23)), so resultiert gerade (3).

5. In (18) steht genau dann das Gleichheitszeichen, wenn erstens $\dot{u}(s) \equiv 4$ (oder $\equiv -4$) ist und wenn zweitens gilt: $2L = \rho$, das heisst: wenn γ_{01} eine hyperbolische Geodätische ist. Bis auf eine Aehnlichkeit der w-Ebene hat man dann $\lambda(s) = e^{4s}$,

$$\sigma_{01}\colon\ w(s) = \tfrac{1}{4}(e^{4s} - 1); \tag{19}$$

und bis auf einen konformen Automorphismus von D ist γ_{01} von der Form

$$\gamma_{01}\colon\ z(s) = \operatorname{tgh} s. \tag{20}$$

Wird die Variable s aus (19) und (20) eliminiert, so ergibt sich für ein gewisses reelles Interval $I \subset D$ die Beziehung

$$w = \frac{z}{(1-z)^2} \quad \forall z \in I.$$

Somit ist $f: z \mapsto w$ die Koebe-Abbildung (2).

6. Zum Beweis der Relationen (7) und (8) benutzen wir die bekannten Ungleichungen ([4], S. 20; [3])

$$|a_2| \leqslant 2, \quad |a_3 - a_2^2| \leqslant 1, \quad |a_3| \leqslant 3$$

für Funktionen

$$f(z) := z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \tag{21}$$

in S. Diese Ungleichungen werden differentialgeometrisch interpretiert und mit Hilfe der konformen Invarianz der hyperbolischen Metrik an beliebiger Stelle $\zeta \in D$ zur Anwendung gebracht.

Es sei also zunächst $f \in S$ gegeben durch (21), und es sei

$$\gamma\colon\ s \mapsto z(s),\ \ z(s_0) = 0,$$

ein analytischer Bogen durch 0, bezogen auf die hyperbolische Bogenlänge in D:

$$\dot{z}(s) = (1 - z(s)\bar{z}(s))e^{i\theta(s)}. \tag{22}$$

Der Bildbogen (4) in der w-Ebene braucht vorerst nicht geradlinig zu sein. Mit den in (4) und (5) eingeführten Bezeichnungen erhält man für $\dot{w}$:

$$\lambda e^{i\Theta} = f'(z)(1 - z\bar{z})e^{i\theta} \tag{23}$$

(wir unterdrücken die Variable s). Logarithmische Ableitung nach s liefert unter Verwendung von (22):

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + i\dot{\Theta} = \frac{f''(z)}{f'(z)}(1 - z\bar{z})e^{i\theta} - (\bar{z}e^{i\theta} + ze^{-i\theta}) + i\dot{\theta}.$$

Vermöge der Liouvilleschen Formel

$$\dot{\theta} = \kappa_g + i(\bar{z}e^{i\theta} - ze^{-i\theta})$$

(siehe z.B. [2], S. 37f.) bringen wir nun die geodätische Krümmung κ_g von γ (bezüglich der hyperbolischen Metrik in D) und vermöge

$$\dot{\Theta} = \lambda\kappa_e$$

die euklidische Krümmung κ_e des Bildbogens σ ins Spiel. Damit erhalten wir

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + i\lambda\kappa_e = \frac{f''(z)}{f'(z)}(1 - z\bar{z})e^{i\theta} + i\kappa_g - 2\bar{z}e^{i\theta} \tag{24}$$

und insbesondere an der Stelle $s := s_0$ (ergo $z = 0$):

$$2a_2 e^{i\theta} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + i(\lambda\kappa_e - \kappa_g) \quad (s = s_0). \tag{25}$$

Von jetzt ab nehmen wir an, der Bildbogen σ sei geradlinig. Dann ist $\kappa_e \equiv 0$, und (25) vereinfacht sich zu

$$2a_2 e^{i\theta} = \dot{u} - i\kappa_g \quad (s = s_0), \tag{26}$$

wobei wir wiederum $\log \lambda =: u$ gesetzt haben. Wegen $|a_2| \leq 2$ hat man insbesondere

$$|\dot{u}| \leq 4 \quad (s = s_0). \tag{27}$$

Wir differenzieren nun (24) nocheinmal nach s und setzen anschliessend wieder $s := s_0$. Es ergibt sich

$$\ddot{u} = (6a_3 - 4a_2^2)e^{2i\theta} + 2a_2 e^{i\theta} i\kappa_g + i\dot{\kappa}_g - 2 \quad (s = s_0). \tag{28}$$

Wegen (26) ist aber

$$2a_2 e^{i\theta} i\kappa_g = 2a_2 e^{i\theta}(-a_2 e^{i\theta} + \bar{a}_2 e^{-i\theta}) = -2a_2^2 e^{2i\theta} + 2|a_2|^2.$$

Addiert man daher

$$2\dot{u}^2 = 2(a_2 e^{i\theta} + \bar{a}_2 e^{-i\theta})^2 = 4\,\mathrm{Re}\,(a_2^2 e^{2i\theta}) + 4|a_2|^2$$

zu (28), so folgt

$$\ddot{u} + 2\dot{u}^2 = \mathrm{Re}\,[(6a_3 - 2a_2^2)e^{2i\theta}] + 6|a_2|^2 - 2$$

und damit schliesslich

$$\ddot{u} + 2\dot{u}^2 \leq 6\left|a_3 - \frac{a_2^2}{3}\right| + 6|a_2|^2 - 2. \tag{29}$$

Mit den Bezeichnungen

$$p := |a_3 - a_2^2| \leq 1, \quad q := |a_3| \leq 3$$

erhält man elementargeometrisch

$$|a_3-\frac{a_2^2}{3}|^2=\tfrac{1}{3}(p^2+2q^2)-\tfrac{2}{9}|a_2|^4\leqslant\tfrac{1}{9}(57-2|a_2|^4)$$

und somit anstelle von (29):

$$\ddot{u}+2\dot{u}^2\leqslant 2\sqrt{57-2|a_2|^4}+6|a_2|^2-2.$$

Wie man leicht verifiziert, ist hier die rechte Seite im Bereich $|a_2|\leqslant 2$ eine monoton wachsende Funktion von $A:=|a_2|^2$. Hiernach ist jedenfalls $\ddot{u}+2\dot{u}^2\leqslant 32$ oder eben

$$\ddot{u}\leqslant 2(16-\dot{u}^2)\quad (s=s_0). \tag{30}$$

7. Die allgemeine Situation ($f\in\tilde{S}$, $z(s_0)=\zeta$) lässt sich jederzeit mit Hilfe eines konformen Automorphismus von D und einer Aehnlichkeit der w-Ebene auf den schon betrachteten Fall zurückführen. Wie man sich leicht überlegt, bleiben dabei $\dot{u}$ und $\ddot{u}$ (sowie κ_g und $\lambda\kappa_e$) invariant. Wegen (27) und (30) sind damit (7) und (8) als richtig erwiesen.

8. Aus (25) ergibt sich noch die folgende differentialgeometrische Interpretation der Ungleichung $|a_2|\leqslant 2$:

$$\left|\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}+i(\lambda\kappa_e-\kappa_g)\right|\leqslant 4,$$

und zwar gilt dies längs beliebigen Bögen γ in D und für beliebiges $f\in\tilde{S}$.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Carl H. FitzGerald. *Quadratic inequalities and coefficient estimates for schlicht functions.* Arch. Rational Mech. Anal. *46* (1972), 356–368.
[2] Detlef Laugwitz. *Differentialgeometrie.* Stuttgart 1960.
[3] Karl Löwner. *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I.* Math. Ann. *89* (1923), 103–121.
[4] Christian Pommerenke. *Univalent Functions.* Göttingen 1975.

Eingegangen den 7 Januar 1978.