

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 53 (1978)

Artikel: Verzerrungsaussagen bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilationsbeschränkung und ein Extremalprinzip der Elektrostatik in inhomogenen Medien.
Autor: Kühnau, Reiner
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-40775>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Verzerrungsaussagen bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung und ein Extremalprinzip der Elektrostatik in inhomogenen Medien

Herrn Prof. Dr. A. Pfluger zum 70 Geburtstag gewidmet

REINER KÜHNAU

§1. Einleitung

Wie in zahlreichen Beispielen in der Literatur belegt, ist die Theorie der Extremalprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung aufs engste verknüpft mit der Differentialgleichung

$$\operatorname{div} (p \operatorname{grad} \phi) = 0. \quad (1)$$

Diese Differentialgleichung spielt auch in zahlreichen Situationen der mathematischen Physik eine Rolle [1]. Dies gibt hier Anlass zu folgenden Untersuchungen.

Bringt man ein Dielektrikum in ein vorgegebenes elektrostatisches Feld, so entstehen sogenannte “scheinbare Ladungen”, insbesondere dort, wo die Dielektrizitätskonstante als Ortsfunktion $p(z)$ einen Sprung erleidet. Diese scheinbaren Ladungen lassen sich durch eine Integralgleichung berechnen. In vorliegender Mitteilung soll für sie eine Extremalcharakterisierung hergeleitet werden. Die Situation ist dabei ähnlich wie beim Gaußschen Prinzip minimaler Energie zur Charakterisierung der auf Leiteroberflächen in elektrostatischen Feldern entstehenden Ladungen (vgl. zu diesem Fragenkreis des Gaußschen bzw. hiermit zusammenhängenden Thomsonschen Prinzips z.B. die in [16] angegebene Literatur).

Da zahlreiche Extremalprobleme vom Grötzschschen Typ bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsschranke Extremalfunktionen besitzen, die sich als komplexes Potential elektrostatischer Felder bei ortsabhängiger Dielektrizitätskonstante auffassen lassen, erhalten wir damit neue Charakterisierungen dieser quasikonformen Extremalfunktionen und also auch der zugehörigen extremalen Werte des betreffenden Funktionals. Dies gelingt zunächst in solchen Fällen, bei denen das zugehörige quadratische Differential ein

vollständiges Quadrat ist. Durch die Methode der zweiblättrigen Überlagerungsfläche erhält man anschliessend wie in den Arbeiten von H. Grötzsch auch einige andere Fälle. Man bekommt z.B. Ungleichungen für das bekannte Grunskysche oder das Golusinsche Funktional. Die entstehenden Ungleichungen liefern in Spezialfällen auch einige in der Literatur schon angegebene asymptotische Abschätzungen.

§2. Bezeichnungen und Voraussetzungen

Die Funktion $p(z)$ erfülle nebst

$$0 < m \leq p(z) \leq M < \infty \quad (2)$$

der Einfachheit halber im folgenden einschlägige, die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes unmittelbar ermöglichende Glattheitsvoraussetzungen. Etwa sei $p(z) \equiv 1$ in dem $z = \infty$ im Innern enthaltenden Gebiet \mathfrak{G}' , dessen Rand \mathfrak{L} aus endlich vielen getrennt liegenden geschlossenen analytischen Jordankurven bestehe. Im Komplement \mathfrak{G} mit dem Inhalt I sei $p(z)$ mit hölderstetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehen, dabei jeweils in einem an \mathfrak{L} angrenzenden Uferstreifen konstant. Mit \mathfrak{R} bezeichnen wir einen grossen Kreis $|z| = R$, mit \mathfrak{G}_R das Innere. n bzw. n' sei die Innen- bzw. Aussennormale bei \mathfrak{L} und \mathfrak{R} .

Wir betrachten weiters, falls zusätzlich $p(z) \geq 1$ für alle z ist, die Klasse \mathfrak{A} aller quasikonformen Abbildungen $w = w(z)$ der Vollebene auf sich, deren Dilatation stets $\leq p(z)$ ist und die in Umgebung von $z = \infty$ (wo zwangsläufig Konformität vorliegt) gemäss

$$w(z) = z + \frac{a_1}{z} + \dots \quad (3)$$

hydrodynamisch normiert sind. Ist speziell $p(z) \equiv Q > 1$ in \mathfrak{G} , dann sprechen wir von der Abbildungsklasse \mathfrak{A}_Q .

§3. Eine Variationscharakterisierung gewisser elektrostatischer Potentiale bzw. quasikonformer Extremalfunktionen

1. Es soll hier eine Variationscharakterisierung für diejenige quasikonforme Abbildung $g_\theta(z)$ der Vollebene auf sich hergeleitet werden, für die $e^{-i\theta} g_\theta(z)$ die

Differentialgleichung

$$f_{\bar{z}} = \nu \cdot \overline{f_z} \quad \text{mit} \quad \nu = \frac{p-1}{p+1} \quad (4)$$

erfüllt und die in $z = \infty$ durch

$$g_\theta(z) = z + \frac{a_{1\theta}}{z} + \dots \quad (5)$$

hydrodynamisch normiert ist. Wir setzen

$$\begin{aligned} \phi^*(z) &= \Re e[ie^{-i\theta} g_\theta(z)] = \varphi_0(z) + \varphi^*(z) \quad \text{mit} \quad \varphi_0(z) = \Re e[ie^{-i\theta} z], \\ \varphi_0^1(z) &= \Im m[ie^{-i\theta} z]. \end{aligned} \quad (6)$$

Da $\phi^*(z)$ dann (1) erfüllt, erkennt man leicht die Deutung von $\phi^*(z)$ als elektrostatisches Potential und die Deutung von $e^{-i\theta} g_\theta(z)$ als komplexes Potential im Sinne von [11].

Daneben betrachten wir alle durch

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \varphi_0(z) - \int_{\mathfrak{L}} \mu(\zeta) \log |z - \zeta| ds_\zeta - \iint_{\mathfrak{G}} \sigma(\zeta) \log |z - \zeta| d\xi d\eta \equiv \varphi_0(z) + \varphi(z) \\ & \quad (\zeta = \xi + i\eta, ds = \text{Bogenlänge}) \end{aligned} \quad (7)$$

definierten Funktionen ϕ , wobei $\mu(\zeta)$ auf \mathfrak{L} erklärt ist und $\sigma(\zeta)$ in \mathfrak{G} mit $\sigma \equiv 0$ in einem Umgebungstreifen von \mathfrak{L} . Derartige (reelle) Funktionenpaare nennen wir im folgenden "zulässig", falls

$$\int_{\mathfrak{L}} \mu(\zeta) ds + \iint_{\mathfrak{G}} \sigma(\zeta) d\xi d\eta = 0 \quad (8)$$

und falls noch die bekannte Voraussetzung der Hölderstetigkeit wie in der klassischen Potentialtheorie vorliegt, so dass die Differentiationsregeln angewandt werden können.

Bekanntlich gilt auf \mathfrak{L}

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial n} &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \pi \mu + \pi \int_{\mathfrak{L}} \mu(\zeta) K(\zeta, z) ds_\zeta + \pi \iint_{\mathfrak{G}} \sigma(\zeta) K(\zeta, z) d\xi d\eta, \\ \frac{\partial \phi}{\partial n'} &= -\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \pi \mu - \pi \int_{\mathfrak{L}} \mu(\zeta) K(\zeta, z) ds_\zeta - \pi \iint_{\mathfrak{G}} \sigma(\zeta) K(\zeta, z) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (9)$$

mit dem Neumannschen Kern (vgl. [4])

$$K(\zeta, z) = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z - \zeta|. \quad (10)$$

Insbesondere ist

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{\partial \phi}{\partial n'} = -2\pi\mu. \quad (11)$$

Ferner ist für $z \in \mathfrak{G}$

$$\Delta \phi = -2\pi\sigma. \quad (12)$$

Es gibt genau ein Paar von zulässigen Funktionen $\mu = \mu^*$, $\sigma = \sigma^*$, für die $\phi = \phi^*$ wird. Zunächst sind μ und σ nämlich gemäss (11), (12) durch ϕ eindeutig bestimmt. Und wenn man umgekehrt μ^* und σ^* durch

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial n} + \frac{\partial \phi^*}{\partial n'} = -2\pi\mu^*, \quad \Delta \phi^* = -2\pi\sigma^* \quad (13)$$

definiert und in (7) diese offenbar zulässigen Funktionen einsetzt, entsteht eine Funktion ϕ mit $\Delta(\phi - \phi^*) = 0$ für $z \notin \mathfrak{L}$, Stetigkeit von $\phi - \phi^*$ und der Normalableitung hiervon längs \mathfrak{L} und $\phi - \phi^* \rightarrow 0$ für $z \rightarrow \infty$, was $\phi \equiv \phi^*$ nach sich zieht.

2. Neben (13) gilt noch auf \mathfrak{L} wegen (4)

$$p \frac{\partial \phi^*}{\partial n} + \frac{\partial \phi^*}{\partial n'} = 0. \quad (14)$$

Dabei sei p der innere Randwert von $p(z)$ im jeweiligen Punkt von \mathfrak{L} . Eliminiert man $\partial \phi^* / \partial n$ aus (9) mit Hilfe von (13) und (14), so kommt für $z \in \mathfrak{L}$

$$\frac{p(z)+1}{p(z)-1} \cdot \mu^*(z) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n} \varphi_0(z) + \int_{\mathfrak{L}} \mu^*(\zeta) K(\zeta, z) ds_\zeta + \iint_{\mathfrak{G}} \sigma^*(\zeta) K(\zeta, z) d\xi d\eta. \quad (15)$$

Weiters ergibt sich aus (1) und (12)

$$\text{grad } p \text{ grad } \phi^* = 2\pi p \sigma^* \quad (16)$$

und also nach (7) für $z \in \mathfrak{G}$

$$2\pi p(z)\sigma^*(z) = \text{grad } p(z) \cdot \text{grad } \varphi_0(z) - \text{grad } p(z) \cdot \int_{\mathfrak{R}} \mu^*(\zeta) \text{grad}_z \log |z - \zeta| ds_\zeta \\ - \text{grad } p(z) \cdot \iint_{\mathfrak{G}} \sigma^*(\zeta) \text{grad}_z \log |z - \zeta| d\xi d\eta. \quad (17)$$

In (15), (17) liegt ein Integralgleichungssystem für μ^*, σ^* vor. Falls $p(z)$ stückweise konstant ist, entfällt (17) und in (15) liegt eine Integralgleichung für $\mu^*(z)$ vor (es ist dann $\sigma^* \equiv 0$). Diese findet sich (im räumlichen Analogon) in [3] sowie bei [1] (S. 170 ff.). Falls umgekehrt keine Sprunglinien bei $p(z)$ auftreten, entfällt (15) und in (17) liegt eine Integralgleichung für σ^* vor (es ist dann $\mu^* \equiv 0$). Diese wurde (wiederum im räumlichen Analogon) in [2] angegeben; vgl. noch zu diesen Integralgleichungen [5] (auch einige sich zeitlich anschliessende Arbeiten des gleichen Verfassers und die Darstellung in [6]), [21].

3. Bei der Herleitung unserer Extremalcharakterisierung gehen wir aus von

$$- \int_{\mathfrak{R}} p \left(\phi^* \frac{\partial \phi^*}{\partial n} - \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds + \iint_{\mathfrak{G}} \phi \operatorname{div} (p \operatorname{grad} \phi) dx dy \\ = \iint_{\mathfrak{G}} p (\operatorname{grad}^2 \phi^* - \operatorname{grad}^2 \phi) dx dy \\ = \iint_{\mathfrak{G}} p (\operatorname{grad} \phi^* - \operatorname{grad} \phi)^2 dx dy - 2 \iint_{\mathfrak{G}} p \operatorname{grad} \phi (\operatorname{grad} \phi - \operatorname{grad} \phi^*) dx dy \quad (18) \\ \geq -2 \iint_{\mathfrak{G}} p \operatorname{grad} \phi (\operatorname{grad} \phi - \operatorname{grad} \phi^*) dx dy \\ = 2 \int_{\mathfrak{R}} p \phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \right) ds + 2 \iint_{\mathfrak{G}} \phi \operatorname{div} (p \operatorname{grad} \phi) dx dy.$$

Eine entsprechende Beziehung folgt für das innerhalb \mathfrak{R} gelegene Teilstück von

\mathfrak{G}' . Addiert man diese zu (18), entsteht

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathfrak{R}} \left(\phi^* \frac{\partial \phi^*}{\partial n} - \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds - \int_{\mathfrak{Q}} p \left(\phi^* \frac{\partial \phi^*}{\partial n} - \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds - \int_{\mathfrak{Q}} \left(\phi^* \frac{\partial \phi^*}{\partial n'} - \phi \frac{\partial \phi}{\partial n'} \right) ds \\ & \cong 2 \int_{\mathfrak{R}} \phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \right) ds + 2 \int_{\mathfrak{Q}} p \phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \right) ds + 2 \int_{\mathfrak{Q}} \phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial n'} - \frac{\partial \phi^*}{\partial n'} \right) ds \\ & + \iint_{\mathfrak{G}_R} \phi \operatorname{div} (p \operatorname{grad} \phi) dx dy, \end{aligned}$$

und bei Benutzung von (14)

$$\begin{aligned} 0 & \cong \int_{\mathfrak{R}} (\phi - \phi^*) \frac{\partial(\phi - \phi^*)}{\partial n} ds + \int_{\mathfrak{R}} \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \right) ds + \int_{\mathfrak{Q}} p \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \\ & + \int_{\mathfrak{Q}} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n'} ds + \iint_{\mathfrak{G}_R} \phi \operatorname{div} (p \operatorname{grad} \phi) dx dy. \end{aligned}$$

Hier strebt für $R \rightarrow \infty$ das erste Integral nach 0. Nach Umformung des zweiten Integrals und Benutzung von (11) bzw. (13) erhält man im Grenzfalle

$$\begin{aligned} 0 & \cong \int_{\mathfrak{Q}} (\phi^* 2\pi\mu - \phi 2\pi\mu^*) ds - \iint (\phi^* \Delta \phi - \phi \Delta \phi^*) dx dy \\ & + \int_{\mathfrak{Q}} p \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds + \int_{\mathfrak{Q}} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n'} ds + \iint \phi \operatorname{div} (p \operatorname{grad} \phi) dx dy. \quad (19) \end{aligned}$$

Falls kein Integrationsgebiet angegeben, ist hier und fürder die ganze z -Ebene darunter zu verstehen (in Wirklichkeit verschwindet allerdings der Integrand jeweils in einer Umgebung von $z = \infty$, so daß die Integrale nicht uneigentlich sind). In (19) steht das Gleichheitszeichen genau für $\phi \equiv \phi^*$.

Da auch

$$\int_{\mathfrak{R}} \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \right) ds = \int_{\mathfrak{Q}} (\varphi^* 2\pi\mu - \varphi 2\pi\mu^*) ds - \iint_{\mathfrak{G}_R} (\varphi^* \Delta \varphi - \varphi \Delta \varphi^*) dx dy,$$

wobei hier die linke Seite für $R \rightarrow \infty$ nach 0 strebt, folgt durch Subtraktion von

(19) und zusätzlicher Benutzung von (12) bzw. (13)

$$2\pi \int_{\mathfrak{L}} \varphi_0 \mu \, ds + 2\pi \iint \varphi_0 \sigma \, dx \, dy + \int_{\mathfrak{L}} p \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \, ds + \int_{\mathfrak{L}} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n'} \, ds \\ + \iint \phi \operatorname{div} (p \operatorname{grad} \phi) \, dx \, dy \leq 2\pi \int_{\mathfrak{L}} \varphi_0 \mu^* \, ds + 2\pi \iint \varphi_0 \sigma^* \, dx \, dy. \quad (20)$$

Hierbei ist noch

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{L}} p \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \, ds + \int_{\mathfrak{L}} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n'} \, ds + \iint \phi \operatorname{div} (p \operatorname{grad} \phi) \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathfrak{L}} p \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, ds + \int_{\mathfrak{L}} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \, ds + \iint \varphi \operatorname{div} (p \operatorname{grad} \varphi) \, dx \, dy + \int_{\mathfrak{L}} p \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \, ds \\ & \quad + \int_{\mathfrak{L}} \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n'} \, ds \\ & \quad + \iint \varphi_0 \operatorname{div} (p \operatorname{grad} \varphi_0) \, dx \, dy + \int_{\mathfrak{L}} p \left(\varphi_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \varphi \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \right) \, ds \\ & \quad + \int_{\mathfrak{L}} \left(\varphi_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n'} + \varphi \frac{\partial \varphi_0}{\partial n'} \right) \, ds \\ & \quad + \iint \varphi \operatorname{div} (p \operatorname{grad} \varphi_0) \, dx \, dy + \iint \varphi_0 \operatorname{div} (p \operatorname{grad} \varphi) \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathfrak{L}} p \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, ds + \int_{\mathfrak{L}} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \, ds + \iint \varphi [-2\pi p \sigma + (\operatorname{grad} p)(\operatorname{grad} \varphi)] \, dx \, dy \\ & \quad + \int_{\mathfrak{L}} \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n'} \, ds - \iint_{\mathfrak{G}} p \operatorname{grad}^2 \varphi_0 \, dx \, dy + \int_{\mathfrak{L}} \left(\varphi_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n'} + \varphi \frac{\partial \varphi_0}{\partial n'} \right) \, ds \\ & \quad + 2 \int_{\mathfrak{L}} p \varphi \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \, ds + 2 \iint \varphi \operatorname{div} (p \operatorname{grad} \varphi_0) \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathfrak{L}} p \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, ds + \int_{\mathfrak{L}} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \, ds + \iint \varphi [-2\pi p \sigma + (\operatorname{grad} p)(\operatorname{grad} \varphi)] \, dx \, dy \\ & \quad + 2 \int_{\mathfrak{L}} (p-1) \varphi \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \, ds \\ & \quad - \iint (p-1) \operatorname{grad}^2 \varphi_0 \, dx \, dy - \int_{\mathfrak{L}} \left(\varphi \frac{\partial \varphi_0}{\partial n'} - \varphi_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right) \, ds + 2 \iint \varphi (\operatorname{grad} p) \\ & \quad \times (\operatorname{grad} \varphi_0) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Hierbei ist das vorletzte Integral über \mathfrak{L} gleich dem Negativen der ersten beiden Terme von (20).

Die rechte Seite von (20) berechnet sich noch zu

$$\begin{aligned}
 & 2\pi \int_{\mathbb{R}} \varphi_0 \mu^* ds + 2\pi \iint \varphi_0 \sigma^* dx dy \\
 &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \varphi_0 \mu^* ds - \iint \varphi_0 \Delta \phi^* dx dy \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\varphi_0 \frac{\partial \phi^*}{\partial n} - \phi^* \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \right) ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} [\phi^* d(\Im i e^{-i\theta} z) + (\Im i e^{-i\theta} g_\theta) d\varphi_0] \\
 &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \Im \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\theta} g_\theta dz = -2\pi \Re e^{-2i\theta} a_{1\theta}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Wir erhalten damit, wenn wir auch noch die für $g_{\theta+\pi/2}^*(z) = -ig_\theta(iz)$ entstehende Ungleichung anschreiben, als Ergebnis den

SATZ 1. Für alle gemäss (8) zulässigen Paare von Funktionen μ, σ gilt

$$\begin{aligned}
 & \iint (p-1) dx dy - \int_{\mathbb{R}} p \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \int_{\mathbb{R}} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n'} ds - 2 \int_{\mathbb{R}} (p-1) \varphi \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} ds \\
 & - \iint \varphi [-2\pi p \sigma + (\text{grad } p)(\text{grad } \varphi) + 2(\text{grad } p)(\text{grad } \varphi_0)] dx dy \geq 2\pi \Re e^{-2i\theta} a_{1\theta} \\
 & \geq \iint \left(1 - \frac{1}{p}\right) dx dy + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds + \int_{\mathbb{R}} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n'} ds + 2 \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{p} - 1\right) \varphi \frac{\partial \varphi'_0}{\partial n} ds \\
 & + \iint \varphi \left[-2\pi p \sigma + \left(\text{grad } \frac{1}{p}\right)(\text{grad } \varphi) + 2\left(\text{grad } \frac{1}{p}\right)(\text{grad } \varphi'_0) \right] dx dy. \quad (22)
 \end{aligned}$$

wobei links das Gleichheitszeichen genau für $\mu \equiv \mu^*, \sigma \equiv \sigma^*$ steht.

Dabei ist noch φ_0, φ'_0 gemäss (6), φ nach (7), $\partial\varphi/\partial n$ bzw. $\partial\varphi/\partial n'$ nach (9), $\text{grad } \varphi$ durch den aus (7) durch Differentiation unter dem Integralzeichen entstehenden Ausdruck zu ersetzen, so dass die äusseren Seiten der Ungleichung (22) vollständig als ein nur von μ, σ abhängendes Funktional erscheinen. Rechts in (22) besteht auch Gleichheit für genau ein Paar μ, σ , das sich analog zu (6), (13) aus $g_{\theta+\pi/2}^*(z)$ berechnet.

§4. Folgerungen aus Satz 1

Explizit sieht Satz 1, wenn die am Schluss des vorigen §3 genannte Ersetzung von φ usw. wirklich vorgenommen wird, in einem Spezialfall so aus.

FOLGERUNG 1. Ist $p(z) \equiv Q > 1$ in \mathfrak{G} , dann gilt für alle gemäss

$$\int_{\mathfrak{R}} \mu \, ds = 0 \quad (23)$$

zulässigen μ stets

$$\begin{aligned} & (Q-1) \cdot I + 2(Q-1) \iint_{\mathfrak{R}\mathfrak{R}} \mu(\zeta) \frac{\partial \varphi_0(z)}{\partial n} \log |z - \zeta| \, ds_z \, ds_\zeta \\ & \quad - \pi(Q+1) \iint_{\mathfrak{R}\mathfrak{R}} \mu(z) \mu(\zeta) \log |z - \zeta| \, ds_z \, ds_\zeta \\ & + \pi \cdot (Q-1) \iint_{\mathfrak{R}\mathfrak{R}} \mu(\zeta) \mu(\eta) \left[\int_{\mathfrak{R}} K(\eta, z) \cdot \log |z - \zeta| \, ds_z \right] ds_\zeta \, ds_\eta \geq 2\pi \Re e^{-2i\theta} a_{1\theta} \\ & \geq \left(1 - \frac{1}{Q}\right) \cdot I + 2\left(1 - \frac{1}{Q}\right) \iint_{\mathfrak{R}\mathfrak{R}} \mu(\zeta) \frac{\partial \varphi'_0(z)}{\partial n} \log |z - \zeta| \, ds_z \, ds_\zeta \\ & \quad + \pi \left(1 + \frac{1}{Q}\right) \iint_{\mathfrak{R}\mathfrak{R}} \mu(z) \mu(\zeta) \log |z - \zeta| \, ds_z \, ds_\zeta \\ & + \pi \left(1 - \frac{1}{Q}\right) \iint_{\mathfrak{R}\mathfrak{R}} \mu(\zeta) \mu(\eta) \left[\int_{\mathfrak{R}} K(\eta, z) \cdot \log |z - \zeta| \, ds_z \right] ds_\zeta \, ds_\eta \quad (24) \end{aligned}$$

mit Gleichheit genau für $\mu \equiv \mu^*$ im linken Teil der Ungleichung.

Dabei wurde $\sigma \equiv 0$ gesetzt, was gemäss der dann nach (13) vorliegenden Bedingung $\sigma^* \equiv 0$ sinnvoll ist.

Es muss offenbar bei der Nebenbedingung (23) stets

$$\begin{aligned} & -(Q+1) \iint_{\mathfrak{R}\mathfrak{R}} \mu(z) \mu(\zeta) \log |z - \zeta| \, ds_z \, ds_\zeta + (Q-1) \iint_{\mathfrak{R}\mathfrak{R}} \mu(\zeta) \mu(\eta) \\ & \quad \times \left[\int_{\mathfrak{R}} K(\eta, z) \cdot \log |z - \zeta| \, ds_z \right] ds_\zeta \, ds_\eta \geq 0 \quad (25) \end{aligned}$$

sein, da andernfalls die linke Seite von (24) nicht nach unten beschränkt wäre – man kann ja μ noch mit einem beliebigen Faktor multiplizieren, d.h. μ durch μt mit konstantem t ersetzen. Sucht man zu festem μ den Minimalwert der entstehenden Funktion von t , dann entsteht

FOLGERUNG 2. *Unter den Voraussetzungen von Folgerung 1 und bei „>“ in (25) gilt auch*

$$\begin{aligned} & (Q-1) \cdot I - \pi^{-1}(Q-1)^2 \left(\iint_{\Omega\Omega} \mu(\zeta) \frac{\partial \varphi_0(z)}{\partial \bar{n}} \log |z-\zeta| \, ds_z \, ds_\zeta \right)^2 \\ & \cdot \left\{ -(Q+1) \iint_{\Omega\Omega} \mu(z) \mu(\zeta) \log |z-\zeta| \, ds_z \, ds_\zeta + (Q-1) \iint_{\Omega\Omega} \mu(\zeta) \mu(\eta) \right. \\ & \quad \left. \times \left[\iint_{\Omega} K(\eta, z) \log |z-\zeta| \, ds_z \right] ds_\zeta \, ds_\eta \right\}^{-1} \geq 2\pi \Re e^{-2i\theta} a_{1\theta} \quad (26) \end{aligned}$$

mit Gleichheit genau für $\mu/\mu^* \equiv \text{const.}$

Entsprechend lässt sich auch die rechte Seite von (24) umschreiben. Es sei noch bemerkt, dass der in (24) und (26) auftretende, durch Faltung von $K(\eta, z)$ und $\log |z-\zeta|$ entstehende Kern näher von Carleman untersucht wurde – vgl. [4], S.27/28.

Setzt man speziell in (22) $\mu \equiv \sigma \equiv 0$, so ergibt sich

FOLGERUNG 3. *Es gilt für alle reellen θ stets*

$$\iint_{\mathfrak{G}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) dx \, dy \leq 2\pi \Re e^{-2i\theta} a_{1\theta} \leq \iint_{\mathfrak{G}} (p-1) dx \, dy. \quad (27)$$

Das Gleichheitszeichen kann in (27) offenbar für $p \neq 1$ niemals stehen. Jedoch ist Ungleichung (27) für „kleine“ Werte von $p-1$ asymptotisch scharf (wie analog die unten folgenden Ungleichungen). Dies steht in Übereinstimmung mit asymptotischen Darstellungen für $a_{1\theta}$ in [10b], S.14,[20], S.433, [15], wo ein anonymes Fehlerglied auftritt.

Nach [12] ist bei den Abbildungen von \mathfrak{A} (vgl. §2) der genaue Wertebereich der Koeffizienten a_1 eine abgeschlossene Kreisscheibe, wobei die g_θ als Extremalfunktionen auftreten. Daraus ergibt sich nach Folgerung 3 die

FOLGERUNG 4. *Der Rand (= Kreislinie) des genauen Wertebereichs der Koeffizienten a_1 bei den Abbildungen der Klasse \mathfrak{A} liegt bei $p \neq 1$ in dem zum Nullpunkt konzentrischen offenen Kreisring mit den Radien*

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{G}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) dx \, dy \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{G}} (p-1) dx \, dy. \quad (28)$$

Speziell für die Klasse \mathfrak{A}_Q sind diese Radien damit

$$\frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{Q}\right) \cdot I \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi} (Q-1) \cdot I. \quad (29)$$

Die wenigen Fälle von Funktionen $p(z)$, für die der genaue Wertebereich von a_1 bisher als geschlossener Ausdruck verliert, sind in [18] zusammengestellt.

Man vgl. zu (28) bzw. (29) verwandte Ungleichungen in [17]. Aus (8) in [17] ergibt sich z.B. statt der ersten in (28) genannten Grösse die kleinere (also gröbere)

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{G}} \frac{p-1}{p+1} dx dy.$$

Andererseits kann man (28) zu einer Abschätzung der in [17] eingeführten "quasikonformen Spanne" S bezüglich der Dilatationsschranke $p(z)$ benutzen:

$$S \leq \frac{1}{\pi} \iint_{\mathfrak{G}} (p-1) dx dy. \quad (30)$$

Das ergänzt die in [17] angegebene Ungleichung

$$S \geq \frac{2}{\pi} \iint_{\mathfrak{G}} \frac{p-1}{p+1} dx dy, \quad (31)$$

die übrigens besser ist als die aus dem linken Term in (28) entstehende Abschätzung.

Durch den bekannten Prozess der Bildung der zweiblättrigen Überlagerungsfläche fliesst aus Folgerung 4 weiter die

FOLGERUNG 5. *Bei den Abbildungen $w = w(z)$ der Klasse \mathfrak{A} ist bei $p \neq 1$ zu fixiertem z_1 der genaue Wertebereich von $w(z_1)$ eine abgeschlossene Kreisscheibe, deren Rand vollständig in dem zu z_1 konzentrischen offenen Kreisring mit den Radien*

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{G}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{dx dy}{|z - z_1|} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{G}} (p-1) \frac{dx dy}{|z - z_1|} \quad (32)$$

liegt.

Man kann die zweite Größe in (32) nach einem Hilfssatz von E. Schmidt weiter abschätzen und erhält

$$|w(z_1) - z_1| \leq (Q-1)\sqrt{I/\pi} \quad \text{für } w(z) \in \mathfrak{A}_Q. \quad (32')$$

Für den Spezialfall, es ist $p(z) = 1$ für $|z| > 1$, $p(z) = Q > 1$ für $|z| < 1$, so dass in \mathfrak{A} die Klasse $\Sigma(Q)$ der Q -quasikonform fortsetzbaren Abbildungen der bekannten Klasse Σ vorliegt, lautet (32) mit den üblichen Bezeichnungen für die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung so:

$$\begin{aligned} & 2\pi^{-1}(1-Q^{-1})|z_1|[\mathbf{E}(|z_1|^{-1}) - (1-|z_1|^{-2})\mathbf{K}(|z_1|^{-1})] \\ & \text{und } 2\pi^{-1}(Q-1)|z_1|[\mathbf{E}(|z_1|^{-1}) - (1-|z_1|^{-2}) \cdot \mathbf{K}(|z_1|^{-1})] \quad \text{für } |z_1| > 1, \\ & 2\pi^{-1}(1-Q^{-1}) \cdot \mathbf{E}(|z_1|) \quad \text{und } 2\pi^{-1}(Q-1) \cdot \mathbf{E}(|z_1|) \quad \text{für } |z_1| \leq 1. \end{aligned} \quad (33)$$

Das ergibt sich aus

$$\iint_{|z|<1} \frac{dx dy}{|z - z_1|} = \begin{cases} 4|z_1|[\mathbf{E}(|z_1|^{-1}) - (1-|z_1|^{-2}) \cdot \mathbf{K}(|z_1|^{-1})] & \text{für } |z_1| > 1, \\ 4 \cdot \mathbf{E}(|z_1|) & \text{für } |z_1| \leq 1. \end{cases} \quad (33')$$

Zur Berechnung werden Polarkoordinaten eingeführt. (33) wurde als asymptotische Abschätzung schon in [19] (im Fehlerglied etwas unschärfer in [20]) angegeben. (33') ergibt sich auch durch Vergleich von (32) mit [19]. Die zugehörige scharfe (naturgemäss erheblich kompliziertere) Abschätzung des Funktional $w(z_1)$ in der Klasse $\Sigma(Q)$ wurde in [19] angegeben.

Aus Folgerung 5 ergibt sich durch eine lineare Transformation, die z_1 nach ∞ schafft, weiter die

FOLGERUNG 6. *Bei den Abbildungen der Klasse \mathfrak{A} ist der Rand des genauen Wertebereichs (= abgeschlossene Kreisscheibe) des Funktional $w''(z_1)/w'(z_1)$ zu fixiertem z_1 bei $p \neq 1$ (aber $p \equiv 1$ in Umgebung von z_1) vollständig in dem zum Nullpunkt konzentrischen offenen Kreisring mit den Radien*

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{G}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{dx dy}{|z - z_1|^3} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{G}} (p-1) \frac{dx dy}{|z - z_1|^3} \quad (34)$$

gelegen.

Hierbei ist die Normierung (3) in $z = \infty$ und sogar die an sich dort gemachte Voraussetzung $p \equiv 1$ in Umgebung von $z = \infty$ offenbar überflüssig, also nur die Forderung $\infty \rightarrow \infty$ wesentlich.

Aus Folgerung 6 erhält man dann auch Abschätzungen der Rundungsschranke in der Klasse $\Sigma(Q)$ (s.o.) bzw. $S(Q)$ (= Abbildungen der Klasse S mit Q -quasikonformer Fortsetzung nach $|z| > 1$ bei $\infty \rightarrow \infty$). Der genaue, wenngleich erheblich kompliziertere Wert dieser Rundungsschranke für $\Sigma(Q)$ wurde in [19] angegeben.

§5. Verallgemeinerungen

1. Ersetzt man in §3 die Funktion φ_0 durch

$$\varphi_0(z) = \Re e \left[i \sum_{k=1}^n x_k z^k / k \right], \quad x_k = \text{komplexe Konstanten,} \quad \sum |x_k| \neq 0, \quad (35)$$

ferner die Funktion $\phi^*(z)$ durch

$$\phi^*(z) = \Re e i \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} [x_k N^{(k)}(z) + \bar{x}_k M^{(k)}(z)], \quad (36)$$

wobei die Hilfsfunktionen $N^{(k)}$ und $M^{(k)}$ mit ihren Entwicklungskoeffizienten b_{kl} bzw. c_{kl} wie in [13] zu definieren sind, so erhält man einen Satz, der zu Satz 1 analog ist. Wir wollen uns damit begnügen, diesen nur entsprechend Folgerung 3 zu formulieren. Statt (21) erhält man jetzt

$$\begin{aligned} & 2\pi \int_{\Omega} \varphi_0 \mu^* ds + 2\pi \iint \varphi_0 \sigma^* dx dy \\ &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \Im m \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} [x_k N^{(k)}(z) + \bar{x}_k M^{(k)}(z)] d \sum_{l=1}^n \frac{1}{l} x_l z^l \\ &= -2\pi \Re e \sum_{k,l=1}^n (x_k x_l b_{kl} + \bar{x}_k x_l c_{kl}). \end{aligned} \quad (37)$$

Somit ergibt sich wegen

$$\iint_{\mathbb{G}} (p-1) \left| \frac{d}{dz} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} x_k z^k \right|^2 dx dy = \sum_{k,l=1}^n x_k \bar{x}_l \iint_{\mathbb{G}} (p-1) z^{k-1} \bar{z}^{l-1} dx dy$$

SATZ 2. Es gilt für alle Systeme komplexer Konstanten x_k für die Entwicklungskoeffizienten b_{kl} und c_{kl} der Funktionen $N^{(k)}$ und $M^{(k)}$ stets unter den in §2

genannten Voraussetzungen

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^n x_k \bar{x}_l \iint_{\mathfrak{G}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) z^{k-1} \bar{z}^{l-1} dx dy &\leq 2\pi \Re e \sum_{k,l=1}^n (x_k x_l b_{kl} + \bar{x}_k \bar{x}_l c_{kl}) \\ &\leq \sum_{k,l=1}^n x_k \bar{x}_l \iint_{\mathfrak{G}} (p-1) z^{k-1} \bar{z}^{l-1} dx dy. \end{aligned} \quad (38)$$

Nun ist nach [13] der genaue Wertebereich des aus den gemäss

$$-\log \frac{w(z) - w(\zeta)}{z - \zeta} = \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl} z^{-k} \bar{\zeta}^{-l} \quad \text{in Umgebung von } z = \infty \quad (39)$$

für die Abbildungen $w(z) \in \mathfrak{A}$ definierten Koeffizienten a_{kl} gebildeten Funktionals

$$\sum_{k,l=1}^n x_k x_l a_{kl} \quad (40)$$

eine abgeschlossene Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt bzw. Radius*

$$\sum_{k,l=1}^n x_k x_l b_{kl} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k,l=1}^n \bar{x}_k \bar{x}_l c_{kl}.$$

Damit ergibt sich aus Satz 2, da man die x_k durch $e^{-i\theta} x_k$ ersetzen kann, die

FOLGERUNG 7. *Der Rand (= Kreislinie) des genauen Wertebereichs des Funktionals (40) bei den Abbildungen der Klasse \mathfrak{A} liegt bei $p \neq 1$ in dem zum Nullpunkt konzentrischen offenen Kreisring mit den Radien*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \sum_{k,l=1}^n x_k \bar{x}_l \iint_{\mathfrak{G}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) z^{k-1} \bar{z}^{l-1} dx dy \quad \text{und} \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{k,l=1}^n x_k \bar{x}_l \iint_{\mathfrak{G}} (p-1) z^{k-1} \bar{z}^{l-1} dx dy. \end{aligned} \quad (41)$$

* Druckfehler in [13]: In (54) ist $x_k \bar{x}_l$ zu ersetzen durch $\bar{x}_k x_l$ (gleiches Versehen in der klassischen Arbeit von H. Grunsky, *Math. Z.* **45**, dort in der Hauptungleichung (38) bzw. im Übergang von (44) zu (45)). Ferner ist in [13] in (12) und (13) $\bar{\gamma}_k \gamma_l$ zu ersetzen durch $\gamma_k \bar{\gamma}_l$.

Man könnte hieran noch ähnlich Bemerkungen wie nach Folgerung 4 anschliessen. In [18] findet sich eine Zusammenstellung der wenigen bisher bekannten Fälle von Funktionen $p(z)$, für die der genaue Wertebereich von (40) als geschlossener Ausdruck bekannt ist.

2. Ersetzt man in §3 die Funktion φ_0 durch

$$\varphi_0(z) = \Re \sum_1^n \gamma_k \log(z - z_k), \quad \gamma_k = \text{komplexe Konstanten, } \sum |\gamma_k| \neq 0, \quad (42)$$

ferner die Funktion $\phi^*(z)$ durch

$$\phi^*(z) = \Re \sum_1^n [\gamma_k \log p(z; z_k, \infty) + \bar{\gamma}_k \log q(z; z_k, \infty)], \quad (43)$$

wobei die Hilfsfunktionen $p(z; z_k, \infty)$ und $q(z; z_k, \infty)$ wie in [13] zu definieren (und nicht mit $p(z)$ zu verwechseln) sind, so erhält man wieder einen Satz, der zu Satz 1 analog ist. Auch hier soll dieser nur entsprechend Folgerung 3 formuliert werden. Ferner setzen wir zur Vereinfachung noch voraus, dass in einer Umgebung der (verschieden annehmbaren) Punkte z_k gilt $p(z) \equiv 1$. In den Überlegungen von §3 ist jetzt \mathfrak{R} zu ersetzen durch den geschlossenen Weg, der entsteht, wenn zu \mathfrak{R} noch kleine die z_k umschlingende Kreise sowie diese mit \mathfrak{R} verbindende doppelt durchlaufene Strecken hinzugenommen werden. Statt (21) erhält man jetzt

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{\mathfrak{R}} \varphi_0 \mu^* ds + 2\pi \iint \varphi_0 \sigma^* dx dy \\ = -2\pi \Re \sum_{k,l=1}^n \left[\gamma_k \gamma_l \log \frac{p(z_k; z_l, \infty)}{z_k - z_l} + \gamma_k \bar{\gamma}_l \log q(z_k; z_l, \infty) \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Somit ergibt sich wegen

$$\iint_{\mathfrak{G}} (p-1) \left| \frac{d}{dz} \sum_{k=1}^n \gamma_k \log(z - z_k) \right|^2 dx dy = \sum_{k,l=1}^n \gamma_k \bar{\gamma}_l \iint_{\mathfrak{G}} (p-1) \frac{dx dy}{(z - z_k)(\bar{z} - \bar{z}_l)}$$

SATZ 3. Es seien $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ nicht zugleich verschwindende komplexe Konstanten. Ferner seien z_1, \dots, z_n untereinander verschiedene Punkte, in deren Umgebung jeweils für die Funktion $p(z)$ (nebst den allgemeinen Voraussetzungen

von §2) gelte $p(z) \equiv 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^n \gamma_k \bar{\gamma}_l \iint_{\mathfrak{G}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{dx dy}{(z - z_k)(\bar{z} - \bar{z}_l)} \\ \cong 2\pi \Re e \sum_{k,l=1}^n \left[\gamma_k \gamma_l \log \frac{p(z_k; z_l, \infty)}{z_k - z_l} + \gamma_k \bar{\gamma}_l \log q(z_k; z_l, \infty) \right] \quad (45) \\ \cong \sum_{k,l=1}^n \gamma_k \bar{\gamma}_l \iint_{\mathfrak{G}} (p-1) \frac{dx dy}{(z - z_k)(\bar{z} - \bar{z}_l)}. \end{aligned}$$

Nun ist nach [13] für die Abbildungen $w(z) \in \mathfrak{A}$ der genaue Wertebereich des Funktional

$$\sum_{k,l=1}^n \gamma_k \gamma_l \log \frac{w(z_k) - w(z_l)}{z_k - z_l} \quad (46)$$

eine abgeschlossene Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt bzw. Radius

$$\sum_{k,l=1}^n \gamma_k \gamma_l \log \frac{p(z_k; z_l, \infty)}{z_k - z_l} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k,l=1}^n \gamma_k \bar{\gamma}_l \log q(z_k; z_l, \infty).$$

Damit ergibt sich aus Satz 3, da man die γ_k durch $e^{-i\theta} \gamma_k$ ersetzen kann, die

FOLGERUNG 8. *Der Rand (= Kreislinie) des genauen Wertebereichs des Funktional (46) bei den Abbildungen der Klasse \mathfrak{A} liegt bei $p \neq 1$ in dem zum Nullpunkt konzentrischen offenen Kreisring mit den Radien*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \sum_{k,l=1}^n \gamma_k \bar{\gamma}_l \iint_{\mathfrak{G}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{dx dy}{(z - z_k)(\bar{z} - \bar{z}_l)} \quad \text{und} \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{k,l=1}^n \gamma_k \bar{\gamma}_l \iint_{\mathfrak{G}} (p-1) \frac{dx dy}{(z - z_k)(\bar{z} - \bar{z}_l)}. \quad (47) \end{aligned}$$

Hieraus fließt speziell für $n = 1$ die

FOLGERUNG 9. *Der Rand (= Kreislinie) des genauen Wertebereichs des Funktional*

$$\log w'(z_1) \quad (48)$$

bei den Abbildungen der Klasse \mathfrak{A} liegt bei $p \neq 1$ (aber $p \equiv 1$ in Umgebung von $z = z_1$) in dem zum Nullpunkt konzentrischen offenen Kreisring mit den Radien

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{G}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{dx dy}{|z - z_1|^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{G}} (p - 1) \frac{dx dy}{|z - z_1|^2}. \quad (49)$$

Dies zeitigt weiter wie bei H. Grötzsch durch die Methode der zweiblättrigen Überlagerung die

FOLGERUNG 10. *Der Rand (= Kreislinie) des genauen Wertebereichs des Funktional*

$$\log \frac{w(z_1) - w(z_2)}{z_1 - z_2} \quad (z_1 \neq z_2) \quad (50)$$

bei den Abbildungen der Klasse \mathfrak{A} liegt bei $p \neq 1$ in dem zum Nullpunkt konzentrischen offenen Kreisring mit den Radien

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{G}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{dx dy}{|z - z_1||z - z_2|} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{G}} (p - 1) \frac{dx dy}{|z - z_1||z - z_2|}. \quad (51)$$

Dabei seien z_1 und z_2 verschiedene und sonst irgendwo gelegene Punkte, in deren Umgebung insbesondere jetzt nicht $p \equiv 1$ sein muss.

Haben wir es speziell mit der Abbildungsklasse $\Sigma(Q)$ zu tun, dann erhält man wie in [20] mit der üblichen Bezeichnung $\mathbf{K}(k)$ für die vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung aus (51) bei $z_2 = 0$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{Q}\right) \int_0^{1/|z_1|} \mathbf{K}(k) dk \quad \text{und} \quad \frac{2}{\pi} (Q - 1) \int_0^{1/|z_1|} \mathbf{K}(k) dk \quad \text{für} \quad |z_1| \geq 1, \\ \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{Q}\right) \left\{ 2G + \int_1^{1/|z_1|} [\mathbf{K}(1/k)/k] dk \right\} \quad \text{und} \quad \frac{2}{\pi} (Q - 1) \\ \times \left\{ 2G + \int_1^{1/|z_1|} [\mathbf{K}(1/k)/k] dk \right\} \quad \text{für} \quad |z_1| < 1 \end{aligned} \quad (52)$$

(G = Catalansche Konstante). Durch Stürzung fällt uns hiermit die nachstehende Folgerung zu, die ein Resultat von S. L. Kruškal' [9], [10] (für $|z_1| \leq 1$) bzw. O. Lehto [20] (für $|z_1| > 1$) verschärft.

FOLGERUNG 11. *Der Rand des genauen Wertebereichs (= abgeschlossene Kreisscheibe) des Funktional*

$$\log [w(z)/z] \quad (z \text{ fest}) \quad (53)$$

bei den Abbildungen der Klasse $S(Q)$ (s.o.) liegt bei $Q > 1$ in dem zum Nullpunkt konzentrischen offenen Kreisring mit den Radien

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{Q}\right) \int_0^{|z|} \mathbf{K}(k) dk \quad \text{und} \quad \frac{2}{\pi} (Q-1) \int_0^{|z|} \mathbf{K}(k) dk \quad \text{für} \quad |z| \leq 1, \\ \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{Q}\right) \left\{ 2G + \int_1^{|z|} [\mathbf{K}(1/k)/k] dk \right\} \quad \text{und} \quad \frac{2}{\pi} (Q-1) \\ \times \left\{ 2G + \int_1^{|z|} [\mathbf{K}(1/k)/k] dk \right\} \quad \text{für} \quad |z| > 1. \end{aligned} \quad (54)$$

Wegen der wenigen bekannten Fälle, in denen der genaue Wertebereich des Funktional (48) bzw. (46) als geschlossener Ausdruck bekannt ist, vgl. man [12] bzw. [13] und die in [18] angegebene Literatur. Der genaue Wertebereich des Funktional (50) bzw. (53) lässt sich nach [14] prinzipiell für die Klasse $\Sigma(Q)$ bzw. $S(Q)$ berechnen. Jedoch ist der Formelaufwand beträchtlich.

Setzt man in Folgerung 7 noch $n=2$, $\gamma_1=1$, $\gamma_2=-1$ und führt anschliessend den Grenzübergang $z_2 \rightarrow z_1$ durch, so erhält man die

FOLGERUNG 12. *Der Rand (= Kreislinie) des genauen Wertebereichs der für $z = z_1$ genommenen Schwarzschen Ableitung*

$$\{w, z\} \quad (55)$$

bei den Abbildungen der Klasse \mathfrak{A} liegt bei $p \neq 1$ (aber $p \equiv 1$ in Umgebung von $z = z_1$) in dem zum Nullpunkt konzentrischen offenen Kreisring mit den Radien

$$\frac{3}{\pi} \iint_{\mathfrak{G}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{dx dy}{|z - z_1|^4} \quad \text{und} \quad \frac{3}{\pi} \iint_{\mathfrak{G}} (p-1) \frac{dx dy}{|z - z_1|^4}. \quad (56)$$

Der genaue Wertebereich von (55) ist explizit nur in wenigen Fällen bekannt—vgl. [12], [13], [18]. Man vgl. auch unscharfe Abschätzungen von (55) und (50) in [7].

Es liessen sich noch wie in [13] aus Folgerung 7 durch Grenzübergang u.ä. zahlreiche andere Aussagen über verwandte Funktionale gewinnen, was der Leser aber mühelos selbst vollziehen kann.

§6. Zusatzbemerkungen

1. Die in §3 für die Ebene vorgetragene Überlegung lässt sich auch auf den Raum übertragen bei Ersetzung der logarithmischen Potentiale durch die entsprechenden räumlichen Potentiale. Man erhält so wieder eine Extremalcharakterisierung gewisser elektrostatischer Grundpotentiale. Eine Deutung im Zusammenhang mit quasikonformen Abbildungen entfällt dann allerdings.

2. Fasst man die Minimierung der linken Seite von (22) als Variationsproblem für μ, σ auf, so entsteht als notwendige Bedingung für das Verschwinden der ersten Variation (15), (17). Variationsprobleme dieses Typs wurden in [8] betrachtet.

3. Es sei hier auf die Möglichkeit hingewiesen, mit den Mitteln der sog. modernen Potentialtheorie auf Grund der Extremaleigenschaft auf die Existenz von μ^*, σ^* und damit der Funktion $g_\theta(z)$ zu schliessen.

4. Man kann die Auswirkung von Symmetrisierungs- und ähnlichen geometrischen Prozessen auf die linke Seite von (22) und damit $a_{1\theta}$ studieren.

5. Die Ungleichungen

$$|w(z_1) - z_1| \leq \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{G}} (p-1) \frac{dx dy}{|z - z_1|}, \quad (57)$$

$$\left| \log \frac{w(z_1) - w(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{G}} (p-1) \frac{dx dy}{|z - z_1| |z - z_2|}, \quad (58)$$

die zunächst nach Folgerung 5 bzw. 10 für die Abbildungen $w(z)$ der Klasse \mathfrak{A} gelten, sind auch für die Abbildungen von \mathcal{G} richtig, deren Dilatation im Punkte z stets $\leq p(z)$ ist und die jeden Randpunkt von \mathcal{G} fest halten; z_1 und z_2 seien dabei Punkte im Innern von \mathcal{G} . Denn diese Abbildungen lassen sich durch die Identität zu einer Abbildung der Klasse \mathfrak{A} ergänzen.

6. Bemerkenswert ist noch, dass die Integrale in (34), (49) und (56) beschränkt bleiben, falls z_1 geeignet gegen geeignete Spitzen strebt, wenn man solche in der Berandung von \mathcal{G} zulässt und $p(z) \equiv Q$ in \mathcal{G} setzt. Ferner bleiben

diese Integrale beschränkt bei Annäherung an Randpunkte von \mathcal{G} , bei denen $p(z) - 1$ hinreichend stark nach Null strebt. Man beachte den engen Zusammenhang dieses Sachverhaltes mit dem Teichmüller-Wittichschen Verzerrungssatze.

LITERATUR

- [1] S. BERGMAN und M. SCHIFFER, *Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics*. New York 1953.
- [2] G. BIRKHOFF, *Induced potentials*. Studies in Math. and Mech., presented to R. von Mises, New York 1954; hier S.88–96.
- [3] P. FRANK und R. VON MISES (hrsg.), *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, I. Teil, Braunschweig 1930, hier S.614 ff. (von R. VON MISES verfasst); II Teil, Braunschweig 1935, hier S.715 ff. (von F. NOETHER verfasst).
- [4] D. GAIER, *Konstruktive Methoden der konformen Abbildung*. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1964.
- [5] G. A. GRÜNBERG, *On a method of solving the fundamental problem of electrostatics and related problems*. *Ž. eksper. teor. fiziki* (Moskva, Leningrad) 8(1938), 221–252 [Russ.] und *Techn. Physics URSS* 5 (1938), 525–569.
- [6] G. A. GRINBERG (GRÜNBERG), *Ausgewählte Fragen der mathematischen Theorie elektrischer und magnetischer Erscheinungen*. Moskva. Leningrad 1948. [Russ.].
- [7] V. JA. GUTLIANSKIĭ und V. A. ŠČEPETEV, *Ein verallgemeinerter Flächensatz für eine Klasse q -quasikonformer Abbildungen*, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 218 (1974), 509–512 [Russ.]; engl. Übers.: *Soviet Math. Dokl.* 15 (1974), 1362–1366.
- [8] G. W. KIMBLE, *A characterization of extremals for general multiple integral problems*, *Pacif. J. Math.* 14 (1964), 1283–1295.
- [9] S. L. KRUŠKAL', a.) *Einige Extremalaufgaben für schlichte analytische Funktionen*, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 182 (1968), 754–757 [Russ.]; engl. Übers.: *Soviet Math. Dokl.* 9 (1968), 1191–1194 (1969). b.) *Einige Extremalaufgaben für konforme und quasikonforme Abbildungen*, *Sibirsk. mat. Ž.* 12 (1971), 760–784 [Russ.]; engl. Übers.: *Siber. math. J.* 12 (1971), 541–559 (1972).
- [10] —, a.) *Variationsmethoden in der Theorie der quasikonformen Abbildungen*, Novosibirsk 1974 [Russ.]. b.) *Quasikonforme Abbildungen und Riemannsche Flächen*, Novosibirsk 1975 [Russ.].
- [11] R. KÜHNAU, *Quasikonforme Abbildungen und Extremalprobleme bei Feldern in inhomogenen Medien*, *J. reine angew. Math.* 231 (1968), 101–113.
- [12] —, *Wertannahmeprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung*, *Math. Nachr.* 40 (1969), 1–11.
- [13] —, *Verzerrungssätze und Koeffizientenbedingungen vom GRUNSKYschen Typ für quasikonforme Abbildungen*, *Math. Nachr.* 48 (1971), 77–105.
- [14] —, *Zur analytischen Darstellung gewisser Extremalfunktionen der quasikonformen Abbildung*, *Math. Nachr.* 60 (1974), 53–62.
- [15] —, *Eine Integralgleichung in der Theorie der quasikonformen Abbildungen*, *Math. Nachr.* 76 (1977), 139–152.
- [16] —, *GAUSS-THOMSONsches Prinzip minimaler Energie, verallgemeinerte transfinite Durchmesser und quasikonforme Abbildungen*, *Proc. III Romanian-Finnish Seminar on Complex Analysis*.
- [17] —, *Die Spanne von Gebieten bei quasikonformen Abbildungen*, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 65 (1977), 299–303.
- [18] R. KÜHNAU und H. BAUMGARTEN, *Die Koeffizientenbedingungen vom GRUNSKYschen Typ für quasikonforme Abbildungen mit längs zweier Kreise springender Dilatationsschranke* (in Vorbereitung).

- [19] R. KÜHNAU und B. THÜRING, *Berechnung einer quasikonformen Extremalfunktion*, Math. Nachr. 79 (1977), 99–113.
- [20] O. LEHTO, *Quasiconformal mappings and singular integrals*, Symposia Math. (Istituto Naz. di Alta Matematica) 18 (1976), 429–453.
- [21] S. VASILACH, *Sur un système d'équations intégral-différentielles du champ électromagnétique dans des milieux excités et au repos*, C. R. Acad. Sci. Paris 255 (1962), 1385–1387.

*Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg,
DDR 40 Halle an der Saale*

Eingegangen den 26. August 1977