

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 53 (1978)

Artikel: Riemannsche Flächen mit grosser Kragenweite.
Autor: Buser, Peter
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-40774>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Riemannsche Flächen mit grosser Kragenweite*

PETER BUSER

Einleitung

Wenn im folgenden von Flächen die Rede ist, so ist immer eine kompakte Riemannsche Fläche F vom Geschlecht $g \geq 2$ gemeint. Auf dieser gibt es genau eine mit der konformen Struktur verträgliche Metrik der konstanten Krümmung $K = -1$. Alle Grössen wie die Distanzfunktion $d(p, q)$, die Weglänge $l(\gamma)$, das Lebesguemass $\text{vol } D$ usw. beziehen sich stets auf diese Metrik.

Unter der *Kragenweite* $\mu(F)$ verstehen wir die Länge der kürzesten nicht konstanten geschlossenen Geodätischen auf F . Flächen mit grosser Kragenweite haben ein interessantes Verhalten in Bezug auf das Spektrum des Laplace-Beltrami-Operators $\Delta_F = -\text{div grad}$: Bezeichnet $A_F(x)$ die Anzahl der Eigenwerte im Intervall $(0, x)$, gezählt mit ihren Vielfachheiten, so hat H. Huber entdeckt, dass das Verhältnis $A_F(\frac{1}{4} + \varepsilon)/A_F(\frac{1}{4})$ für jedes $\varepsilon > 0$ beliebig gross wird, sobald nur $\mu(F)$ hinreichend gross ist [4]. Dabei gibt es nach Randol [7] zu jedem $l > 0$ Flächen mit $\mu(F) \geq l$ und beliebig vielen Eigenwerten in $(0, \frac{1}{4})$, sofern es überhaupt eine Fläche mit $\mu(F) \geq l$ gibt. Huber hat aber in [4] die Existenz solcher Flächen mit Hilfe einer zahlentheoretischen Ueberlegung sichergestellt. Dennoch kann man sich kompakte Flächen mit grossem $\mu(F)$ gerade wegen der Bedingung $K = -1$ nur schwer vorstellen, und man gewinnt in [4] den Eindruck, dass diese eher eine Besonderheit darstellen. Das tun sie nicht: In der vorliegenden Note konstruieren wir Beispiele auf mehr geometrischem Wege, um den folgenden Satz zu zeigen:

Für alle $l > 0$ und für alle natürlichen $g > e^{l^2/4}$ gibt es eine kompakte Riemannsche Fläche F vom Geschlecht g mit $\mu(F) = l$. (A)

Es gibt also viele Flächen mit grosser Kragenweite. Dies trifft aber noch in einer anderen Hinsicht zu: Es sei F_0 eine vorgegebene Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$. Die Menge T_g aller sogenannten markierten Riemannschen Flächen vom

* Diese Arbeit wurde im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 40 Theoretische Mathematik geschrieben.

selben Geschlecht g bildet bekanntlich einen dem R^{6g-6} homöomorphen metrischen Raum, den *Teichmüllerraum* [1]. Wir werden zeigen, dass die Abbildung $F \mapsto \mu(F)$ auf T_g stetig ist; genauer gilt für je zwei Flächen $F, F_0 \in T_g$:

$$|\mu(F) - \mu(F_0)| \leq (e^{\rho(F, F_0)} - 1) \mu(F_0). \quad (\text{B})$$

Dabei ist ρ die Abstandsfunktion im Teichmüllerraum (siehe Abschnitt 4). Besitzt nun F_0 eine grosse Kragenweite, so auch alle Flächen in einer Umgebung von F_0 .

Das Geschlecht in (A) ist recht gross. Bezeichnen wir mit $g = g_{\min}(l)$ das kleinste Geschlecht, das eine Fläche mit Kragenweite l haben kann, so lässt sich sofort eine untere Schranke für $g_{\min}(l)$ angeben: Da l gleich dem doppelten Injektivitätsradius ist, ist für einen beliebigen Punkt $p \in F$ die Kreisumgebung $U = \{q \in F \mid d(q, p) < l/2\}$ homöomorph zum Einheitskreis der Ebene. Folglich ist $4\pi(g-1) = \text{vol } F > \text{vol } U = 2\pi \int_0^{l/2} \sinh t \, dt$. Das liefert zusammen mit (A) die beiden Ungleichungen

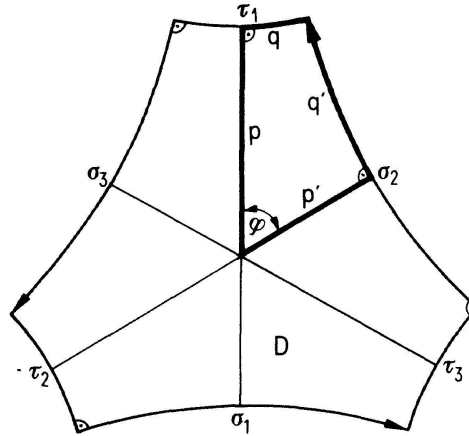
$$\frac{1}{4}e^{l/2} < g_{\min}(l) \leq 1 + e^{l^2/4}. \quad (\text{C})$$

Im Beweis von (A) wird wesentlich ein Resultat von P. Erdős über kubische Graphen benutzt [2]. Im Beweis von (B) verwenden wir einen Verzerrungssatz von Hersch [3] für quasikonforme Abbildungen. Der Zusammenhang zwischen den Riemannschen Flächen und der Graphentheorie wird im ersten Abschnitt hergestellt.

1. Y-Stücke und kubische Graphen

Als erstes konstruieren wir zu jedem $l > 0$ eine gewisse Standardfläche $Y(l)$ der Signatur $(0, 3)$; das ist eine kompakte berandete Fläche, die entsteht, wenn man aus der Sphäre S^2 das Innere von drei disjunkten abgeschlossenen Kreisscheiben entfernt. $Y(l)$ soll so mit einer Metrik der konstanten Krümmung $K = -1$ versehen werden, dass die Ränder Geodätische der Länge l sind. Zu diesem Zweck betrachten wir ein in der hyperbolischen Ebene H liegendes kompaktes rechtwinkliges geodätisches Sechseck D , von welchem drei paarweise disjunkte Seiten $\sigma_i: [0, 1] \rightarrow H$ die Länge $l/2$ haben sollen. Die σ_i umlaufen D im positiven Sinne (Figur 1).

Die Länge des gemeinsamen Lotes $\tau_i: [0, 1] \rightarrow H$ von σ_{i-1} und σ_{i+1} ($i = 1, 2, 3; \text{mod } 3$) lässt sich mit Hilfe der hyperbolischen Trigonometrie ausrechnen: Das Sechseck kann in sechs kongruente Spitzecke $pqq'p'$ (das sind geodätische Vierecke mit drei rechten Winkeln und einem spitzen Winkel φ)



Figur 1

zerlegt werden mit der spitzen Ecke im Schwerpunkt von D . Dabei ist hier $\varphi = \pi/3$ und $q' = l/4$. Für Spitzecke gilt allgemein [6] p. 78:

$$\begin{aligned} \sinh p' &= \cosh p \cdot \sinh q, & \cos \varphi &= \sinh q \cdot \sinh q', \\ \cosh q' &= \cosh p \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

τ_i besitzt die Länge $l(\tau_i) = 2q$. Aus (1) folgt wegen $\varphi = \pi/3$:

$$l(\tau_i) = 2 \operatorname{arsinh} \frac{1}{2 \sinh l/4}. \quad (2)$$

Für den Abstand $d(\sigma_i, \tau_i)$ zweier einander gegenüberliegender Seiten erhält man aus (1)

$$d(\sigma_i, \tau_i) > l/4. \quad (3)$$

Für die Herstellung von $Y(l)$ nimmt man von D noch ein zweites Exemplar D' und identifiziert $\tau_i(t)$ mit $\tau'_i(t)$, $t \in [0, 1]$; $i = 1, 2, 3$. Auf der so hergestellten Fläche $Y(l)$ bilden die drei Koordinatensysteme $\{Y_i, \phi_i\}$ einen differenzierbaren Atlas, in welchem sogar alle Ueberlappingsabbildungen lokale Isometrien sind, wenn $Y_i = Y(l) - (\tau_{i-1} \cup \tau_{i+1})$ gesetzt wird, und wenn $\phi_i|_D = id$, $\phi_i|_{D'} =$ Spiegelung von H an der Geodätischen τ_i bedeutet. Folglich lässt sich die Metrik von H mittels dieser Karten auf $Y(l)$ übertragen. Man erhält $K = -1$. Die Ränder

$$\gamma_i(t) = \begin{cases} \sigma_i(2t) & , \text{ wenn } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sigma'_i(2-2t) & , \text{ wenn } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3)$$

sind Geodätische der Länge l .

Mehrere Exemplare von $Y(l)$ können *nach dem Muster eines vorgegebenen Graphen zusammengesetzt* werden: Es gelten folgende Bezeichnungen: $|G|$ ist die Anzahl der Knotenpunkte des Graphen G . Jede die beiden Knoten x und y verbindende Kante (x, y) denke man sich aus einer von x und aus einer von y ausgehenden *Halbkante* zusammengesetzt. Die *Valenz* $v(x)$ eines Knotens x ist die Anzahl der von x ausgehenden Halbkanten. G heisst regulär vom Grad r , wenn $v(x) = r$ für alle x . Ein zusammenhängender regulärer Graph vom Grad 3 heisst *kubisch*. Die *Länge* eines Weges in G ist die Anzahl seiner Kanten. Der *Abstand* $\delta(x, y)$ ist die Länge des kürzesten Weges, der x mit y verbindet. Ein *Kreis* ist ein einfachgeschlossener Weg ohne Doppelpunkte. Endlich versteht man unter der *Tailenweite* $T(G)$ von G die Länge des kürzesten Kreises in G , sofern G überhaupt Kreise besitzt.

Es sei nun $g \geq 2$ und G ein (zusammenhängender) kubischer Graph mit den Knotenpunkten y_k , $k = 1, \dots, 2g-2$. Von jedem y_k gehen die Halbkanten $c_{k,i}$ aus; $i = 1, 2, 3$. Von $Y(l)$ wählt man lauter identische Exemplare Y_k ; $k = 1, \dots, 2g-2$, mit den Rändern $\gamma_{k,i}$; $i = 1, 2, 3$. Sind nun $c_{k,i}$ und $c_{l,j}$ zwei Halbkanten, die zusammen eine Kante des Graphen bilden, so verklebt man Y_k mit Y_l entlang der Ränder $\gamma_{k,i}$ und $\gamma_{l,j}$ durch die Identifikation

$$\gamma_{k,i}(t) = \gamma_{l,j}(\alpha - t). \quad (4)$$

Dabei sind die Randkurven der Y -Stücke auf \mathbf{R} periodisch fortgesetzt gedacht. $\alpha \in \mathbf{R}$ ist ein Parameter. Damit in (4) kein Streit entsteht, wer umparametrisiert werden muss, kann man verabreden, dass (k, i) in der lexikographischen Ordnung vor (l, j) kommt. Auf diese Weise erhält man zunächst eine differenzierbare orientierbare kompakte Fläche F vom Geschlecht g . Es ist aber leicht einzusehen, dass es auf F einen Masstensor gibt, der auf allen Y_k mit dem dort bereits definierten übereinstimmt. Mit diesem Masstensor versehen wird F zu einer Riemannschen Fläche. Die $\gamma_{k,i}$ kann man als Wege in F auffassen; sie sind geschlossene Geodätische der Länge l , wir bezeichnen sie als *Nahtstellen*. Jeder Naht von F ist in natürlicher Weise eine Kante des Graphen zugeordnet und umgekehrt.

2. Graphen mit grosser Tailenweite

Die Herstellung von Flächen mit grosser Kragenweite beruht nun auf der Existenz von kubischen Graphen mit grossem $T(G)$. Diese wurde erstmals von H. Sachs [8] nachgewiesen. Sachs benötigt Graphen mit einer sehr grossen Anzahl Knoten. P. Erdős gelang es daraufhin, diese beträchtlich herabzudrücken [2]. Wir

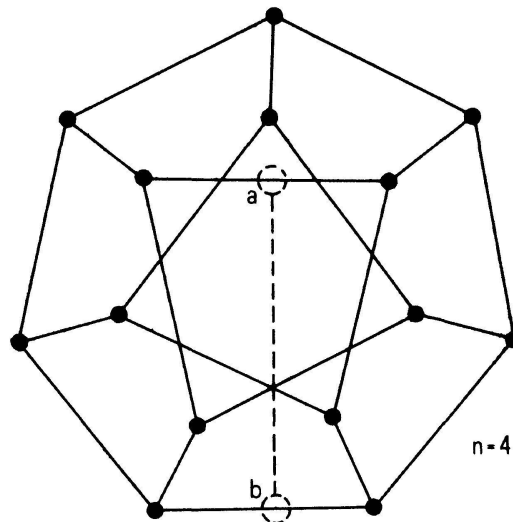
formulieren sein Resultat in einer für unsere Zwecke ausreichenden leicht abgeschwächten Form. Dazu definieren wir für alle $t \in \mathbf{N}$ eine Zahl g_t durch

$$g_t = \begin{cases} 2 & , \quad t = 1, 2 \\ t+1 & , \quad t = 3, 4, 5 \\ 2^t & , \quad t \geq 6. \end{cases} \quad (5)$$

Nun lautet der *Satz von Erdős*:

Für alle $t \in \mathbf{N}$ und für alle $g \geq g_t$ gibt es einen kubischen Graphen G mit $|G| = 2g - 2$ Knotenpunkten und Taillenweite $T(G) \geq t$. (6)

Beweis. Für $t \leq 4$ findet man sofort Beispiele. Wie man solche für $t = 5$ herstellen kann, zeigt Figur 2, und zwar zunächst



Figur 2

für $g = 2n$ ($n \geq 3$) nach dem durchgezogenen Teil der Figur (im inneren $(2n-1)$ -Eck wird immer ein Knoten übersprungen); aber dann auch für $g = 2n+1$, indem man jeweils noch die Knoten a, b und die Kante (a, b) hinzufügt.

Nun sei $t \geq 6$. Man beginnt mit einem Kreis von $2g-2 \geq 2^{t+1}-2$ Knoten, also mit einem zusammenhängenden regulären Graphen G vom Grad 2. Dieser besitzt eine Taillenweite $2^{t+1}-2 > t$. Die Anzahl Kanten in G wird schrittweise erhöht, bis schliesslich jeder Knoten die Valenz 3 besitzt, ohne dass je die Taillenweite kleiner als t wird. Wir nehmen jetzt an, G sei noch nicht kubisch. Für den Beweis von (6) genügt es zu zeigen, dass man die Kantenzahl um eins erhöhen kann, ohne die Bedingung $T(G) \geq t$ zu verletzen. Dazu bemerken wir, dass es mindestens zwei Knoten x und y gibt, für die $v(x) = v(y) = 2$, denn allgemein ist die Anzahl der Knoten mit ungerader Valenz in einem Graphen immer gerade, und G besitzt eine gerade Anzahl Knoten.

Wenn $\delta(x, y) \geq t-1$, so füge man die Kante (x, y) zu, dadurch kann kein Kreis kürzer als t entstehen. Sei nun $\delta(x, y) \leq t-2$. Die Menge A aller Knoten z mit $\delta(x, z) \leq t-2$ und $\delta(y, z) \leq t-2$ besteht aus höchstens $2 \sum_{i=0}^{t-2} 2^i = g_t - 2 < g-1$ Knoten. Jeder davon kann höchstens mit zwei Knoten ausserhalb A verbunden sein. Von jedem Knoten ausserhalb A gehen aber mindestens zwei Halbkanten aus, sodass auf jeden Fall zwei nicht in A liegende Knoten \bar{x}, \bar{y} bereits durch eine Kante verbunden sind. G' sei der Graph, der aus G durch Löschen der Kante (\bar{x}, \bar{y}) entsteht. G'' wird gebildet, indem man in G' die beiden (noch nicht vorhandenen) Kanten (x, \bar{x}) und (y, \bar{y}) hinzufügt. Es muss noch gezeigt werden, dass $T(G'') \geq t$: Aus $T(G) \geq t$ folgt $\delta(\bar{x}, \bar{y}) \geq t-1$ in G' , und aus $\bar{x}, \bar{y} \notin A$ folgt $\delta(x, \bar{x}) \geq t-1$, $\delta(y, \bar{y}) \geq t-1$. Ein Kreis K in G'' , der schon in G vorhanden ist, hat eine Länge $\geq t$. Wenn K kein Kreis von G ist, so sei etwa (x, \bar{x}) eine Kante von K . Dann gibt es einen Teilweg W von K , der weder (x, \bar{x}) noch (y, \bar{y}) enthält, aber \bar{x} mit einem der Knoten x, y, \bar{y} verbindet. W gehört auch zu G' , also besitzt W eine Länge $\geq t-1$. Jeder Kreis in G'' besitzt demnach eine Länge $\geq t$, q.e.d.

3. Beweis von (A)

Es sei $m = m(l)$ die natürliche Zahl

$$m = m(l) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 < l \leq 2 \\ 2, & \text{wenn } 2 < l \leq 11 \\ \left\lceil \frac{5l}{18} \right\rceil, & \text{wenn } l > 11, \end{cases} \quad (7)$$

wobei das Klammersymbol die Bedeutung $[x] = \max \{z \in \mathbf{Z} \mid z \leq x\}$ hat. Weiter bezeichnet $a(l)$ die nur stückweise stetige Funktion

$$a(l) = \begin{cases} l, & \text{wenn } 0 < l \leq 2 \\ \operatorname{arsinh} \left\{ \frac{1}{2 \sinh l/8} \right\}, & \text{wenn } 2 < l \leq 11 \\ \frac{2}{m} \operatorname{arsinh} e^{-l/4m}, & \text{wenn } l > 11, \end{cases} \quad (8)$$

und schliesslich $t = t(l)$ die natürliche Zahl

$$t = t(l) = \left\lceil \frac{l}{a(l)} \right\rceil + 1. \quad (9)$$

Dann gilt für die in (5) eingeführte Funktion g_t die Ungleichung

$$g_t \leq 1 + [e^{l^2/4}]. \quad (10)$$

Beweis. Für $0 < l < \frac{12}{5}$ ist die Behauptung klar, da in diesem Fall $t = 2$. Wenn $\frac{12}{5} \leq l \leq 4$, ist sogar $t + 1 \leq 2 + l/a(l) = 2 + l \operatorname{arsinh}^{-1} \{1/(2 \sinh \frac{1}{8}l)\} < e^{l^2/4}$, wie man leicht bestätigt. Um $l \in (4, 11]$ zu betrachten, kann man

$$\alpha_n = (4n \ln 2)^{1/2} \quad (n = 5, \dots, 44)$$

setzen und nachrechnen, dass für diese n

$$t(\alpha_{n+1}) \leq n. \quad (11)$$

In den Intervallen $[\alpha_n, \alpha_{n+1}] \cap (0, 11]$ ist $t(l)$ monoton wachsend. Man erhält deshalb wegen (11) die Folge von Ungleichungen $g_t \leq 2^t \leq 2^{t(\alpha_{n+1})} \leq 2^n = e^{\alpha_n^2/4} \leq e^{l^2/4}$. Da nun $\alpha_5 < 4$ und $\alpha_{44} > 11$, ist damit (10) für $l \in (0, 11]$ bewiesen.

Für $l > 11$ beachten wir zunächst, dass die Funktion

$$\Psi(x) := 2x \operatorname{arsinh} e^{-x/2}$$

in $(0, \infty)$ genau ein relatives Extremum besitzt: Ist nämlich $y = \operatorname{arsinh} e^{-x/2}$, so ist $\Psi(x) = X(y)$ mit $X(y) = -4y \ln \sinh y$, $y \in (0, \operatorname{arsinh} 1)$. Wegen $X''(y) = -8 \operatorname{ctgh} y + 4y \sinh^{-2} y < -4 \operatorname{ctgh} y < 0$ und wegen $\lim_{y \downarrow 0} X(y) = 0 = X(\operatorname{arsinh} 1)$, besitzt X genau ein relatives Extremum, dieses ist ein Maximum. Dasselbe muss für Ψ gelten wegen der Monotonie von $y = y(x)$. Weiter ist $\Psi(\frac{9}{5}) > \Psi(\frac{12}{5}) = 1.424 \dots$. Es gilt deshalb

$$\Psi(x) > \beta := 1.424, \quad x \in [\frac{9}{5}, \frac{12}{5}]. \quad (12)$$

Nach Definition von m ist $l/2m \geq \frac{9}{5}$ und $l/2(m+1) < \frac{9}{5}$. Es gilt aber auch $l/2m \leq \frac{12}{5}$, denn andernfalls folgte zunächst $m \leq 2$ und daraus $l < \frac{54}{5}$, obwohl $l > 11$ vorausgesetzt ist. Somit ist (12) auf $x = l/2m$ anwendbar, und es folgt $la(l) = 2\Psi(l/2m) > 2\beta$. Wegen $l > 11$ und $121(1 - (2 \ln 2)/\beta) > 4 \cdot \ln 2$ erhält man daraus $(1 + l/a(l)) \cdot \ln 2 < l^2/4$ für $l > 11$, womit nun (10) für alle l bewiesen ist.

Es sei nun $l > 0$, $g \geq g_t$ fest vorgegeben und G ein kubischer Graph der Taillenweite $T(G) \geq t$ mit $2g - 2$ Knotenpunkten (siehe (6)). Von $Y(l)$ werden $2g - 2$ Exemplare anhand von G zu einer Riemannschen Fläche F vom Geschlecht g zusammengesetzt. Für den Parameter α in (4) soll dabei gelten

$$\alpha = \pi/m(l). \quad (13)$$

Für den Beweis von (A) genügt es wegen (10) zu zeigen, dass $\mu(F) = l$. Da die Nahtstellen geschlossene Geodätische der Länge l sind, genügt es weiterhin zu zeigen, dass keine weitere geschlossene Geodätische σ eine kürzeste solche sein kann. Um den Verlauf von σ zu verfolgen, werden wir ein paar mal die hyperbolische Ebene H zusammen mit einer festen längentreuen Ueberlagerungsabbildung $H \mapsto F$ heranziehen.

Besitzt σ Doppelpunkte, so kann σ nicht am kürzesten sein, denn σ besitzt in diesem Fall ein nicht nullhomotopes geschlossenes Teilsegment, in dessen freier Homotopieklasse sich eine kürzere geschlossene Geodätische als σ befindet. Von nun an sei σ ohne Doppelpunkte vorausgesetzt. Dann kann σ nicht auf einem einzigen Y -Stück verlaufen, da sonst σ einer Naht gleich wäre, was wir bereits ausgeschlossen haben. Man findet deshalb eine Folge $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ und eine zugehörige Folge von Nahtstellen $\gamma_0, \dots, \gamma_n = \gamma_0$ (wo einzelne auch mehrfach auftreten können), die so beschaffen sind, dass $\sigma(t_\nu) \in \gamma_\nu$ ($\nu = 0, \dots, n$) und so, dass σ keine weiteren Nahtstellen überquert; dh. jedes Segment $\sigma_\nu := \sigma|_{[t_{\nu-1}, t_\nu]}$ verläuft jeweils auf einem einzigen Y -Stück, das wir mit Y_ν bezeichnen. Auch hier können einzelne Y -Stücke mehrfach auftreten.

Wenn es vorkommt, dass $\gamma_{\nu-1} = \gamma_\nu$, so überquert σ_ν das gemeinsame Lot τ der beiden von γ_ν verschiedenen Ränder von Y_ν . Das folgt daraus, dass die Krümmung auf Y_ν negativ, σ_ν Geodätische ist, und dass wegen $t \geq 2$ keine zwei Ränder von Y_ν miteinander verheftet worden sind. Aus (3) erhält man $l(\sigma_\nu) > l/2$. Ersetzt man σ_ν durch den kürzeren der beiden Teilbogen von γ_ν , welche die beiden Punkte $\sigma(t_{\nu-1})$ und $\sigma(t_\nu)$ miteinander verbinden, so entsteht eine gebrochene Geodätische σ^1 , die nicht null-homotop sein kann, da sonst σ' als Ueberlagerungsweg ein geodätisches Zweieck in H besitzen würde. In der freien Homotopieklasse von σ' befindet sich eine geschlossene Geodätische, die wiederum kürzer ist als σ .

Von nun an können wir annehmen, dass $\gamma_{\nu-1} \neq \gamma_\nu$ für alle ν . Bezeichnet s_ν die der Naht γ_ν zugeordnete Kante des Graphen G , und durchläuft man diese Kanten der Reihe nach von $\nu = 1$ bis $\nu = n$, so entsteht ein Kantenzug s , in welchem $s_{\nu-1} \neq s_\nu$ für alle ν . Deshalb enthält s einen Kreis, dessen Länge nicht kleiner sein kann als die Taillenweite t des Graphen. Also gilt für die Anzahl n der Segmente σ_ν von σ

$$n \geq t. \quad (14)$$

Wir zeigen, dass unter den verbleibenden Umständen

$$l(\sigma) > l, \quad (15)$$

womit dann (A) bewiesen sein wird. Für den Beweis von (15) wird es genügen, wenn wir zeigen, dass für je $m = m(l)$ aufeinanderfolgende Segmente (siehe (7)), also o.B.d.A. für $\sigma_1, \dots, \sigma_m$

$$\sum_{\nu=1}^m l(\sigma_\nu) > ma(l), \quad (16)$$

denn durchläuft man σ m mal, so legt man einen Weg der Länge $ml(\sigma)$ zurück, der nach (14) aus mindestens t m -Tupeln von aufeinanderfolgenden Segmenten zusammengesetzt ist, wobei jedes solche m -Tupel eine Länge $> m a(l)$ besitzt. Es folgt mit (9) $l(\sigma) > t a(l) \geq l$.

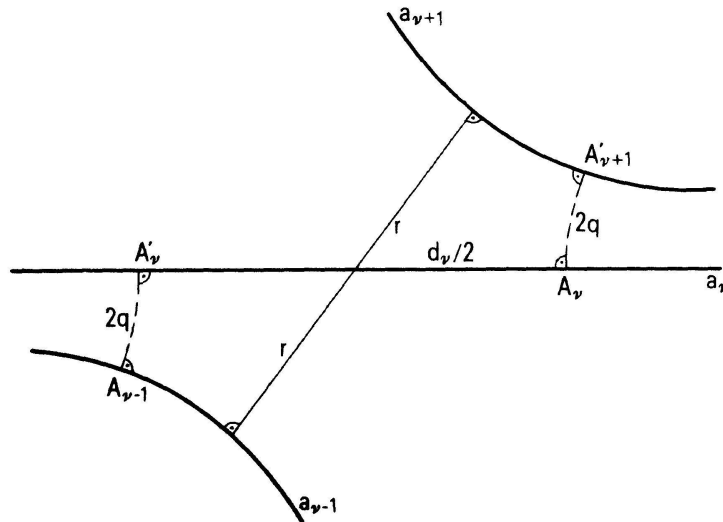
Zum Beweis von (16) betrachten wir zuerst den Fall $l \leq 2$. Nach (2) sind je zwei Ränder von $Y(l)$ um den Betrag $2q$ voneinander entfernt mit $\sinh q \cdot \sinh l/4 = \frac{1}{2}$. Wegen $l \leq 2 < 4$ $\operatorname{arsinh} \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist $l/4 < q$, also ist $\sigma_1 > l/2$, wie behauptet. Von nun an sei $l > 2$: Es bezeichnet $\tilde{\sigma}: [t_0, t_m] \rightarrow H$ einen Ueberlagerungsweg von $\sigma|_{[t_0, t_m]}$. Weiter seien a_ν die durch $\tilde{\sigma}(t_\nu) \in a_\nu$ ($\nu = 0, \dots, m$) eindeutig definierten Ueberlagerungswege der γ_ν . Da σ_ν doppeltpunktfrei ist, gibt es eine Homotopie auf Y_ν , welche σ_ν in das gemeinsame Lot von $\gamma_{\nu-1}$ und γ_ν überführt, wobei Anfangs- und Endpunkt auf den Rändern von Y_ν frei beweglich sind, diese aber nie verlassen. Die Homotopie kann man in die Ueberlagerungsebene H liften. Also ist der Abstand von $a_{\nu-1}$ zu a_ν gleich $2q$ (siehe (2)).

A_ν sei der auf a_ν liegende, $A'_{\nu+1}$ der auf $a_{\nu+1}$ liegende Fusspunkt des gemeinsamen Lotes von a_ν und $a_{\nu+1}$ ($\nu = 0, \dots, m-1$). H wird durch die Verlängerung von $\tilde{\sigma}$ in eine linke und in eine rechte Halbebene zerlegt. Wir parametrisieren die a_ν in der Form $t \rightarrow \alpha t + \beta$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so um, dass $\|\dot{a}_\nu\| = 1$, dass alle a_ν von links nach rechts laufen und so, dass $a_\nu(0) = A_\nu$. Dann ist wegen (4) und (13)

$$A'_\nu = a_\nu \left(s_\nu \frac{l}{2} - \frac{l}{2m} \right) \quad \text{mit einem } s_\nu \in \mathbb{Z}.$$

Nehmen wir zuerst an, dass nicht alle s_ν gleich null sind. In diesem Fall ist der Abstand d_ν von A'_ν und A_ν grösser oder gleich $((l/2) - (l/2m))$, und das gemeinsame Lot von $a_{\nu-1}$ und $a_{\nu+1}$ besitzt eine Länge $2r$ (Figur 3), wobei nach (1) und (2) $\sinh r = \cosh d/2 \sinh 2q > 2 \cosh d_\nu/2 \sinh q \geq \cosh ((l/4) - (l/4m))/\sinh l/4$. Hier gilt also schon $l(\sigma_\nu) + l(\sigma_{\nu+1}) \geq 2r > m a(l)$.

Es verbleibt noch der Fall, dass alle $s_\nu = 0$. Hier fällen wir das gemeinsame Lot von a_0 nach a_m und betrachten dessen Mittelpunkt M . Um den Abstand von M nach a_m abzuschätzen, betrachten wir zuerst folgende allgemeine Situation



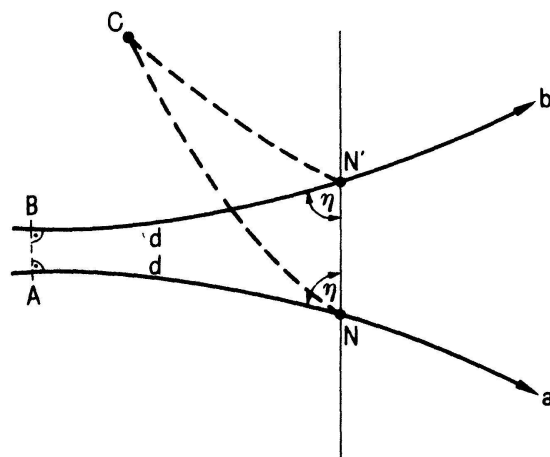
Figur 3

(Figur 4): a, b zwei nach rechts laufende Geodätische in H . $A \in a$ und $B \in b$ die beiden Fusspunkte des gemeinsamen Lotes von a nach b . $N \in a$ liege rechts im Abstand d von A , N' liege rechts im selben Abstand d von B auf b . C ein Punkt in der A nicht enthaltenden Halbebene von $H - b$. Dann gilt

$$d(C, N') < d(C, N), \quad (17)$$

wie man sich anhand der Figur 4 aus den Symmetrieeigenschaften und der negativen Krümmung von H sofort klar macht.

Für die Punkte $M_k := a_k(-(l/4m)(2k - m + 1))$, $k = [(m/2)] + 1, \dots, m - 1$ gilt auf Grund von (17) $d(M, a_m) \geq d(M_{[(m/2)]+1}, a_m) \cdots \geq d(M_{m-1}, a_m) := \bar{r}$. Wegen $d(M_{m-1}, A_{m-1}) = l/4 - l/4m$ erhält man wie vorhin $2\bar{r} > m a(l)$, also ebenfalls $l(\sigma|_{[t_0, t_m]}) \geq 2d(M, a_m) > m a(l)$, womit (16) und dadurch (A) bewiesen ist.



Figur 4

4. Beweis von (B)

Aus der Teichmüllertheorie ist folgendes bekannt [1]: Es sei M eine kompakte orientierte topologische Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$. Zwei konforme Strukturen auf M heissen *markierungs-äquivalent*, wenn es einen zur Identität homotopen Homöomorphismus von M in sich gibt, der die beiden Strukturen ineinander überführt. M zusammen mit einer solchen Äquivalenzklasse konformer Strukturen heisst eine markierte Fläche; diese bilden den Teichmüllerraum T_g . Es gilt: 1) Zu $F, F_0 \in T_g$ gibt es genau eine K -quasikonforme Abbildung $\phi: F \rightarrow F_0$ mit minimalem $K = K(F, F_0) \geq 1$. 2) Mit der Distanzfunktion $\rho(F, F_0) = \ln K(F, F_0)$ wird T_g ein zu \mathbf{R}^{6g-6} homöomorpher metrischer Raum.

Zum Beweis von (B) sei $\delta > 1$; $F, F_0 \in T_g$ mit $\rho(F, F_0) < \ln \delta$. Dann gibt es eine K -quasikonforme Abbildung $\phi: F \rightarrow F_0$ mit $1 \leq K < \delta$. Bezüglich zwei konformer Ueberlagerungsabbildungen $\pi: H \rightarrow F$ und $\pi_0: H \rightarrow F_0$ lässt sich ϕ zu einer K -quasikonformen Abbildung $\tilde{\phi}: H \rightarrow H$ so heben, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & H \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi_0 \\ F & \xrightarrow{\phi} & F_0 \end{array}$$

kommutativ ist. $\tilde{\phi}$ braucht nicht überall differenzierbar zu sein, und dort, wo eine Differentialabbildung $\tilde{\phi}_*$ existiert, kann das Verhältnis $\|\tilde{\phi}_* X\|/\|X\|$, $X \in TH$ beliebig gross werden, sodass man über die Längen eines Weges und seines Bildes unter $\tilde{\phi}$ i.A. nichts aussagen kann. Aber es gibt Verzerrungssätze:

Ist $E = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ und $f: E \rightarrow E$ K -quasikonform mit $f(0) = 0$, so gilt die folgende Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemmas [3] oder [5] pp. 66 und 67:

$$|f(z)| \leq \nu^{-1} \left(\frac{1}{K} \nu(|z|) \right), \quad z \in E - \{0\},$$

wobei $\nu: (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ eine stetige monoton fallende Funktion ist mit dem asymptotischen Verhalten

$$\nu(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{4}{r} + o(r^2), & \text{für } r \rightarrow 0 \\ \frac{\pi/4}{\ln(8/(1-r))} + o(1-r), & \text{für } r \rightarrow 1. \end{cases}$$

Fasst man nun $\tilde{\phi}$ als Abbildung von $E \rightarrow E$ auf, E versehen mit der hyperbolischen Metrik $ds^2 = 4|dz|^2/(1-|z|^2)^2$, so folgt hieraus für den Abstand zweier Punkte

$$d(\tilde{\phi}(p), \tilde{\phi}(q)) \leq K d(p, q) + 0(1). \quad (18)$$

Es sei $\sigma: [0, 1] \rightarrow F$ eine kürzeste geschlossene Geodätische, dh. es ist $\mu(F) = l(\sigma)$. Da $\phi \circ \sigma$ nicht nullhomotop ist, gibt es eine geschlossene Geodätische $\sigma_0: [0, 1] \rightarrow F_0$, die zu $\phi \circ \sigma$ frei homotop ist. Bezeichnet $\tilde{\sigma}$ mit $\pi \circ \tilde{\sigma} = \sigma$ einen Ueberlagerungsweg von σ , so ist $\tilde{\phi} \circ \tilde{\sigma}$ Ueberlagerungsweg von $\phi \circ \sigma$ bezüglich π_0 , und es gibt einen Ueberlagerungsweg $\tilde{\sigma}_0$ von σ_0 derart, dass

$$d(\tilde{\sigma}_0(n), \tilde{\phi} \circ \tilde{\sigma}(n)) = d(\sigma_0(0), \phi(\sigma(0))) := d$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen (18) ist

$$\begin{aligned} n\mu(F_0) &\leq nl(\sigma_0) = d(\tilde{\sigma}_0(0), \tilde{\sigma}_0(n)) \\ &\leq d(\tilde{\phi} \circ \tilde{\sigma}(0), \tilde{\phi} \circ \tilde{\sigma}(n)) + 2d \\ &\leq K d(\tilde{\sigma}(0), \tilde{\sigma}(n)) + 0(1) + 2d \\ &= nKl(\sigma) + 0(1) = nK\mu(F) + 0(1), \end{aligned}$$

also

$$\mu(F_0) \leq K\mu(F) + 0(1/n).$$

Mit $n \rightarrow \infty$ folgt

$$\mu(F) \geq \frac{1}{K} \mu(F_0) > \frac{1}{\delta} \mu(F_0).$$

Indem man die Rollen von F und F_0 vertauscht erhält man aus dieser letzten Ungleichung die Behauptung (B) unmittelbar.

LITERATUR

- [1] BERS L., *Quasiconformal mappings and Teichmüller's theorem*, in *Analytic Functions*, Princeton 1960.
- [2] ERDÖS P., SACHS H., *Reguläre Graphen gegebener Tailenweite mit minimaler Knotenzahl*, *Wiss. Z. Univ. Halle-Wittenberg, Math. - Nat. R.* 12 (1963), 251-258.
- [3] HERSCH J., *Contribution à la théorie des fonctions pseudo-analytiques*, *Comment. Math. Helv.* 30 (1955), 1-19.

- [4] HUBER H., *Ueber die Eigenwerte des Laplace – Operators auf kompakten Riemannschen Flächen*, Comment. Math. Helv. 51 (1976), 215–231.
- [5] LEHTO O., VIRTANEN K. I., *Quasikonforme Abbildungen*, Berlin Springer 1965.
- [6] PERRON O., *Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene*, Stuttgart Teubner 1962.
- [7] RANDOL B., *Small eigenvalues of the Laplace operator on compact Riemann surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1972), 996–1000.
- [8] SACHS H., *Regular graphs with given girth and restricted circuits*, J. London Math. Soc. 38 (1963), 423–429.

Eingegangen den 10. August 1977.