Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 53 (1978)

Artikel: Ueber die Eigenwerte des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen II.

Autor: Huber, Heinz

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40779

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici 53 (1978) 458–469 Birkhäuser Verlag, Basel

Ueber die Eigenwerte des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen II

HEINZ HUBER (Basel)

Albert Pfluger zum 70. Geburtstag

1.

Es sei $\mathcal{F}$ eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g_{\mathcal{F}} > 1$, versehen mit ihrer Poincaré-Metrik konstanter Krümmung -1. Nach Gauss-Bonnet besitzt sie den Inhalt

$$\int_{\mathcal{F}} d\omega_{\mathcal{F}} = 4\pi(g_{\mathcal{F}} - 1). \tag{1}$$

Es sei

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \tag{2}$$

die Folge aller Eigenwerte von $-\Delta_{\mathcal{F}}$, wobei jeder Eigenwert seiner Multiplizität entsprechend oft auftrete. Das Weylsche asymptotische Verteilungsgesetz besagt dann, dass der Quotient

$$Q_{\mathcal{F}}(x) = \sum_{\lambda_n \leqslant x} 1 \Big/ (g_{\mathcal{F}} - 1)x, \qquad x > 0, \tag{3}$$

für $x \to +\infty$ den Grenzwert 1 besitzt. Das schliesst natürlich nicht aus, dass $\inf_{\mathcal{F}} Q_{\mathcal{F}}(x)$ selbst für beliebig grosse x verschwinden könnte. In [3] wurde aber gezeigt: Es gibt eine für $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ positive und in beiden Variabeln monoton wachsende Funktion $q(\varepsilon, \delta)$ derart, dass $Q_{\mathcal{F}}(\frac{1}{4} + \varepsilon) \geqslant q(\varepsilon, \delta)$ für alle Flächen $\mathcal{F}$ mit $\cosh \frac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}} \geqslant 1 + \delta$. Dabei ist $\mu_{\mathcal{F}}$ die Länge der kürzesten geschlossenen Geodätischen auf $\mathcal{F}$.

Dieser Satz soll nun wesentlich erweitert werden: Es gibt sogar eine für $\varepsilon > 0$ positive und wachsende Funktion $q(\varepsilon)$, sodass $Q_{\mathcal{F}}(\frac{1}{4} + \varepsilon) \geqslant q(\varepsilon)$ für *alle* Flächen $\mathcal{F}$. Das ergibt sich aus dem folgenden Satz, der in Abschnitt 2 beweisen wird:

(A) Ist $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ ein zur Eigenwertfolge (2) gehöriges Orthonormalsystem von

Eigenfunktionen, so gilt für $n \geqslant 0$, $\mu > \frac{1}{4}$, $p \in \mathcal{F}$ die Ungleichung

$$1 \leqslant \mu/\lambda_{n+1} + 2\pi(a(\mu)-1) \sum_{k=0}^{n} (1-\lambda_k/\lambda_{n+1}) \, |\varphi_k(p)|^2.$$

Dabei ist $a(\mu) > 1$ die kleinste Nullstelle der Legendreschen Funktion

$$F_\mu(x) := P_\nu(x), \qquad -\nu(\nu+1) = \mu,$$

im Intervall $[1, +\infty)$. (Für $\mu \leqslant \frac{1}{4}$ besitzt F_μ keine Nullstellen in diesem Intervall; vergl. [4] pag. 388 und 402).

Aus (A) ergibt sich durch Integration über $\mathcal{F}$ wegen (1):

(**B**) Für $n \geqslant 0$, $\mu > \frac{1}{4}$ gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant \mu/\lambda_{n+1} + \frac{a(\mu)-1}{2(g_{\mathcal{F}}-1)} \sum_{k=0}^{n} (1-\lambda_k/\lambda_{n+1}) \\ &\leqslant \mu/\lambda_{n+1} + (a(\mu)-1)\frac{n+1}{2(g_{\mathcal{F}}-1)}. \end{aligned}$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ werde jetzt n so bestimmt, dass

$$\lambda_n \leqslant \tfrac{1}{4} + \varepsilon < \lambda_{n+1}.$$

Dann ist nach (2), (3)

$$Q_{\mathcal{F}}(\tfrac{1}{4}+\varepsilon) = (n+1)/(g_{\mathcal{F}}-1)(\tfrac{1}{4}+\varepsilon).$$

Wählen wir

$$\mu = \tfrac{1}{4} + \delta\varepsilon, \qquad 0 < \delta < 1,$$

so folgt aus (B):

$$Q_{\mathcal{F}}(\tfrac{1}{4}+\varepsilon) \geqslant \frac{32\varepsilon}{(4\varepsilon+1)^2} \frac{1-\delta}{a(\frac{1}{4}+\delta\varepsilon)-1}. \tag{4}$$

In 3.3 wird gezeigt, dass

$$a(\mu)-1 \sim j^2/2\mu \quad \text{für} \quad \mu \to +\infty,$$

($j = 2{,}4048\ldots$ ist die kleinste positive Nullstelle der Besselschen Funktion J_0).

Daraus folgt, dass die rechte Seite von (4) für $\varepsilon \to +\infty$ den Grenzwert $4\delta(1-\delta)/j^2$ besitzt. Daher wählen wir optimal $\delta = \frac{1}{2}$ und erhalten:

$$\textbf{(C)} \quad Q_{\mathcal{F}}(\tfrac{1}{4}+\varepsilon) \geqslant \frac{16\varepsilon}{(4\varepsilon+1)^2}(a(\tfrac{1}{4}+\varepsilon/2)-1)^{-1}, \qquad \varepsilon > 0.$$

In [4] pag. 402 wird nachgewiesen, dass

$$F_\mu\left(\cosh\frac{\pi}{\sqrt{\mu-\frac{1}{4}}}\right) < 0, \qquad \mu > \tfrac{1}{4}.$$

Daher ist wegen $F_\mu(1) = 1$

$$a(\mu) < \cosh\frac{\pi}{\sqrt{\mu-\frac{1}{4}}}. \tag{5}$$

Somit ergibt sich aus (C) das sehr explizite Resultat

$$\textbf{(D)} \quad Q_{\mathcal{F}}(\tfrac{1}{4}+\varepsilon) \geqslant q(\varepsilon) = \frac{8\varepsilon}{(4\varepsilon+1)^2}\sinh^{-2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2\varepsilon}}\right), \qquad \varepsilon > 0.$$

Andererseits wurde schon in [3] bewiesen, dass

$\inf\limits_{\mathcal{F}} Q_{\mathcal{F}}(\frac{1}{4}) = 0.$ Wir definieren jetzt

$$\sigma(\eta) = \sup_{\mu \geqslant \eta}(\mu-\eta)(a(\mu)-1), \qquad \eta > \tfrac{1}{4}. \tag{6}$$

Aus (5) folgt, dass $\sigma(\eta) < \infty$; σ ist offensichtlich monoton fallend im Intervall $(\frac{1}{4}, +\infty)$. Wir zeigen nun

(E) Für $m \geqslant 1$, $\eta > \frac{1}{4}$ gilt

$$\lambda_m \leqslant \eta + \frac{\sigma(\eta)m}{g-1} + \left[\left(\frac{\sigma(\eta)m}{g-1}\right)^2 + 2\eta\frac{\sigma(\eta)m}{g-1}\right]^{1/2} < 2\eta + \frac{2\sigma(\eta)m}{g_{\mathcal{F}}-1}.$$

In der Tat: Aus (B) und (6) folgt

$$1 \leqslant \mu/\lambda_m + \frac{\sigma(\eta)m}{2(g-1)}\cdot\frac{1}{\mu-\eta}, \qquad m \geqslant 1, \qquad \mu > \eta.$$

Wir dürfen gleich annehmen, dass $\lambda_m > \eta$, da andernfalls nichts zu beweisen wäre. Dann können wir aber

$$\mu = \eta + \tfrac{1}{2}(\lambda_m - \eta)$$

wählen und erhalten

$$(\lambda_m - \eta)^2 \leqslant \frac{2\sigma(\eta)m}{g-1}\lambda_m.$$

Daraus folgt sofort die Behauptung (E).

In Abschnitt 3 wird gezeigt, dass

$$\lim_{\eta \downarrow 1/4} \sigma(\eta) = +\infty, \qquad \sigma(\eta) = j^2/2 \quad \text{für} \quad \eta \geqslant j^2/4.$$

Somit ergibt sich aus (E) insbesondere

$$\textbf{(F)} \quad \lambda_m < \frac{j^2}{2} + \frac{j^2 m}{g_{\mathcal{F}} - 1}, \qquad m \geqslant 1.$$

Es ist bemerkenswert, dass diese Abschätzung die "richtige" Grössenordnung des asymptotischen Gesetzes

$$\lambda_m \sim m/(g_{\mathcal{F}} - 1), \qquad m \to \infty,$$

besitzt, im Gegensatz zur Abschätzung von Cheng [1]:

$$\lambda_m \leqslant \tfrac{1}{4} + 16\pi^2 d^{-2} m^2, \qquad d = \text{Durchmesser von } \mathcal{F},$$

(d erfüllt übrigens die Ungleichung $\cosh d > 2g - 1$).

2. Beweis von (A)

2.1 Der Beweis der Ungleichung (A) stützt sich auf folgendes

LEMMA. *Für $n \geqslant 0$ und reellwertige $\Theta \in C^2(\mathcal{F})$ gilt:*

$$\lambda_{n+1} \|\Theta\|^2 \leqslant -(\Delta_{\mathcal{F}}\Theta, \Theta) + \sum_{k=0}^{n} (\lambda_{n+1} - \lambda_k) |(\Theta, \varphi_k)|^2.$$

Beweis: Da die Funktion

$$\Psi = \Theta - \sum_{k=0}^{n} (\Theta, \varphi_k) \cdot \varphi_k \tag{1}$$

orthogonal zu den Eigenfunktionen $\varphi_0, \ldots \varphi_n$ ist, liefert das Rayleighsche Extremalprinzip die Ungleichung

$$\lambda_{n+1} \|\Psi\|^2 \leq \int_{\mathcal{F}} |\text{grad } \Psi|^2 \, d\omega_{\mathcal{F}} = -(\Delta_{\mathcal{F}} \Psi, \Psi). \tag{2}$$

Wegen $\Theta \in C^2(\mathcal{F})$ gilt

$$(\Delta_{\mathcal{F}} \Theta, \varphi_k) = (\Theta, \Delta_{\mathcal{F}} \varphi_k) = -\lambda_k (\Theta, \varphi_k).$$

Somit folgt aus (1):

$$(\Delta_{\mathcal{F}} \Psi, \Psi) = \left(\Delta_{\mathcal{F}} \Theta + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (\Theta, \varphi_k) \varphi_k, \ \Theta - \sum_{k=0}^{n} (\Theta, \varphi_k) \varphi_k \right)$$

$$= (\Delta_{\mathcal{F}} \Theta, \Theta) + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \, |(\Theta, \varphi_k)|^2. \tag{3}$$

Weiter folgt aus (1):

$$\|\Psi\|^2 = \|\Theta\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |(\Theta, \varphi_k)|^2. \tag{4}$$

Nun ergibt sich die Behauptung aus (2), (3) und (4).

2.2 Es sollen jetzt Funktionen auf $\mathcal{F}$ konstruiert werden, auf welche sich dieses Lemma mit Erfolg anwenden lässt. Zu diesem Zweck versehen wir den Einheitskreis

$E = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ mit der hyperbolischen Metrik

$$ds = 2 \frac{|dz|}{1 - |z|^2} \tag{5}$$

welche die Krümmung -1 besitzt. Für die hyperbolische Distanz $\rho(z, 0)$ ergibt

sich dann

$$\cosh \rho(z, 0) = \frac{1+|z|^2}{1-|z|^2}. \tag{6}$$

Führen wir geodätische Polarkoordinaten

$$\rho = \rho(z, 0), \qquad \vartheta = \arg z \tag{7}$$

ein, so wird

$$ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho \, d\vartheta^2.$$

Somit besitzt die Metrik das Flächenelement

$$d\omega = \sinh \rho \, d\rho \, d\vartheta. \tag{8}$$

Ist nun $p \in \mathcal{F}$ ein beliebiger Punkt, so gibt es eine konforme Ueberlagerungsabbildung

$$\gamma : E \to \mathcal{F}, \qquad \gamma(0) = p. \tag{9}$$

Mit Hilfe von γ wird die Differentialgeometrie (5) von E auf $\mathcal{F}$ verpflanzt und ergibt, unabhängig von der Wahl von p, die Poincaré-Metrik von $\mathcal{F}$. Wir bezeichnen mit Γ die zu γ gehörige Gruppe der Deckisometrien von E und betrachten für $\varepsilon \geqslant 0$ die Funktionenschar

$$h_\varepsilon(z) = \sum_{T \in \Gamma} f_\varepsilon(\cosh \rho(Tz, 0)) \tag{10}$$

mit

$$f_\varepsilon(x) = \begin{array}{lll} F_\mu^{1+\varepsilon}(x) & \text{in} & [1, a(\mu)], \ \mu > \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{in} & [a(\mu), +\infty), \end{array} \tag{11}$$

(f_ε fällt monoton von 1 nach 0). Da h_ε automorph bezüglich der Deckgruppe Γ ist, gibt es genau eine auf $\mathcal{F}$ definierte Funktion Ψ_ε mit

$$\Psi_\varepsilon \circ \gamma = h_\varepsilon. \tag{12}$$

In [2] wurde gezeigt[1]), dass diese Funktion für *positives* ε folgende Eigenschaften besitzt:

$$\Psi_\varepsilon \in C^1(\mathscr{F}), \tag{13}$$

$$\Psi_\varepsilon \in C^2(\mathscr{F}-\mathscr{C}) \tag{14}$$

$$-\Delta_{\mathscr{F}}\Psi_\varepsilon \leqslant (1+\varepsilon)\mu\Psi_\varepsilon \quad \text{auf} \quad \mathscr{F}-\mathscr{C} \tag{15}$$

$$\Delta_{\mathscr{F}}\Psi_\varepsilon \in \mathscr{L}^1(\mathscr{F}). \tag{16}$$

Dabei ist $\mathscr{C}$ das γ-Bild der Kreislinie

$$|z| = \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{1/2}, \qquad \text{(vergl. (6) und (10)–(12))},$$

also eine analytische Kurve auf $\mathscr{F}$, welche–wenn $a(\mu)$ gross ist—viele mehrfache Punkte besitzen kann. In [2] wurde ferner gezeigt, dass es zu $\varepsilon > 0$ eine Folge $\{\Theta_m\}_1^\infty$, $\Theta_m \in C^\infty(\mathscr{F})$, derart gibt, dass $\Theta_m \to \Psi_\varepsilon$ gleichmässig auf $\mathscr{F}$ und zugleich $(\Delta_{\mathscr{F}}\Theta_m, \Theta_m) \to (\Delta_{\mathscr{F}}\Psi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon)$. Daher folgt nun nach Lemma 2.1:

$$\lambda_{n+1}\|\Psi_\varepsilon\|^2 \leqslant -(\Delta_{\mathscr{F}}\Psi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon) + \sum_{k=0}^{n} (\lambda_{n+1}-\lambda_k)\,|(\Psi_\varepsilon, \varphi_k)|^2, \ \varepsilon > 0.$$

Daraus ergibt sich wegen (15) und $\Psi_\varepsilon \geqslant 0$:

$$\lambda_{n+1}\|\Psi_\varepsilon\|^2 \leqslant (1+\varepsilon)\mu\,\|\Psi_\varepsilon\|^2 + \sum_{k=0}^{n} (\lambda_{n+1}-\lambda_k)\,|(\Psi_\varepsilon, \varphi_k)|^2, \qquad \varepsilon > 0. \tag{17}$$

In dieser schwächeren Ungleichung kann nun auch der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ vollzogen werden: Aus (10)–(12) ersieht man, dass $\Psi_\varepsilon \to \Psi_0$ gleichmässig auf $\mathscr{F}$. Somit ergibt sich aus (17) die Ungleichung

$$1 \leqslant \mu/\lambda_{n+1} + \|\Psi_0\|^{-2} \sum_{k=0}^{n} (1-\lambda_k/\lambda_{n+1})\,|(\Psi_0, \varphi_k)|^2. \tag{18}$$

2.3 Wir berechnen jetzt die Fourierkoeffizienten und die Norm von Ψ_0. Ist $D \subset E$ ein Fundamentalbereich der Deckgruppe Γ, so folgt aus (10)–(12):

---

[1] der hiesige und der dortige Laplace-Operator haben entgegengesetztes Vorzeichen!

$$(\varphi_k, \Psi_0) = \int_{\mathcal{F}} \varphi_k \Psi_0 \, d\omega_{\mathcal{F}} = \int_D (\varphi_k \circ \gamma)(z) h_0(z) \, d\omega$$

$$= \sum_{T \in \Gamma} \int_D (\varphi_k \circ \gamma)(z) f_0(\cosh \rho(Tz, 0)) \, d\omega$$

$$= \sum_{T \in \Gamma} \int_{T(D)} (\varphi_k \circ \gamma)(z) f_0(\cosh \rho(z, 0)) \, d\omega$$

$$= \int_E (\varphi_k \circ \gamma)(z) f_0(\cosh \rho(z, 0)) \, d\omega.$$

Führen wir die Polarkoordinaten (7) ein und setzen

$(\varphi_k \circ \gamma)(z) = \Phi_k(\rho, \vartheta)$, so ergibt sich wegen (8):

$$(\varphi_k, \Psi_0) = \int_0^\infty f_0(\cosh \rho) \left(\int_0^{2\pi} \Phi_k(\rho, \vartheta) \, d\vartheta \right) \sinh \rho \, d\rho. \tag{19}$$

Nach [3] 3.3 gilt aber

$$\int_0^{2\pi} \Phi_k(\rho, \vartheta) \, d\vartheta = 2\pi \rho_k(p) F_{\lambda_k}(\cosh \rho).$$

Somit folgt aus (19) und (11):

$$(\varphi_k, \Psi_0) = 2\pi \varphi_k(p) \int_1^{a(\mu)} F_\mu(x) F_{\lambda_k}(x) \, dx. \tag{20}$$

Wegen $f_0 \geqslant 0$ folgt aus (10)

$h_0^2(z) \geqslant \sum_{T \in \Gamma} f_0^2(\cosh \rho(Tz, 0))$. Daher wird

$$\|\Psi_0\|^2 = \int_D h_0^2(z) \, d\omega \geqslant \sum_{T \in \Gamma} \int_D f_0^2(\cosh \rho(Tz, 0)) \, d\omega$$

$$= \int_E f_0^2(\cosh \rho(z, 0)) \, d\omega = 2\pi \int_0^\infty f_0^2(\cosh \rho) \sinh \rho \, d\rho \tag{21}$$

$$= 2\pi \int_1^{a(\mu)} F_\mu^2(x) \, dx.$$

2.4 Aus (18), (20) und (21) ergibt sich jetzt die Ungleichung

$$1 \leqslant \mu/\lambda_{n+1} + 2\pi\left(\int_1^{a(\mu)} F_\mu^2\, dx\right)^{-1} \sum_{k=0}^{n} (1-\lambda_k/\lambda_{n+1})\, |\varphi_k(p)|^2 \left(\int_1^{a(\mu)} F_\mu F_{\lambda_k}\, dx\right)^2$$

$$\leqslant \mu/\lambda_{n+1} + 2\pi \sum_{k=0}^{n} (1-\lambda_k/\lambda_{n+1})\, |\varphi_k(p)|^2 \int_1^{a(\mu)} F_{\lambda_k}^2(x)\, dx.$$

Daraus folgt aber die Ungleichung (A), wenn wir noch nachweisen, dass

$$|F_\lambda(x)| \leqslant 1 \quad \text{für } x \geqslant 1, \qquad \lambda \geqslant 0. \tag{22}$$

Nach [4] pag. 273 (145) besitzt

$$F_\lambda = P_\nu, \; -\nu(\nu+1) = \lambda,$$

die Integraldarstellung

$$F_\lambda(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos\left(\pi\sqrt{\tfrac{1}{4}-\lambda}\right) \int_0^\infty \frac{\cosh\left((\tfrac{1}{4}-\lambda)^{1/2} u\right)}{(x+\cosh u)^{1/2}}\, du, \qquad x \geqslant 1, \qquad 0 < \lambda \leqslant \tfrac{1}{4}.$$

Somit ist F_λ positiv und monoton fallend in $[1, +\infty)$, und wegen $F_\lambda(1) = 1$ folgt

$$0 < F_\lambda(x) \leqslant 1, \; x \geqslant 1, \; 0 < \lambda \leqslant \tfrac{1}{4}. \tag{23}$$

Das gilt auch noch für $\lambda = 0$, da $F_0 = 1$.
Nach [4] pag. 270 (141) gilt:

$$F_\lambda(\cosh t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^t \frac{\cos\left((\lambda - \tfrac{1}{4})^{1/2} u\right)}{(\cosh t - \cosh u)^{1/2}}\, du, \qquad t > 0, \qquad \lambda \geqslant \tfrac{1}{4}. \tag{24}$$

Daraus geht hervor, dass

$$|F_\lambda(\cosh t)| \leqslant F_{1/4}(\cosh t), \qquad t > 0, \qquad \lambda \geqslant \tfrac{1}{4}.$$

Hieraus und aus (23) folgt aber die Behauptung (22). Damit ist die Ungleichung (A) bewiesen.

3. Hilfssätze über $\sigma(\eta)$

3.1 Aus der Definition

$$\sigma(\eta) = \sup_{\mu \geqslant \eta} (\mu - \eta)(a(\mu) - 1), \qquad \eta > \tfrac{1}{4}, \tag{1}$$

folgt unmittelbar, dass σ im Intervall $(\frac{1}{4}, +\infty)$ monoton fallend ist.

3.2 Nach [3] Lemma 2 gilt

$$a(\mu) - 1 \geqslant j^2/2\mu \quad \text{für} \quad \mu \geqslant 3. \tag{2}$$

Daraus folgt für $\eta \geqslant 3$:

$$\sigma(\eta) \geqslant \sup_{\mu \geqslant \eta} j^2(\mu - \eta)/2\mu = j^2/2.$$

Somit ist wegen 3.1

$$\sigma(\eta) \geqslant j^2/2 \quad \text{für} \quad \eta > \tfrac{1}{4}. \tag{3}$$

3.3 F_μ erfüllt die Legendresche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}((x^2-1)F'_\mu) + \mu F_\mu = 0. \tag{4}$$

Für jede Funktion

$$f \in C^1[1, a(\mu)], \qquad f(a(\mu)) = 0, \tag{5}$$

ist fF'_μ/F_μ stetig in $[1, a(\mu)]$ und es gilt

$$0 \leqslant \int_1^{a(\mu)} (x^2-1)\left(f' - \frac{F'_\mu}{F_\mu} f\right)^2 dx = \int_1^{a(\mu)} (x^2-1)(f')^2\, dx$$

$$- \int_1^{a(\mu)} (x^2-1)\frac{F'_\mu}{F_\mu}(f^2)'\, dx + \int_1^{a(\mu)} (x^2-1)\left(\frac{F'_\mu}{F_\mu}\right)^2 f^2\, dx. \tag{6}$$

Durch partielle Integration unter Berücksichtigung von (4), (5) ergibt sich:

$$\int_1^{a(\mu)} (x^2-1)\frac{F'_\mu}{F_\mu}(f^2)'\,dx = \mu\int_1^{a(\mu)} f^2\,dx + \int_1^{a(\mu)} (x^2-1)\left(\frac{F'_\mu}{F_\mu}\right)^2 f^2\,dx.$$

Somit folgt aus (6):

$$\mu\int_1^{a(\mu)} f^2\,dx \leqslant \int_1^{a(\mu)} (x^2-1)(f')^2\,dx. \tag{7}$$

Die Funktion

$$f(x) = J_0\left(j\sqrt{\frac{x-1}{a(\mu)-1}}\right)$$

erfüllt offenbar die Bedingungen (5). Eine kleine Rechnung ergibt:

$$\int_1^{a(\mu)} f^2\,dx = \frac{2}{j^2}(a(\mu)-1)\int_0^j J_0^2(t)t\,dt, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\int_1^{a(\mu)} (x^2-1)(f')^2\,dx &= \int_0^j (J_0'(t))^2 t\,dt + \tfrac{1}{2}(a(\mu)-1)\int_0^j \left(\frac{t}{j}\right)^2 (J_0'(t))^2 t\,dt \\ &\leqslant [1+\tfrac{1}{2}(a(\mu)-1)]\int_0^j (J_0'(t))^2 t\,dt. \end{aligned} \tag{9}$$

Aus der Besselschen Differentialgleichung $(tJ_0')' + tJ_0 = 0$ folgt

$$\int_0^j J_0(tJ_0')'\,dt + \int_0^j J_0^2 t\,dt = 0,$$

und daraus durch partielle Integration

$$\int_0^j (J_0')^2 t\,dt = \int_0^j J_0^2 t\,dt.$$

Somit ergibt sich aus (7)–(9):

$$(\mu - j^2/4)(a(\mu)-1) \leqslant j^2/2. \tag{10}$$

Folglich ist $\sigma(j^2/4) \leqslant j^2/2$, und daher wegen 3.1 und (3)

$$\sigma(\eta) = j^2/2 \quad \text{für} \quad \eta \geqslant j^2/4. \tag{11}$$

Aus (2) und (10) ergibt sich noch

$$a(\mu)-1\sim j^2/2\mu, \qquad \mu\to+\infty. \tag{12}$$

3.4 Der Intergraldarstellung 2.4 (24) entnimmt man, dass

$$F_\mu(\cosh t)>0 \quad \text{für} \quad 0<t\leqslant\frac{\pi}{2\sqrt{\mu-\frac{1}{4}}}, \qquad \mu>\tfrac{1}{4}.$$

Daher ist

$$a(\mu)>\cosh\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\mu-\frac{1}{4}}}\right)$$

und

$$a(\mu)-1>2\sinh^2\left(\frac{\pi}{4\sqrt{\mu-\frac{1}{4}}}\right)$$

Somit wird

$$\sigma(\eta)\geqslant(\eta-\tfrac{1}{4})[a(\eta+(\eta-\tfrac{1}{4}))-1]>2(\eta-\tfrac{1}{4})\sinh^2\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2(\eta-\frac{1}{4})}}\right).$$

Daraus folgt aber

$$\lim_{\eta\downarrow 1/4}\sigma(\eta)=+\infty. \tag{13}$$

LITERATUR

[1] Cheng, S.-Y., *Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications*, Math. Z. *143* (1975), 289–297.

[2] Huber, H., *Ueber den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen*, Comment. Math. Helv. *49* (1974), 251–259.

[3] —— *Ueber die Eigenwerte des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen*, Comment. Math. Helv. *51* (1976), 215–231.

[4] Hobson, E. W., *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*, (Cambridge University Press 1931).

Eingegangen den 10. Dezember 1977