

Zeitschrift:	Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber:	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band:	53 (1978)
Artikel:	Einige Bemerkungen zur Algebra der Polyeder in nicht-euklidischen Räumen.
Autor:	Jessen, Borge
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-40783

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Einige Bemerkungen zur Algebra der Polyeder in nicht-euklidischen Räumen

BØRGE JESSEN

Herrn H. Hadwiger zum 70. Geburtstag gewidmet

1. Als ich vor einigen Jahren die Ehre hatte in Bern über die Algebra der Polytope vorzutragen, habe ich am Schluss des Vortrags einige Bemerkungen über die Möglichkeit einer Übertragung des Dehn-Sydlerschen Satzes [1], [3] auf nicht-euklidische Räume gemacht. Eine nähere Ausführung dieser Bemerkungen bildet den Inhalt der vorliegenden kleinen Arbeit.

2. Es sei gestattet zunächst in aller Kürze an den Dehn-Sydlerschen Satz zu erinnern.

Unter der Polyedergruppe \mathfrak{P} des gewöhnlichen Euklidischen Raumes verstehen wir die von den (abgeschlossenen, nicht entarteten) Polyedern erzeugte freie Abelsche Gruppe.

Ein Polyeder P heisst aus den Polyedern P_1, \dots, P_n zusammengesetzt, falls $P = P_1 \cup \dots \cup P_n$, und die Inneren von P_1, \dots, P_n disjunkt sind.

Mit \mathfrak{G} bezeichnen wir die Untergruppe von \mathfrak{P} , die von allen Elementen $P - P_1 - \dots - P_n$, wo P aus P_1, \dots, P_n zusammengesetzt ist, und allen Elementen $P - P'$, wo P' aus P durch eine Bewegung entsteht, erzeugt wird. Zwei Elemente X und Y von \mathfrak{P} heissen äquivalent, falls $X - Y \in \mathfrak{G}$.

Mit $\text{Vol} : \mathfrak{P} \rightarrow \mathbf{R}$ bezeichnen wir den Homomorphismus von \mathfrak{P} in die additive Gruppe \mathbf{R} , dessen Wert für ein Polyeder sein Volumen ist. Die Bedingung $\text{Vol } X = \text{Vol } Y$ ist offenbar für die Äquivalenz von X und Y notwendig. Hierzu kommt die Dehnsche Bedingung, für die Hadwiger [2] die folgende einfache Formulierung gegeben hat. Es bezeichne $H_\varphi : \mathfrak{P} \rightarrow \mathbf{R}$ für eine beliebige additive Funktion $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ mit $\varphi(\pi) = 0$ den Homomorphismus von \mathfrak{P} in \mathbf{R} , dessen Wert für ein Polyeder P durch

$$H_\varphi(P) = \sum_{v=1}^n l_v \varphi(\alpha_v)$$

gegeben ist, wo l_1, \dots, l_n die Kantenlängen und $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die zugehörigen Flächenwinkel von P sind. Die Dehnsche Bedingung besagt dann, dass $H_\varphi(X) = H_\varphi(Y)$ für die Äquivalenz von X und Y notwendig ist. Nach Sydler ist das

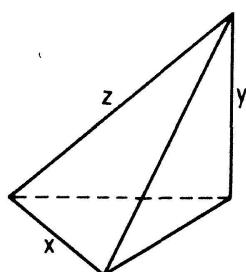
Erfülltsein der beiden Bedingungen $\text{Vol } X = \text{Vol } Y$ und $H_\varphi(X) = H_\varphi(Y)$ für jedes additive φ mit $\varphi(\pi) = 0$ für die Äquivalenz von X und Y auch hinreichend.

3. Das Äquivalenzproblem lässt sich unmittelbar auf den Fall übertragen, wo von Polyedern im sphärischen oder hyperbolischen Raum die Rede ist. Schon Dehn hat darauf hingewiesen, dass die Volumengleichheit und seine weitere Bedingung auch für die Äquivalenz von Elementen der Polyedergruppe in der sphärischen oder hyperbolischen Geometrie notwendig ist. Man wird hier fragen, ob auch das Sydlersche Resultat auf diese Fälle übertragen werden kann, also ob die Bedingungen auch hinreichend sind.

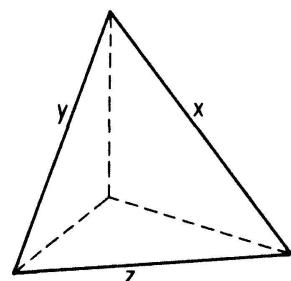
4. Ein Umstand, der dieses zweifelhaft macht, ist, dass das Volumen eines Polyeders in der sphärischen und der hyperbolischen Geometrie nach Schläfli und Lobačevskii mit Hilfe von transzendenten Funktionen dargestellt wird. Das Äquivalenzproblem ist seinem Charakter nach ein algebraisches Problem, und es ist schwierig sich vorzustellen, dass die transzendenten Volumenbedingung in seine Lösung eingehen kann. Wie dem auch sein mag, ist es naheliegend zu fragen, ob diejenigen Spezialfälle des Äquivalenzsatzes, worauf der Sydlersche Beweis beruht, auf die sphärische und hyperbolische Geometrie übertragen werden können. Wenn das der Fall sein sollte, hätte man jedenfalls einen Angriffspunkt für die Lösung des Äquivalenzproblems in nicht-euklidischen Räumen.

5. Die Spezialfälle, auf denen die Sydlersche Beweisführung für den Euklidischen Fall beruht, beziehen sich auf zwei Typen von Tetraedern, in welchen drei Flächenwinkel rechte sind.

Figur 1 zeigt den ersten Typus. Die Winkel längs den Kanten x, y, z sind $\frac{1}{2}\pi - \alpha, \frac{1}{2}\pi - \beta, \gamma$. Die Winkel längs den drei übrigen Kanten sind rechte. Wird $\cos^2 \alpha = a, \cos^2 \beta = b$ gesetzt, so gilt $\cos^2 \gamma = ab$. Ferner gilt $x = \lambda \tan \alpha, y = \lambda \tan \beta, z = \lambda \tan \gamma$ für ein gewisses λ . Bezeichnet man das Tetraeder mit $T(a, b, \lambda)$, so zeigt man leicht, dass $X = T(a, b, \lambda) + T(ab, c, \lambda)$ und $Y = T(a, c, \lambda) + T(ac, b, \lambda)$ für beliebige a, b, c, λ die für Äquivalenz notwendigen Bedingungen erfüllen. Das fundamentale Sydlersche Lemma besagt, dass tatsächlich X und Y äquivalent sind.



Figur 1.



Figur 2.

Betrachten wir jetzt im sphärischen Raum der Krümmung 1 ein Tetraeder von dem in Figur 1 gezeigten Typus. An Stelle der Relationen $x = \lambda \tan \alpha$, $y = \lambda \tan \beta$, $z = \lambda \tan \gamma$ finden wir dann $\tan x = \lambda \tan \alpha$, $\tan y = \lambda \tan \beta$, $\tan z = \lambda \tan \gamma$ für ein gewisses λ , und an Stelle der Relation $\cos^2 \gamma = ab$ finden wir

$$\cos^2 \gamma = a \circlearrowleft_\lambda b = ab - \lambda^2(1-a)(1-b).$$

Die hier auftretende Komposition \circlearrowleft_λ erweist sich als associativ. Bezeichnet man das Tetraeder mit $T(a, b, \lambda)$, so zeigt man leicht, dass $X = T(a, b, \lambda) + T(a \circlearrowleft_\lambda b, c, \lambda)$ und $Y = T(a, c, \lambda) + T(a \circlearrowleft_\lambda c, b, \lambda)$ die für Äquivalenz notwendigen Bedingungen erfüllen. Die Frage ist also, ob X und Y tatsächlich äquivalent sind. Im hyperbolischen Raum der Krümmung -1 ist die Situation ganz analog. An Stelle von $\tan x$, $\tan y$, $\tan z$ treten hier $\tanh x$, $\tanh y$, $\tanh z$, und die Komposition \circlearrowleft_λ ist hier durch

$$a \circlearrowleft_\lambda b = ab + \lambda^2(1-a)(1-b)$$

zu definieren.

Figur 2 zeigt den zweiten Typus. Die Winkel längs den Kanten x, y, z sind $\alpha, \beta, \frac{1}{2}\pi - \gamma$. Die Winkel längs den drei übrigen Kanten sind rechte. Wird $\cos^2 \alpha = a$, $\cos^2 \beta = b$ gesetzt, so gilt $\cos^2 \gamma = a + b$. Ferner gilt $x = \mu \cos \alpha \sin \alpha$, $y = \mu \cos \beta \sin \beta$, $z = \mu \cos \gamma \sin \gamma$ für ein gewisses μ . Bezeichnet man das Tetraeder mit $U(a, b, \mu)$, so zeigt man leicht, dass $X = U(a, b, \mu) + U(a + b, c, \mu)$ und $Y = U(a, c, \mu) + U(a + c, b, \mu)$ für beliebige a, b, c, μ die für Äquivalenz notwendigen Bedingungen erfüllen. Sydler bewies (mit Hilfe des fundamentalen Lemmas), dass tatsächlich X und Y äquivalent sind.

Betrachten wir jetzt im sphärischen Raum ein Tetraeder von dem in Figur 2 gezeigten Typus. An Stelle der Relationen $x = \mu \cos \alpha \sin \alpha$, $y = \mu \cos \beta \sin \beta$, $z = \mu \cos \gamma \sin \gamma$ finden wir dann $\tan x = \mu \cos \alpha \sin \alpha$, $\tan y = \mu \cos \beta \sin \beta$, $\tan z = \mu \cos \gamma \sin \gamma$ für ein gewisses μ , und an Stelle der Relation $\cos^2 \gamma = a + b$ finden wir

$$\cos^2 \gamma = a \oplus_\mu b = \frac{a + b + \mu^2 ab}{1 + \mu^2 ab}.$$

Die hier auftretende Komposition \oplus_μ erweist sich als associativ. Bezeichnet man das Tetraeder mit $U(a, b, \mu)$, so zeigt man leicht, dass $X = U(a, b, \mu) + U(a \oplus_\mu b, c, \mu)$ und $Y = U(a, c, \mu) + U(a \oplus_\mu c, b, \mu)$ die für Äquivalenz notwendigen Bedingungen erfüllen. Die Frage ist also, ob X und Y tatsächlich äquivalent sind. Im hyperbolischen Raum ist die Situation ganz analog. An Stelle von $\tan x$, $\tan y$, $\tan z$ treten hier $\tanh x$, $\tanh y$, $\tanh z$, und die Komposition \oplus_μ

ist hier durch

$$a \oplus_{\mu} b = \frac{a + b - \mu^2 ab}{1 - \mu^2 ab}$$

zu definieren.

LITERATUR

- [1] DEHN, M. *Ueber den Rauminhalt*, Math. Ann. 55 (1902), 465–478.
- [2] HADWIGER, H. *Zum Problem der Zerlegungsgleichheit der Polyeder*, Arch. Math. 2 (1950), 441–444.
- [3] SYDLER, J.-P. *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions*, Comment. Math. Helv. 40 (1965), 43–80.

Børge Jessen
 Dantes Plads 3
 DK-1556 Kopenhagen V
 Dänemark

Eingegangen den 26. Juli 1977