Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 53 (1978)

Artikel: Le genre d'un groupe nilpotent avec opérateurs.
Autor: Cassidy, Charles
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40772

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici **53** (1978) 364–384 Birkhäuser Verlag, Basel

Le genre d'un groupe nilpotent avec opérateurs

CHARLES CASSIDY*

Au cours des dernières années, Pickel [13] et Mislin [12] ont introduit une notion de "genre" pour un groupe nilpotent de type fini N. De façon précise, le genre de N selon Pickel (que nous noterons ici $G_P(N)$) désigne l'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes M tels que les quotients finis de M et N coïncident et tels que les rationalisations M_0 et N_0 de M et N respectivement soient isomorphes. Pickel démontre que cet ensemble est toujours fini. Par ailleurs, Mislin appelle le genre d'un tel groupe (désigné ici par $G_M(N)$) l'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes M tels que $M_p \simeq N_p$ pour tout premier p (si G est un groupe nilpotent, on désigne par G_p la localisation de G en p, voir par exemple [2], [15] et [17]). Ces deux notions de genre quoique très voisines ne coïncident pas; Warfield [16] indique que si $M \in G_M(N)$ alors $M \in G_P(N)$; par ailleurs, Belfi et Wilkerson [1] ont montré que la réciproque n'est pas vraie en général; cependant, dans la catégorie $\mathcal{N}_0$ des groupes nilpotents de type fini dont le sous-groupe des commutateurs est fini, les deux notions de genre coïncident ([9], [16]).

Le travail de Mislin [12] a été essentiellement consacré à l'étude du genre dans la catégorie $\mathcal{N}_0$. Mislin y démontre que quoique $G_M(N)$ est toujours fini ($N \in \mathcal{N}_0$), il peut être arbitrairement grand; ses exemples sont remarquables. Il démontre aussi que le genre est étroitement relié à des phénomènes de non-simplification qui apparaissent autant en théorie des groupes qu'en topologie où le genre fut également introduit pour les H-espaces ([6], [7], [10], [11], [18]).

Le concept de genre est cependant intéressant en lui-même. En effet, l'idée de localiser un groupe (ou un espace topologique) en chaque premier p permet de remplacer ce groupe (ou cet espace) par plusieurs autres qui sont plus simples en un certain sens; il est alors parfois possible de résoudre un problème pour chacum de ces nouveaux objets et avec un peu de chance de remonter à l'objet de départ. Cependant la connaissance de tous les localisés d'un groupe N (ou d'un espace X)

---

*Ce travail fut partiellement réalisé alors que l'auteur était en congé de l'Université Laval et se trouvait à l'ETH de Zürich. L'auteur tient à remercier les professeurs P. J. Hilton et G. Mislin pour les nombreux conseils et les suggestions lors de la préparation de ce travail.

en chaque premier p n'entraîne pas en général la connaissance de N (ou de X) comme le montrent les exemples de Milnor (voir [14]) ou de Mislin [12]. Le genre au sens de Mislin est précisément une mesure de l'obstruction à une telle connaissance.

Un problème qui vient immédiatement à l'esprit est celui de la recherche d'invariants pour le genre; en topologie, par exemple, on peut voir que tous les groupes d'homologie et de cohomologie ainsi que les groupes d'homotopie de dimension au moins égale à 2 sont des invariants du genre alors que le groupe fondamental ainsi que l'anneau de cohomologie n'en sont pas; pour les groupes nilpotents, l'appartenance à la catégorie $\mathcal{N}_0$ est un invariant du genre; il en est de même du centre, du sous-groupe des commutateurs et de la classe de nilpotence pour les groupes dans la catégorie $\mathcal{N}_0$ (la classe de nilpotence est même un invariant du genre dans la catégorie $\mathcal{N}$ de tous les groupes nilpotents). C'est notamment en découvrant les bons invariants du genre que Mislin est parvenu à obtenir tous ses résultats.

Il nous a semblé naturel d'introduire ici une définition du genre dans le cas d'un groupe nilpotent N sur lequel opère un groupe Q (nous dirons alors que N est un Q-groupe nilpotent); notre definition est une généralisation de celle de Mislin. On sait que si Q opère sur N, alors Q opère aussi sur tous les localisés N_p; l'action de Q sur N_p n'est que la localisation de l'action de Q sur N (propriété universelle de la localisation, voir [2]). Le problème général est le suivant: que pouvons-nous dire de N comme Q-groupe si nous connaissons tous ses localisés N_p comme Q-groupes? Il n'est pas difficile de voir qu'un Q-isomorphisme $\phi: N \to \bar{N}$ est complètement déterminé par tous ses localisés $\phi_p: N_p \to \bar{N}_p$; la situation est cependant complètement différente en ce qui concerne les objets eux-mêmes: un Q-isomorphisme $\phi: N \to \bar{N}$ détermine des Q-isomorphismes $\phi_p: N_p \to \bar{N}_p$ mais même s'il existe des Q-isomorphismes $\psi_p: N_p \to \bar{N}_p$ pour chaque premier p, on ne peut pas conclure en général qu'il existe un Q-isomorphisme $\psi: N \to \bar{N}$ induisant en même temps tous les ψ_p. Nous introduisons également par la suite une définition du genre pour les Q-groupes qui généralise la définition de Pickel. Dans les deux situations, notre étude se limite au cas où le Q-groupe N est nilpotent de type fini; il faudra d'ailleurs souvent imposer la même condition au groupe Q.

Dans la première partie, nous définissons le "Q-genre" (Mislin) de N que nous notons $QG_M(N)$. Ensuite, nous décrivons une famille de Q-groupes abéliens $\{N(p, m)\}$, où p est un premier impair fixe mais arbitraire et $m = 1, \ldots, (p-1)/2$, qui fournissent des exemples de non-trivialité de QG_M même si G_M est trivial pour les groupes sous-jacents; pour chaque premier p, les groupes $N(p, m)$ sont deux-à-deux isomorphes comme groupes mais non-isomorphes comme Q-groupes. Puis, en prenant les produits croisés $N(p, m) \rtimes Q$, nous obtenons des

groupes nilpotents mais non-abéliens qui sont précisément les exemples de Mislin mais exprimés sous une forme beaucoup plus simple et explicite. Nous identifions ensuite certains invariants du Q-genre qui nous permettent d' obtenir par la suite pour le Q-genre tous les résultats obtenus dans [5] et [12] pour le genre de Mislin; là où Hilton et Mislin devaient supposer que le sous-groupe des commutateurs était fini, il faudra supposer dans notre situation qu'un certain sous-groupe noté $\Gamma_Q^2 N$ est fini. Toutefois, à l'aide des méthodes de [5] et [12], c'est seulement dans le cas où N est abélien que nous réussissons à munir le Q-genre d'une structure de groupe et à obtenir une borne supérieure pour le nombre de ses éléments.

Dans la deuxième partie, nous définissons le Q-genre (Pickel) de N que nous notons $QG_P(N)$ et nous indiquons que les résultats obtenus par Warfield en [16] restent valides avec essentiellement les mêmes démonstrations dans le cas du Q-genre. De plus, en étudiant attentivement l'une des démonstrations de Warfield, nous parvenons à déterminer une borne supérieure pour le nombre d'éléments dans le Q-genre des Q-groupes nilpotents (mais pas nécessairement abéliens) de type fini avec $\Gamma_Q^2 N$ fini; il ne nous a pas semblé possible par contre de munir d'une façon naturelle le Q-genre de tels Q-groupes d'une structure de groupe à l'aide des méthodes de Warfield.

1. Définition du Q-genre (Mislin) et quelques propriétés fondamentales

Etant donné un groupe Q, nous entendons par Q-groupe tout groupe N sur lequel Q opère, c'est-à-dire la donnée d'un groupe N et d'un homomorphisme $\omega : Q \to \operatorname{Aut} N$. Un Q-homomorphisme d'un Q-groupe M dans un Q-groupe N est un homomorphisme de groupes de M dans N qui commute avec les actions de Q sur M et N respectivement. Si nous disons qu'un Q groupe N est de type fini (resp. nilpotent), il faudra toujours comprendre que N est de type fini (resp. nilpotent) en tant que groupe.

Le genre de Mislin est un cas particulier de notre première définition; si l'action de Q sur N est triviale, c'est-à-dire si $\omega(Q) = \text{Identité}$, le Q-genre de N sera précisément le genre de Mislin.

DÉFINITION 1.1. Si N est un Q-groupe nilpotent de type fini, le *Q-genre de N* (Mislin) noté $QG_M(N)$ est la famille des classes d'isomorphisme de Q-groupes nilpotents de type fini M tels que M_p soit Q-isomorphe à N_p pour tour premier p.

Si un groupe Q opère sur un groupe N, on définit [8] la Q-suite centrale descendante de N comme suit:

$$\Gamma_Q^1 N = N, \qquad \Gamma_Q^{i+1} N = \operatorname{gr}\{uv^x u^{-1} v^{-1} \mid u \in N, v \in \Gamma_Q^i N, x \in Q\}, \qquad i \geq 1.$$

Si $\Gamma_Q^{c+1}N=\{1\}$ pour un certain $c\in\mathbf{N}$, on dit que l'action de Q sur N est nilpotente ou que Q opère sur N de façon nilpotente et on écrit $\mathrm{nil}_Q N\leq c$; dans ce cas, le groupe N est nécessairement nilpotent; si de plus, Q est nilpotent, on définit pour chaque p une action de Q_p sur N_p de la façon suivante: on considère l'extension scindée de Q par N qui est alors nilpotente puis, en localisant cette extension, on obtient une extension scindée de Q_p par N_p, ce qui nous permet de définir l'action de Q_p sur N_p. Il est facile de voir que si Q opère sur N de façon nilpotente et si $M\in QG_M(N)$, alors l'action de Q sur M est également nilpotente; cela est dû au fait que $\mathrm{nil}_Q N=\max_p \mathrm{nil}_Q N_p$ (voir [8]); de fait, en utilisant la convention $\mathrm{nil}_Q N=\infty$ si $\Gamma_Q^i N\neq\{1\}$ pour tout $i\in\mathbf{N}$, on voit que $\mathrm{nil}_Q N$ est un invariant du Q-genre. Tout cela suggère une autre définition du Q-genre pour de tels Q-groupes; on dit que $M\in QG'_M(N)$ si et seulement si $M_p\overset{Q_p}{\simeq}N_p$ pour tout premier p; il découle immédiatement de [3] ((3.9) et théorème 3) ainsi que de ce qui précède que cette définition est équivalente à la définition 1.1 pour les Q-groupes sur lesquels l'action est nilpotente.

Nous décrivons maintenant pour chaque premier impair p fixe mais arbitraire une famille de Q-groupes qui montre que $QG_M(N)$ peut être non-trivial même si $G_M(N)$ est trivial. Tous les groupes considérés sont abéliens de type fini et on sait que le genre de Mislin est trivial pour de tels groupes ([4], proposition 3.3); les Q-groupes que nous décrivons sont deux-à-deux isomorphes comme groupes mais non Q-isomorphes; par contre, tous les localisés seront Q-isomorphes pour chaque premier. Puisque N est un Q-module, nous noterons l'opération dans N additivement mais même si Q est abélien, l'opération dans Q sera notée multiplicativement.

THÉORÈME 1.1 *Soit p un premier impair fixe mais arbitraire et soit $q=(p-1)/2$. Posons $N=\mathbf{Z}/p\oplus q\mathbf{Z}$; désignons par a un générateur de $\mathbf{Z}/p$ et par b_i un générateur de la i^{eme} composante de $q\mathbf{Z}$. Posons $Q=\mathbf{Z}^q$, le produit direct de q copies de $\mathbf{Z}$ et désignons par x_i un générateur de la i^{eme} composante de $\mathbf{Z}^q$. Pour chaque $m=1,\ldots,q$ nous définissons une action de Q sur N de la façon suivante:*

$$x_i a=a \qquad i=1,\ldots,q$$
$$x_i b_j=b_j \qquad i\neq j$$
$$x_i b_i=a+b_i \qquad i=l,\ldots,q-l$$
$$x_q b_q=ma+b_q.$$

Nous désignons par $N(p,m)$ le Q-groupe ainsi obtenu. Pour un p donné et pour m et n différents et tels que $1\leq m,\ n\leq q$, les Q-groupes $N(p,m)$ et $N(p,n)$ ne sont pas Q-isomorphes mais leurs localisés le sont en chaque premier.

Preuve. Démontrer que $N(p, m)$ et $N(p, n)$ ont les mêmes localisés en tant que Q-groupes pour chaque premier ne présente aucune difficulté. Nous nous bornerons donc à montrer que les groupes isomorphes $N(p, m)$ et $N(p, n)$ ne peuvent pas être Q-isomorphes pour $m \neq n$. Supposons qu'il existe un Q-isomorphisme $\alpha : N(p, m) \to N(p, n)$. Alors nécessairement $\alpha(a) = la$, où $1 \leq l \leq p-1$; par ailleurs, $\alpha(b_i) = \lambda_i a + \sum_{j=1}^{q} \mu_{ij} b_j$, où $\mu_{ij} \in \mathbf{Z}$. Puisque nous voulons que α soit un Q-isomorphisme, il faut que chacune des relations $\alpha(x_i b_j) = x_i \,.\, \alpha(b_j)$ soit satisfaite pour $i, j = 1, \ldots, q$. Un calcul explicite nous montre que cela entraîne que

$$\begin{aligned} &\mu_{ij} \equiv 0 (\bmod p) && \text{pour } i \neq j \\ &\mu_{ii} \equiv l (\bmod p) && \text{pour } i = 1, 2, \ldots, q-1 \\ &\mu_{qq} \equiv \frac{lm}{n} (\bmod p) \end{aligned}$$

Le déterminant de la matrice (μ_{ij}) est donc $l^q m/n$ (mod p). Or l'application induite par α sur le quotient $q\mathbf{Z}$ devant être un automorphisme de ce groupe, il faut que le déterminant de (μ_{ij}) soit égal à ± 1. Cependant, m et n sont différents et tous deux compris entre 1 et q; le quotient m/n est donc différent de ± 1 (mod p) alors que $l^q = l^{(p-1)/2}$ est égal à ± 1 (mod p) d'après le théorème de Fermat. Le déterminant $l^q m/n$ ne peut donc pas être égal à ± 1 (mod p) et α ne peut pas être un Q-isomorphisme.

Un des aspects intéressants de nos exemples est qu'il est possible de récupérer de façon explicite les exemples de Mislin en prenant les produits croisés $M(p, m) = N(p, m) \rtimes Q$ pour les différentes valeurs de m. Rappelons que pour chaque premier p fixe mais arbitraire, Mislin définit un groupe $N(p)$ de la façon suivante: si $\{x_i, y_i \mid 1 \leq i \leq (p-1)/2\} \subset H^1(\mathbf{Z}^{p-1}; \mathbf{Z}/p)$ désigne la réduction mod p *d'une base de* $H^1(\mathbf{Z}^{p-1}; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}^{p-1}$, alors $N(p)$ est défini par l'extension

$$E(p) : \mathbf{Z}/p \rightarrowtail N(p) \twoheadrightarrow \mathbf{Z}^{p-1}$$

où $[E(p)] = \sum x_i y_i \in H^2(\mathbf{Z}^{p-1}; \mathbf{Z}/p)$. Il démontre alors que $|G_M(N(p))| = (p-1)/2 = q$ et qu'un ensemble de représentants pour les éléments de $G_M(N(p))$ est donné par la famille $\{F_m(p)\}$ définie par

$$E_m(p) : \mathbf{Z}/p \rightarrowtail F_m(p) \twoheadrightarrow \mathbf{Z}^{p-1}$$

où $[E_m(p)]^q = m[E(p)]^q$, $m = 1, \ldots, q$; remarquons qu'ici $m[E(p)]^q \in H^{p-1}(\mathbf{Z}^{p-1}; \mathbf{Z}/p) = \mathbf{Z}/p$ où $\mathbf{Z}/p$ est engendré par $[E(p)]^q$.

THÉORÈME 1.2. *Soit p un premier impair fixe mais arbitraire. La famille des*

groupes $\{M(p, m)\}$, $m = 1, \ldots, q$, *fournit des exemples de non-trivialité du genre de Mislin. Plus précisément, on peut choisir dans les exemples de Mislin* $N(p) = M(p, 1)$ *et* $F_m(p) = M(p, m)$ (*voir* [12], *théorème* 3).

Preuve. Notons d'abord que si Q opère de façon nilpotente sur les groupes nilpotents M et N, alors $M_r \overset{Q}{\simeq} N_r$ pour tout premier r entraîne $(M \rtimes Q)_r \simeq (N \rtimes Q)_r$ pour tout r. En effet, on a clairement $M_r \rtimes Q \simeq N_r \rtimes Q$ pour tout r et puisque l'action est nilpotente $M_r \rtimes Q_r \simeq N_r \rtimes Q_r$ pour tout r (voir [3]); par ailleurs, on sait que $M_r \rtimes Q_r \simeq (M \rtimes Q)_r$ et il s'ensuit que $(M \rtimes Q)_r \simeq (N \rtimes Q)_r$ pour tout r.

D'autre part, il est clair que chaque groupe $M(p, m)$ est une extension centrale $\mathbf{Z}/p \xrightarrow{i} M(p, m) \xrightarrow{\pi} (p-1)\mathbf{Z}$. Soit s une section de π définie par

$$s\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i b_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j x_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i b_i, \prod_{j=1}^{q} x_j^{\mu_j}\right);$$

un 2-cocycle représentant cette extension est obtenu en considérant l'ensemble de facteurs $f(X, Y) = s(x + Y)s(X)^{-1}s(Y)^{-1}$.
Explicitement,

$$\begin{aligned}
&f\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i b_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j x_j, \sum_{i=1}^{q} \lambda_i' b_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j' x_j\right) \\
&\quad = \left(\sum_{i=1}^{q} (\lambda_i + \lambda_i') b_i, \prod_{j=1}^{q} x_j^{(\mu_j + \mu_j')}\right)\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i b_i, \prod_{j=1}^{q} x_j^{\mu_j}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i' b_i, \prod_{j=1}^{q} x_j^{\mu_j'}\right)^{-1} \\
&\quad = \left(\sum_{i=1}^{q} (\lambda_i + \lambda_i') b_i, \prod_{j=1}^{q} x_j^{(\mu_j + \mu_j')}\right)\left(\sum_{k=1}^{q-1} \mu_k \lambda_k a + m\mu_q \lambda_q a - \sum_{i=1}^{q} \lambda_i b_i, \prod_{j=1}^{q} x_j^{-\mu_j}\right) \\
&\qquad \times \left(\sum_{k=1}^{q-1} \mu_k' \lambda_k' a + m\mu_q' \lambda_q' a - \sum_{i=1}^{q} \lambda_i' b_i, \prod_{j=1}^{q} x_j^{-\mu_j'}\right) \\
&\quad = \left(\sum_{i=1}^{q} (\lambda_i + \lambda_i') b_i, \sum_{j=1}^{q} (\mu_j + \mu_j') x_j\right) \\
&\qquad \times \left(\sum_{k=1}^{q-1} (\mu_k \lambda_k + \mu_k' \lambda_k' + \mu_k \lambda_k') a + m(\mu_q \lambda_q + \mu_q' \lambda_q + \mu_q \lambda_q') a\right. \\
&\qquad \left. - \sum_{i=1}^{q} (\lambda_i + \lambda_i') b_i, \prod_{j=1}^{q} x_j^{-(\mu_j + \mu_j')}\right) \\
&\quad = \left(-\sum_{k=1}^{q-1} \mu_k' \lambda_k a - m\mu_q' \lambda_q a, 1\right)
\end{aligned}$$

le tout se faisant mod p dans $\mathbf{Z}/p$. Ces calculs montrent qu'à un signe près le groupe $M(p, 1)$ est le terme central de l'extension $E(p)$ de Mislin ([12], théorème 3).

Pour montrer que la famille $\{M(p, m)\}$ nous donne précisément les exemples de Mislin, il suffit (voir [12], page 116) de montrer que $[M(p, m)]^q = m[M(p, 1)]^q$ où $[M(p, m)]^q$ représente le "cup-produit" $[M(p, m)] \cup \cdots \cup [M(p, m)]$ pris q fois de $[M(p, m)] \in H^2(\mathbf{Z}^{p-1}; \mathbf{Z}/p)$ par lui-même. D'après les calculs précédents et les propriétés du "cup-produit", on voit tout de suite qu'un 2-cocycle représentant à la fois $[M(p, m)]^q$ et $m[M(p, 1)]^q$ est donné par

$$f(X, Y, \ldots, X, Y) = m(\mu_1'\lambda_1\mu_2'\lambda_2 \ldots \mu_q'\lambda_q)a$$

d'où le théorème.

Si Q opère sur N, nous avons indiqué précédemment que la Q-suite centrale descendante de N est définie par:

$$\Gamma_Q^1 N = N, \qquad \Gamma_Q^{i+1} N = \mathrm{gr}\{uv^x u^{-1} v^{-1} \mid u \in N, v \in \Gamma_Q^i N, \qquad x \in Q\}, \qquad i \geq 1.$$

De même, on définit la Q-suite centrale ascendante (voir [8]) par:

$$\nu_Q^0 N = \{1\}, \qquad \nu_Q^1 N = \{u \in Z(N) \mid u^x = u, \text{ pour tout } x \in Q\},$$
$$\nu_Q^{i+1} N / \nu_Q^i N = \nu_Q^1(N/\nu_Q^i N), \qquad i \geq 1.$$

Si Q opère trivialement sur N, on retrouve les suites centrales habituelles. Nous disons que l'action de Q sur N est nilpotente si $\Gamma_Q^{c+1} N = \{1\}$ pour un certain $c \in \mathbf{N}$ ou de façon équivalente si $\nu_Q^c N = N$; cette équivalence se démontre au moyen de l'inclusion $\Gamma_Q^i N \leq \nu_Q^{c+1-i} N$ pour $i = 1, \ldots, c$ que l'on peut obtenir par induction sur i.

DÉFINITION 1.2. La catégorie des Q-groupes pour lesquels $\Gamma_Q^2 N$ est fini, avec N et Q nilpotents de type fini, est désignée ici par $\mathcal{Q}_0$.

DÉFINITION 1.3. Nous désignons par $\mathcal{M}_0$ la sous-catégorie de $\mathcal{Q}_0$ formée des Q-groupes pour lesquels $\Gamma_Q^2 N$ est fini, N abélien de type fini et Q nilpotent de type fini.

Remarquons que les exemples $N(p, m)$ décrits plus haut appartiennent à la catégorie $\mathcal{M}_0$; de plus, dans ce cas, Q opère sur $N(p, m)$ de façon nilpotente.

LEMME 1.1. *Pour $N \in \mathcal{Q}_0$, le quotient $N/\nu_Q^1 N$ est un Q-groupe fini et le nombre de Hirsch $h(N)$ de N (où N est considéré comme groupe) est donné par*

$$h(N) = \operatorname{rang} \nu_Q^1 N = \dim_{\mathbb{Q}} N_0$$

Preuve. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \nu_Q^1 N & \rightarrowtail & N & \twoheadrightarrow & N/\nu_Q^1 N \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ (\nu_Q^1 N)_0 & \rightarrowtail & N_0 & \twoheadrightarrow & (N/\nu_Q^1 N)_0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes. D'après [8], théorème 3.5, $(\nu_Q^1 N)_0 = \nu_Q^1(N_0)$ puisque N et Q sont de type fini. Par aileurs, N_0 est abélien et Q opère trivialement sur N_0 puisque $\Gamma_Q^2 N$ est fini et donc contenu dans $\ker(N \to N_0)$; on a donc $\nu_Q^1(N_0) = N_0$, d'où $(\nu_Q^1 N)_0 = N_0$, puis $(N/\nu_Q^1 N)_0 = \{1\}$. On en déduit que $N/\nu_Q^1 N$ est fini et la conclusion s'ensuit.

LEMME 1.2. *Soient $N \in \mathcal{Q}_0$, $M \in QG_M(N)$. Alors $\Gamma_Q^2 M \simeq \Gamma_Q^2 N$.*

Preuve. On sait ([8], corollaire 3.3) que pour tout Q-groupe nilpotent N, l'application canonique $\Gamma_Q^2 N \to \Gamma_Q^2(N_p)$ p-localise. On a donc $\Gamma_Q^2(N_p) \overset{Q}{\cong} (\Gamma_Q^2 N)_p$ mais puisque $\Gamma_Q^2 N$ est fini, $\Gamma_Q^2 N \overset{Q}{\cong} \prod_p (\Gamma_Q^2 N)_p$, l'action respectant les composantes. Si $M \in QG_M(N)$, alors $\Gamma_Q^2(M_p) \overset{Q}{\cong} \Gamma_Q^2(N_p)$; en particulier $\Gamma_Q^2 M$ est fini et $\Gamma_Q^2 M \overset{Q}{\cong} \prod_p \Gamma_Q^2(M_p) \overset{Q}{\cong} \prod_p \Gamma_Q^2(N_p) \overset{Q}{\cong} \Gamma_Q^2 N$.

DEFINITION 1.4. Soit N un Q-groupe nilpotent avec $T(\nu_Q^1 N)$ d'exposant fini (pour tout groupe nilpotent G, $T(G)$ désignera le sous-groupe de torsion de G). Nous posons:

$$F\nu_Q^1 N = \{x \in \nu_Q^1 N \mid \exists y \in \nu_Q^1 N \quad \text{avec} \quad y^k = x,\ k = \exp T(\nu_Q^1 N)\}.$$

Remarque. $F\nu_Q^1 N$ est abélien sans torsion et muni d'une Q-action triviale; si $N \in \mathcal{Q}_0$, $F\nu_Q^1 N$ est abélien libre de rang $h(N)$ d'après le lemme 1.1; si N et Q sont de type fini, on voit que l'application canonique $N \to N_p$ envoie $F\nu_Q^1 N$ dans $F\nu_Q^1(N_p)$; $(F\nu_Q^1 N)_p$ peut donc être identifié à un sous-groupe de $F\nu_Q^1(N_p)$.

LEMME 1.3. *Si N et Q sont de type fini, N nilpotent, alors l'application*

canonique $(F\nu_Q^1 N)_p \to F\nu_Q^1(N_p)$ *est un isomorphisme* (*remarquons que tous les groupes sont clairement des* Q*-groupes sur lesquels l'action est triviale*).

Preuve. On remarque d'abord que si

$$X = \{x \in \nu_Q^1(N_p) \mid \exists y \in \nu_Q^1(N_p) \quad \text{avec} \quad y^k = x,\ k = \exp T(\nu_Q^1 N)\}$$

alors il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} T(\nu_Q^1 N) & \rightarrowtail & \nu_Q^1 N & \overset{k}{\twoheadrightarrow} & F\nu_Q^1 N \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ T(\nu_Q^1(N_p)) & \rightarrowtail & \nu_Q^1(N_p) & \overset{k}{\twoheadrightarrow} & X \end{array}$$

où les lignes sont exactes. Puisque N et Q sont de type fini, α et β p-localisent [8] et alors γ p-localise [2]. On a clairement $X = F\nu_Q^1(N_p)$ puisque, $T(\nu_Q^1 N)$ étant fini, $\exp T(\nu_Q^1(N_p))$ est précisément la p-composante de $\exp T(\nu_Q^1 N)$ et que $\nu_Q^1(N_p)$ est p-local.

DEFINTION 1.5. Pour $N \in \mathcal{Q}_0$, nous posons $S(N) = N/F\nu_Q^1 N$ muni de sa structure évidente de Q-groupe.

LEMME 1.4. *Soient* $N \in \mathcal{Q}_0$, $M \in QG_M(N)$. *Alors* $F\nu_Q^1 M \simeq F\nu_Q^1 N$ *et* $S(M) \overset{Q}{\cong} S(N)$.

Il suffit de reprendre mutatis mutandis la preuve du lemme 4 de [12] en vérifiant bien que tous les homomorphismes sont des Q-homomorphismes.

Soit maintenant $N \in \mathcal{M}_0$. Si $M \in QG_M(N)$, nous savons ([4], proposition 3.3) que M est abélien comme groupe et les résultats précédents montrent que M se laisse représenter comme extension de modules sur l'anneau de groupe $\mathbf{Z}(Q)$; à M correspond une extension $E: \mathbf{Z}^h \rightarrowtail M \twoheadrightarrow S$ où $f(\mathbf{Z}^h) = F\nu_Q^1 M$, $h = h(N) = h(M)$ et $S \overset{Q}{\cong} S(N) \overset{Q}{\cong} S(M)$. On sait que ces extensions sont classifiées par le groupe $\mathrm{Ext}_Q^1(S; \mathbf{Z}^h)$; cependant, la classe de Q-isomorphisme de M ne détermine pas uniquement un élément de $\mathrm{Ext}_Q^1(S; \mathbf{Z}^h)$ mais seulement une classe double dans $\mathrm{Aut}_Q \mathbf{Z}^h \backslash \mathrm{Ext}_Q^1(S; \mathbf{Z}^h)/\mathrm{Aut}_Q S$, l'ensemble des classes d'équivalence dans $\mathrm{Ext}_Q^1(S; Z^h)$ produites en considérant l'action à gauche de $\mathrm{Aut}_Q \mathbf{Z}^h$ et l'action à droite de $\mathrm{Aut}_Q S$ sur le groupe $Ext_Q^1(S; \mathbf{Z}^h)$. En effet, Si les modules M et M' sont isomorphes et représentés par des extensions $\mathbf{Z}^h \overset{f}{\rightarrowtail} M \twoheadrightarrow S$ et $Z^h \overset{g}{\rightarrowtail} M' \twoheadrightarrow S$ telles que $f(Z^h) = F\nu_Q^1 M$ et $g(\mathbf{Z}^h) = F\nu_Q^1 M'$ alors clairement ces deux extensions appartiennent à la même classe double. Réciproquement, si une extension $\mathbf{Z}^h \overset{k}{\rightarrowtail} L \twoheadrightarrow S$ appartient à la même classe double que $\mathbf{Z}^h \overset{f}{\rightarrowtail} M \twoheadrightarrow S$, il existe un

diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z}^h \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, two heads] \arrow[d] & S \arrow[d] \\ \mathbf{Z}^h \arrow[r, tail, "k"] & L \arrow[r, two heads] & S \end{tikzcd}$$

d'où $M \overset{Q}{\simeq} L$ et $k(\mathbf{Z}^h) = F\nu_Q^1 L$. On peut donc conclure comme dans [12] qu'il existe une bijection entre $QG_M(N)$ et un sous-ensemble de l'ensemble des classes doubles de $\mathrm{Ext}_Q^1(S;\mathbf{Z}^h)$ pour $N \in \mathcal{M}_0$. Puisque S est fini, que $\mathbf{Z}^h$ est de présentation finie et que $\mathrm{Ext}_Q^1(—,—)$ est additif, on peut affirmer que si l'on pose $t = \exp S$ alors t est aussi un exposant de $\mathrm{Ext}_Q^1(S;\mathbf{Z}^h)$. Nous verrons plus loin comment t est relié à N dans le cas où Q opère sur N de façon nilpotente. Désignons par T l'ensemble des premiers p tels que p divise t; puisque $\mathrm{Ext}_Q^1(S;\ \mathbf{Z}^h)$ ne contient que des éléments de torsion dont l'ordre a tous ses facteurs premiers dans T, $\mathrm{Ext}_Q^1(S;\mathbf{Z}^h) \simeq \mathrm{Ext}_Q^1(S;\mathbf{Z}^h)^T$ (la localisation de $\mathrm{Ext}_Q^1(S;\mathbf{Z}^h)$ par rapport à l'ensemble des premiers T, voir [2]); puisque Q est nilpotent de type fini, le lemme suivant nous montre que $\mathrm{Ext}_Q^1(S;\mathbf{Z}^h) \simeq \mathrm{Ext}_Q^1(S;\mathbf{Z}_T^h)$.

LEMME 1.5. *Soient A et B des Q-modules où A est de type fini et soit Q un groupe nilpotent de type fini. Alors si T est un ensemble de premiers,*

$$\mathrm{Ext}_Q^i(A, B)_T = \mathrm{Ext}_Q^i(A, B_T), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

et en particulier $\mathrm{Hom}_Q(A, B)_T = \mathrm{Hom}_Q(A, B_T)$.

Preuve. Pour tout groupe Q-libre de type fini F, on a $\mathrm{Hom}_Q(F, B)_T = \mathrm{Hom}_Q(F, B_T)$ prusque $\mathrm{Hom}_Q(F, C) = \bigoplus_{\text{finie}} C$ (il y a autant de copies de C que le nombre d'éléments dans une Q-base de F).

Considérons maintenant une résolution Q-libre

$$\cdots \to F_{i+l} \to F_i \to F_{i-l} \to \cdots \to F_0 \twoheadrightarrow A$$

où les F_i peuvent être choisis de type fini puisque si Q est nilpotent de type fini, alors $\mathbf{Z}(Q)$ est noethérien. On a la suite

$$\cdots \leftarrow \mathrm{Hom}_Q(F_{i+l}, B) \leftarrow \mathrm{Hom}_Q(F_i, B) \leftarrow \mathrm{Hom}_Q(F_{i-1}, B) \leftarrow \cdots$$

et en localisant en T,

$$\cdots \leftarrow \mathrm{Hom}_Q(F_{i+1}, B)_T \leftarrow \mathrm{Hom}_Q(F_i, B)_T \leftarrow \mathrm{Hom}_Q(F_{i-1}, B)_T \leftarrow \cdots$$

Le résultat découle de l'égalité $\mathrm{Hom}_Q(F, B)_T = \mathrm{Hom}_Q(F, B_T)$ et du fait que la localisation est exacte.

Posons maintenant $\tilde{S} = \mathrm{Aut}_Q S$, $G = GL(h, \mathbf{Z}) = \mathrm{Aut}_Q \mathbf{Z}^h$ et $G(T) = GL(h, \mathbf{Z}_T)$; puisque $\mathrm{Ext}^1_Q(S; \mathbf{Z}^h) \simeq \mathrm{Ext}^1_Q(S; \mathbf{Z}^h_T)$, il s'ensuit que ce groupe est muni d'une action à gauche de $G(T)$ en plus de l'action à gauche de G et de l'action à droite de $\tilde{S}$. L'injection $GL(h, \mathbf{Z}) \to GL(h, \mathbf{Z}_T)$ induit une surjection

$$\begin{aligned} \sigma : G\backslash \mathrm{Ext}^1_Q(S; \mathbf{Z}^h)/\tilde{S} &\twoheadrightarrow G(T)\backslash \mathrm{Ext}^1_Q(S; \mathbf{Z}^h)/\tilde{S} \\ : G[E]\tilde{S} &\mapsto G(T)[E]\tilde{S}. \end{aligned}$$

THÉORÉME 1.3. *Soit $N \in \mathcal{M}_0$ et soit $E : \mathbf{Z}^h \rightarrowtail N \twoheadrightarrow S$ une extension de Q-groupes où $f(\mathbf{Z}^h) = F\nu^1_Q N$ et $S \overset{Q}{\cong} S(N)$. Alors il existe une bijection naturelle*

$$\theta : \sigma^{-1}(G(T)[E]\tilde{S}) \to QG_M(N).$$

Preuve. Il n'y a plus maintenant qu'à reprendre la preuve du théorème 4 de [12] en remplaçant $H^2(Q; \mathbf{Z}^h)$ par $\mathrm{Ext}^1_Q(S; \mathbf{Z}^h)$; toutes les remarques que nous avons faites à propos de $\mathrm{Ext}^1_Q(S; \mathbf{Z}^h)$ permettent de le faire.

Remarque. On peut déduire (comme dans [12]) de la preuve du théorème précédent que pour $N \in \mathcal{M}_0$, il existe une surjection de coker $(GL(h, \mathbf{Z}) \to GL(h, \mathbf{Z}/t)) \simeq (\mathbf{Z}/t)^*/\{\pm 1\}$ sur $QG_M(N)$ que nous noterons

$$\delta(N) : (\mathbf{Z}/t)^*/\{\pm 1\} \to QG_M(N).$$

COROLLAIRE 1.1. *Si $N \in \mathcal{M}_0$ et si $t = \exp S(N)$, alors $|QG_M(N)| \leq \phi(t)/2$ où ϕ est fonction d'Euler.*

Les exemples décrits dans le théorème 1.1 montrent que cette borne peut être atteinte; en effet, on a alors $|QG_M(N(p, m))| = (p-1)/2$.

Nous donnerons dans la deuxième partie une borne pour $|QG_M(N)|$ dans le cas où $N \in \mathcal{Q}_0$ mais auparavant nous allons indiquer quelques résultats qui nous permettront de munir $QG_M(N)$ d'une structure de groupe si $N \in \mathcal{M}_0$ et si Q opère sur N de façon nilpotente.

LEMME 1.6. *Supposons que* $N \in \mathcal{M}_0$, $t = \exp S(N)$ *et* Q *opère sur* N *de façon nilpotente. Alors* p *divise* t *si et seulement si* N *a de la* p*-torsion.*

La preuve est comme celle du lemme 1.1 de [5]; il faut cependant utiliser le résultat suivant:

LEMME 1.7. *Si* A *est abélien et si* Q *opère sur* A *de façon nilpotente, alors* A *a de la* p*-torsion entraîne que* A^Q *en a aussi (ici* $A^Q = \{a \in A \mid xa = a$, *pour tout* $x \in Q\}$*),*

Preuve. Remarquons que si A est abélien, la Q-suite centrale ascendante est tout simplement:

$$\nu_Q^0 A = \{0\}, \qquad \nu_Q^1 A = A^Q, \qquad \nu_Q^{i+1} A / \nu_Q^i A = (A/\nu_Q^1 A)^Q, \qquad i \geq 1.$$

Supposons que A a de la p-torsion mais que $\nu_Q^1 A = A^Q$ n'en a pas; désignons par j le plus petit entier naturel i tel que $\nu_Q^i A$ a de la p-torsion; par hypothèse, on a au moins $j \geq 2$. Il existe donc un élément de p-torsion $a_0 \in \nu_Q^j A$ et comme $a_0 \notin A^Q$, il existe $x \in Q$ tel que $xa_0 - a_0 \neq 0$. Puisque $a \in \nu_Q^j A \mapsto (xa - a) \in \nu_Q^{j-1} A$ est un homomorphisme, $xa_0 - a_0$ est de p-torsion, ce qui est une contradiction.

Dans le cas où Q opère sur N de façon nilpotente, on voit que T défini plus haut est précisément l'ensemble des premiers p tels que N (et non seulement $S(N)$) a de la p-torsion. Cette remarque permet de démontrer le lemme suivant (voir [5], lemme 1.2):

LEMME 1.8. *Soit* $N \in \mathcal{M}_0$ *avec* Q *opérant sur* N *de façon nilpotente. Soit* $f: N \to M$ *un* Q*-homomorphisme qui est aussi une* T*-équivalence (voir dans* [2] *la notion de* T*-isomorphisme). Alors,*

i) $f(F\nu_Q^1 N) \subset F\nu_Q^1 N$ *et* dét f *(le déterminant de* $f|_{F\nu_Q^1 N}$*) qui est défini à un signe près est relativement premier à* T.

ii) f *est une injection et* $f(N)$ *est un* Q*-sous-groupe de* M.

Ce résultat permet de définir les applications suivantes:

DÉFINITION 1.6. Soit T-Equ(N) l'ensemble des Q-homomorphismes $\phi: M \to L$ qui sont des T-équivalences, où $M, L \in QG_M(N)$, $N \in \mathcal{M}_0$, Q opère sur N de façon nilpotente. On définit

$$\alpha: T\text{-Equ}(N) \to (\mathbf{Z}/t)^*/\{\pm 1\}$$

par

$$\phi \mapsto \text{classe résiduelle mod } t \text{ de } |\text{dét } \phi|.$$

De plus, si T-Aut N est l'ensemble des Q-endomorphismes de N qui sont des T-équivalences, on obtient par restriction une application

$$\theta : T\text{-Aut}\,(N) \to (\mathbf{Z}/t)^*/\{\pm 1\}.$$

Il est immédiat que α (donc θ) est multiplicative et en particulier im θ est un sous-groupe de $(\mathbf{Z}/t)^*/\{\pm 1\}$.

En revenant à la surjection $\delta(N) : (\mathbf{Z}/t)^*/\{\pm 1\} \twoheadrightarrow QG_M(N)$, nous voyons que si $\bar{a} \in (\mathbf{Z}/t)^*/\{\pm 1\}$ et si $a \in \mathbf{Z}$ est un représentant de $\bar{a}$, nous pouvons décrire $\delta(N)$ explicitement comme suit: dire que $\delta(N)\bar{a} = M$, c'est dire qu'il existe un diagramme commutatif dans la catégorie des Q-modules avec les lignes exactes

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z}^h \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "A"] & N \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\phi"] & S(N) \arrow[d, "B", "\simeq"'] \\ \mathbf{Z}^h \arrow[r, tail, "g"] & M \arrow[r, two heads] & S(M) \end{tikzcd} \tag{1}$$

avec $|\text{dét } A| = a$, $B : S(N) \xrightarrow{Q} S(M)$, $f(\mathbf{Z}^h) = F\nu_Q^1 N$, $g(\mathbf{Z}^h) = F\nu_Q^1 M$. Puisque a est premier à T, A est une T-équivalence donc ϕ aussi. On remarque que réciproquement si un diagramme tel que (1) existe avec B un Q-isomorphisme, $f(\mathbf{Z}^h) = F\nu_Q^1 N$ et ϕ une T-équivalence, alors $M \in QG_M(N)$, $g(\mathbf{Z}^h) = F\nu_Q^1 M$ et $\delta(N)\ \bar{a} = M$.

On peut alors démontrer ([5], théorème 1.4):

THÉORÈME 1.4. *La suite* T-Aut $(N) \xrightarrow{\theta} (Z/t)^*/\{\pm 1\} \overset{(N)}{\twoheadrightarrow} QG_M(N)$ *est exacte en ce sens que* $\delta(N)x = \delta(N)y$ *si et seulement si* $x = y\theta(\phi)$ *pour un certain* $\phi \in T$-Aut (N).

Ce résultat permet d'introduire une structure de groupe abélien sur $QG_M(N)$, $N \in \mathcal{M}_0$, Q opérant sur N de façon nilpotente.

DÉFINITION 1.7. Soit $N \in \mathcal{M}_0$ où Q opère sur N de façon nilpotente. Le groupe abélien $QG_M(N)$ est l'ensemble $QG_M(N)$ muni de la seule structure de groupe telle que $\delta(N) = (\mathbf{Z}/t)^*/\{\pm 1\} \twoheadrightarrow QG_M(N)$ soit un homomorphisme.

C'est un groupe abélien dont l'élément neutre est N. On montre facilement que $QG_M(N(p, m))$ est le groupe cyclique d'orde $(p-1)/2$. Une analyse plus fine de la structure de groupe sur $QG_M(N)$ permet d'obtenir le résultat suivant:

THÉORÈME 1.5. *Supposons $N \in \mathcal{M}_0$, $M \in QG_M(N)$. Q opère sur N de façon nilpotente, alors $QG_M(N) \simeq QG_M(M)$ comme groupes abéliens.*

Esquisse de la preuve. Si X, Y, $M \in QG_M(N)$, on dit qu'une paire d'homomorphismes $\phi : X \to M$, $\psi : Y \to M$ est *exhaustive* si ϕ ou ψ est une T-équivalence et si pour chaque premier p, ϕ ou ψ est une p-équivalence. On montre que de telles paires existent toujours à l'intérieur d'un même Q-genre et que l'égalité $X+Y=Z+M$ dans $QG_M(N)$ est équivalente à l'existence d'un carré bicartésien avec (ϕ, ψ) exhaustive

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "\phi"] \\ Y \arrow[r, "\psi"] & M \end{tikzcd}$$

dans la catégorie des Q-modules où Q opère de façon nilpotente; on peut même montrer qu'en prenant le "pull-back" de ϕ et ψ, le carré ainsi obtenu est de fait bicartésien. Les détails de la preuve se déduisent aisément de [5]. On vérifie alors tout de suite que l'application $\tau : QG_M(M) \to QG_M(N)$ définie par $\tau(X) = X\text{-}M$ est un homomorphisme, donc un isomorphisme puisque τ est clairement bijective.

Tous les autres résultats de [12] se laissent démontrer facilement si on remplace $\mathcal{N}_0$ par $\mathcal{Q}_0$; cependant, lorsque Mislin utilise le groupe $H^2(Q; \mathbf{Z}^h)$, il faut nous restreindre à la catégorie $\mathcal{M}_0$ et utiliser $\mathrm{Ext}^1_Q\ (S; \mathbf{Z}^h)$; dans la deuxième partie, nous verrons que plusieurs de ces résultats se démontrent sans utiliser le groupe $\mathrm{Ext}^1_Q(S; \mathbf{Z}^h)$ et seront valides dans $\mathcal{Q}_0$ et non seulement dans $\mathcal{M}_0$. Nous nous bornerons donc à démontrer le théorème suivant dans $\mathcal{M}_0$ pour lequel nous n'avons pas exactement l'équivalent dans $\mathcal{Q}_0$ grâce aux méthodes de la deuxième partie. Nous donnerons les détails de la démonstration puisque nous n'utilisons évidemment pas le théorème de Künneth comme le fait Mislin.

THÉORÈME 1.6. *Soit $N \in \mathcal{M}_0$ avec Q opérant sur N de façon nilpotente. Soit $\{M_i\}$ $i = 1, \ldots, k$ une famille de Q-groupes appartenant à $QG_M(N)$. Supposons que pour chaque $i = 1, \ldots, k$, $\delta(N)\bar{a}_i = M_i$. Alors $\delta(\bigoplus_{i=1}^k N_i)\ (\prod_{i=1}^k \ddot{a}_i) = \bigoplus_{i=1}^k M_i$ (chaque N_i étant une copie de N). En particulier, le diagramme suivant est*

commutatif:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{Z}/t)^*/\{\pm 1\} \arrow[r, two heads, "\delta(N)"] \arrow[d, "\text{(élévation à la puissance } k)"'] & QG_M(N) \arrow[d, "\left(L \mapsto \bigoplus_{i=1}^{k} L_i\right)"] \\
(\mathbf{Z}/t)^*/\{\pm 1\} \arrow[r, two heads, "\delta \bigoplus_{i=1}^{k} N_i"] & QG_M\left(\bigoplus_{i=1}^{k} N_i\right)
\end{tikzcd}$$

où chaque L_i est une copie de L.

Preuve. Notons d'abord que l'énoncé a un sens parce que si $t = \exp S(N)$ alors $t = \exp S(\bigoplus_{i=1}^{k} N_i)$ également. Rappelons ensuite que $\delta(N)$ est défini comme suit: si $\bar{a}_i \in (Z/t)^*\{\pm 1\}$ est représenté par $a_i \in Z$, dire que $\delta(N)\bar{a}_i = M_i$, c'est dire qu'il existe un diagramme commutatif dans la catégorie des Q-modules avec les lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}^h \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "A_i"] & N \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\phi_i"] & S(N) \arrow[d, "B_i", "\overset{Q}{\cong}"'] \\
\mathbf{Z}^h \arrow[r, tail, "g_i"] & M_i \arrow[r, two heads] & S(M_i)
\end{tikzcd} \tag{2}$$

où $|\det A_i| = |a_i|$, $B_i\colon S(N) \xrightarrow{Q} S(M_i)$, $f(\mathbf{Z}^h) = F\nu_Q^1 N$, $g_i(\mathbf{Z}^h) = F\nu_Q^1 M_i$ et ϕ_i une T-équivalence. On a alors clairement un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}^{hk} \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, "A'"] & \bigoplus_{i=1}^{k} N_i \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\phi_i"] & S\left(\bigoplus_{i=1}^{k} N_i\right) \arrow[d, "B'", "\overset{Q}{\cong}"'] \\
\mathbf{Z}^{hk} \arrow[r, tail, "g'"] & \bigoplus_{i=1}^{k} M_i \arrow[r, two heads] & S\left(\bigoplus_{i=1}^{k} M_i\right)
\end{tikzcd} \tag{3}$$

où chaque flèche de (3) est la somme directe des flèches correspondantes dans (2) pour $i = 1, \ldots, k$. Puisque $B'\colon S(\bigoplus_{i=1}^{k} N_i) \xrightarrow{Q} S(\bigoplus_{i=1}^{k} M_i)$, $f'(\mathbf{Z}^{hk}) = F\nu_Q^1(\bigoplus_{i=1}^{k} N_i)$ et ϕ' est une T-équivalence, il découle des remarques précédant le théorème 1.4 que

$$\delta\left(\bigoplus_{i=1}^{k} N_i\right)(|\,\text{dét}\, A'\,| \pmod t) = \bigoplus_{i=1}^{k} M_i.$$

La conclusion s'ensuit puisque $|\text{dét}\, A'| \pmod t = \prod_{i=1}^{k} \bar{a}_i$.

Nous en déduisons enfin l'analogue de [12], théorème 6, sous la forme suivante:

THÉORÈME 1.7. *Soit $N \in \mathcal{M}_0$ avec Q opérant sur N de façon nilpotente et soient $\{M_i\}$, $\{M_i'\}$ $(i=1,\ldots,k)$ deux familles de Q-groupes appartenant à $QG_M(N)$. Soient $\bar{a}_i$ et $\bar{a}_i'$ tels que $\delta(N)\bar{a}_i = M_i$ et $\delta(N)\bar{a}_i' = M_i'$. Alors si $\prod_{i=1}^k \bar{a}_i = \prod_{i=1}^k \bar{a}_i$, $\bigoplus_{i=1}^k M_i \overset{Q}{\cong} \bigoplus_{i=1}^k M_1'$. En particulier, si $t = \exp S(N)$, alors*

$$\bigoplus_{\phi(t)/2} M \overset{Q}{\cong} \bigoplus_{\phi(t)/2} N \quad \textit{pour tout} \quad M \in QG_M(N).$$

Preuve

$$\bigoplus_{i=1}^k M_i = \delta(\bigoplus_k N)\left(\prod_{i=1}^k \bar{a}_i\right) = \delta(\bigoplus_k N)\left(\prod_{i=1}^k \bar{a}_i'\right) = \bigoplus_{i=1}^k M_i'$$

d'après le théorème 1.6.

Remarque. En prenant $M_i = N(p, m_i)$ et $M_i' = N(p, m_i')$, on a $\bigoplus_{i=1}^k M_i \overset{Q}{\cong} \bigoplus_{i=1}^k M_i'$ si $\prod_{i=1}^k m_i = \pm\prod_{i=1}^k m_i' \pmod p$. Par exemple, $N(13,3) \oplus N(13,4) \overset{Q}{\cong} N(13,2) \oplus N(13,6)$ et $N(7,2) \oplus N(7,3) \overset{Q}{\cong} N(7,1) \oplus N(7,1)$.

2. Définition du Q-genre (Pickel), comparison avec le Q-genre (Mislin), non-simplification dans les Q-groupes

DÉFINITION 2.1. Pour tout Q-groupe G, nous désignons par $QF(G)$ l'ensemble des classes de Q-isomorphisme des quotients finis de G par ses Q-sous-groupes normaux.

Nous désignons par $G^{(n)}$ le Q-sous-groupe normal de G engendré par les $n^{\text{ièmes}}$ puissances d'éléments de G. Le produit cartésien de n copies de G muni de l'action habituelle est noté G^n (Rappelons qu'habituellement G^n désigne plutôt ce que nous avons désigné ici par $G^{(n)}$). Nous posons $\hat{G} = \varprojlim G/G^{(n)}$; c'est un Q-groupe qui coincide avec le complété profini si G est nilpotent de type fini; il suffit en effet de remarquer que si G est nilpotent de type fini, alors $G/G^{(n)}$ est fini pour tout $n \in \mathbf{N}$.

THÉORÈME 2.1. *Soient G et H des Q-groupes tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $G/G^{(n)}$ et $H/H^{(n)}$ soient finis. Supposons de plus que l'une des trois conditions*

suivantes est satisfaite:

i) $QF(G) = QF(H)$

ii) $G^n \overset{Q}{\cong} H^n$ *pour un certain* $n \in \mathbf{N}$

iii) *il existe un* Q*-groupe* L *tel que* $L/L^{(n)}$ *soit fini pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *et tel que* $G \times L \overset{Q}{\cong} H \times L$.

Alors $\hat{G} \overset{Q}{\cong} \hat{H}$.

Preuve. On n'a qu'à reprendre la preuve de Warfield ([44], lemme 1 et théorème 1) en constatant que les homomorphismes sont des Q-homomorphismes et en utilisant le théorème de Krull-Schmidt pour les groupes à opérateurs.

Remarque. Etant donné une extension $T \overset{i}{\rightarrowtail} N \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} F$ de Q-groupes et une section s de π, on peut déterminer les applications suivantes (qui en général ne sont pas des homomorphismes):

a) $\alpha : F \to \operatorname{Aut} T$ définie par $\alpha(a) = (b \mapsto s(a)^{-1} b s(a))$

b) $f : F \times F \to T$ définie par $f(a, b) = s(ab)s(a)^{-1}s(b)^{-1}$

c) $\lambda : F \times Q \to T$ définie par $\lambda(a, x) = \overline{x \cdot s(a)}s(a)^{-1}$

Ces applications caractérisent l'extension N en ce sens qu'il est possible de reconstruire N connaissant α, f et λ.

LEMME 2.1. *Soit* $N \in \mathfrak{Q}_0$. *Nous pouvons considérer* N *comme une extension* $T \overset{i}{\rightarrowtail} N \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} F$ *où* T *est fini et* F *abélien libre de rang fini sur lequel* Q *opère trivialement. De plus, il existe un* Q*-sous-groupe* D *et* N *tel que* i) $D \subset \nu_Q^1 N$, ii) D *est abélien libre de même rang que* F, iii) *l'homomorphisme* $\pi : N \to F$ *restreint à* D *est un* Q*-isomorphisme de* D *sur* $F^{(k)}$ *pour un certain* $k \in \mathbf{N}$ *et en particulier il existe un* Q*-homomorphisme* $\mu : F^{(k)} \to N$ *tel que* $\mu(F^{(k)}) = D$ *et* $\pi\mu = \mathrm{Id}_{F^{(k)}}$.

Enfin, il existe une section σ *de* π *telle que les applications* α, f *et* λ *définies par rapport à cette section ne dépendent que de la classe modulo* $F^{(k)}$ *dans* F *et non du représentant; de façon précise, si* $a, b \in F$, $m, n \in F^{(k)}$, $x \in Q$, *alors* $\alpha(am) = \alpha(a)$, $f(am, bn) = f(a, b)$ *et* $\lambda(am, x) = \lambda(a, x)$. *On peut donc regarder* α, f *et* λ *comme définies sur* $F/F^{(k)}$, $F/F^{(k)} \times F/F^{(k)}$ *et* $F/F^{(k)} \times Q$ *respectivement.*

Preuve. La démonstration de ce résultat demande au plus quelques précisions. On prend pour T le Q-sous-groupe formé des éléments de torsion de N. Puisque $\Gamma_Q^2 N$ est fini donc contenu dans $T(N)$, $F = N/T$ possède les propriétés voulues. Si on pose $D = F\nu_Q^1 N$, on a rang $D =$ rang F d'après le lemme 1.1 et la remarque suivant la définition 1.4; il est clair que D satisfait i), ii) et iii) où $k = \exp T(\nu_Q^1 N)$.

Enfin, posons $\sigma = \mu$ sur $F^{(k)}$ et définissons σ arbitrairement sur un ensemble U de représentants des éléments de $F/F^{(k)}$ dans F. Ensuite, σ peut être prolongée à F par $\sigma(um) = \sigma(u)\sigma(m)$ pour $u \in U$ et $m \in F^{(k)}$. Il est facile de voir que α, f et λ définies par rapport à σ ont les propriétés voulues. On a par exemple $\lambda(um, x) = \lambda(u, x)$; en effet, $\lambda(um, x) = \overline{x \cdot \sigma(um)}\sigma(um)^{-1} = \overline{x \cdot \sigma(u)}\ \overline{x \cdot \sigma(m)}\ \sigma(m)^{-1}\sigma(u)^{-1} = \overline{x \cdot \sigma(u)}\sigma(u)^{-1}$ (puisque $\sigma(m) \in D$, alors $\overline{x \cdot \sigma(m)} = \sigma(m)$).

DÉFINITION 2.2. Donnons-nous deux extensions (4) $T \rightarrowtail N \twoheadrightarrow F$ et (5) $T' \rightarrowtail N' \twoheadrightarrow F'$ avec $N, N' \in \mathcal{Q}_0$, $T \overset{Q}{\cong} T'$, $F \simeq F'$ comme dans le lemme précédent. On sait qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que la Q-structure de N' peut être définie par des applications $\alpha' : F'/(F')^{(k)} \to \operatorname{Aut} T'$, $f' : F'/(F')^{(k)} \times F'/(F')^{(k)} \to T'$ et $\lambda' : F'/(F')^{(k)} \times Q \to T'$. On dit qu'on isomorphisme $\xi : F/F^{(k)} \to F'(F')^{(k)}$ *induit une équivalence faible* entre les extensions (4) et (5) si on peut choisir α, f et λ tels que $\alpha(a) = \alpha'(\xi(a))$, $f(a, b) = f'(\xi(a), \xi(b))$ et $\lambda(a, x) = \lambda'(\xi(a), x)$ pour tout $a, b \in F/F^{(k)}$, $x \in Q$.

Remarque. Dans ces conditions les Q-groupes N et N' ne sont pas nécessairement Q-isomorphes puisque ξ n'est pas nécessairement induit par un isomorphisme de F sur F'; cependant si ξ est induit par un isomorphisme de F sur F', alors N et N' sont Q-isomorphes. Si $g : F \to F'$ est un isomorphisme et $\bar{g} : F/F^{(k)} \to F'/(F')^{(k)}$ l'isomorphisme induit, alors $\bar{g}^{-1}\xi : F/F^{(k)} \to F/F^{(k)}$ est un automorphisme avec dét $(\bar{g}^{-1}\xi) \in (\mathbf{Z}/k)^*$ et il est bien connu que ξ est induit par un isomorphisme de F sur F' si et seulement si dét $(\bar{g}^{-1}\xi) = \pm 1$; on voit tout de suite que si $h : F \to F'$ est un autre isomorphisme, alors dét $(\bar{g}^{-1}\xi) = \pm$dét $(\bar{h}^{-1}\xi)$. A tout isomorphisme $\xi : F/F^{(k)} \to F'/(F')^{(k)}$ qui induit une équivalence faible entre (4) et (5), on peut donc associer un élément bien déterminé de $(\mathbf{Z}/k)^*/\{\pm 1\}$ défini par $d(\xi) = \overline{\text{dét}\,(\bar{g}^{-1}\xi)} \in (\mathbf{Z}/k)^*/\{\pm 1\}$. Si $d(\xi) = 1$, ξ peut être induit par un isomorphisme de F sur F' et dans ce cas $N \overset{Q}{\cong} N'$. Réciproquement, si $N \overset{Q}{\cong} N'$, un Q-isomorphisme de N sur N' induit d'abord un isomorphisme de F sur F' qui à son tour induit un isomorphisme $\xi : F/F^{(k)} \to F'/(F')^k$ tel que $d(\xi) = 1$.

LEMME 2.2. *Si les deux extensions $T \rightarrowtail N \twoheadrightarrow F$ et $T' \rightarrowtail N' \twoheadrightarrow F'$ sont faiblement équivalentes, alors*

i) *pour tout groupe abélien de type fini A tel que $h(A) \geq 1$ et qui est muni d'une Q-action triviale, $N \times A \overset{Q}{\cong} N' \times A$*

ii) $N^{\Phi(k)/2} \overset{Q}{\cong} N'^{\Phi(k)/2}$, *où k est comme dans la définition* 2.2.

Preuve. i) Il suffit de montrer que $N \times \mathbf{Z} \simeq N' \times \mathbf{Z}$. On considère alors l'isomorphisme $\xi : F/F^{(k)} \to F'/(F')^{(k)}$ que l'on prolonge en un isomorphisme η de $F/F^{(k)} \times$

$\mathbf{Z}/k$ sur $F'/(F')^{(k)} \times \mathbf{Z}/k$ en posant $\eta = \xi$ sur $F/F^{(k)}$ et $\eta =$ multiplication par un représentant de $d(\xi)^{-1}$ dans $\mathbf{Z}/k$ sur $\mathbf{Z}/k$. Puisque $d(\eta) = 1$, η est induit par un Q-isomorphisme de $F \times \mathbf{Z}$ sur $F' \times \mathbf{Z}$ et la conclusion découle des remarques précédentes appliquées aux extensions $T \rightarrowtail N \times \mathbf{Z} \twoheadrightarrow F \times \mathbf{Z}$ et $T \rightarrowtail N' \times \mathbf{Z} \twoheadrightarrow F' \times \mathbf{Z}$

ii) $\xi : F/F^{(k)} \to F'(F')^{(k)}$ détermine un isomorphisme $\xi^n : (F/F^{(k)})^n \to (F'/(F')^{(k)})^n$ et $d(\xi)^n = d(\xi)^n$. La conclusion est alors une conséquence du fait que $d(\xi)^{\phi(k)/2} = 1$.

THÉORÈME 2.2. *Si M, $N \in \mathfrak{Q}_0$, les quatre conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $QF(M) = QF(N)$

ii) $M^n \overset{Q}{\cong} N^n$ *pour un certain* $n \in \mathbf{N}$

iii) $M \times A \overset{Q}{\cong} N \times A$ *pour tout groupe abélien de type fini A tel que $h(A) \geq 1$ et sur lequel on fait opérer Q trivialement.*

iv) $\hat{M} \overset{Q}{\cong} \hat{N}$.

Preuve. Le théorème 2.1 montre que chacune des conditions i), ii) et iii) implique iv). La preuve que iv) entraîne i), ii) et iii) est similaire à celle de [16], théorème 2. En particulier, pour montrer que iv) entraîne ii) et iii), il suffit d'après le lemme précédent de montrer que M et N peuvent être décrites par des extensions faiblement équivalentes.

Si G est un Q-groupe, nous désignons par $\hat{G}_p$ le complété p-adique de G muni de sa structure naturelle de Q-groupe, c'est-à-dire $\hat{G}_p = \varprojlim G/G^{(p^k)}$. On prouve de la même façon que dans [16], les résultats suivants:

LEMME 2.3. *Si M et N sont des Q-groupes nilpotents de type fini, alors $QF(M) = QF(N)$ si et seulement si $\hat{M}_p \overset{Q}{\cong} \hat{N}_p$ pour tout premier p.*

LEMME 2.4. *Si M et N sont des Q-groupes nilpotents de type fini tels que $M \in QG_M(N)$, alors $\hat{M}_p \overset{Q}{\cong} \hat{N}_p$ et $M_0 \overset{Q}{\cong} N_0$.*

Pour les Q-groupes nilpotents de type fini, la définition du Q-genre (Pickel), noté $QG_P(-)$. est la suivante:

DÉFINITION 2.3. $M \in QG_P(N)$ si et seulement si $QF(M) = QF(N)$ et $M_0 \overset{Q}{\cong} N_0$.

Les lemmes 2.3 et 2.4 montrent que $M \in QG_M(N)$ entraîne que $M \in QG_p(N)$. La réciproque n'est pas vraie en général et cela même dans le cas des groupes sans opérateurs ainsi que l'ont montré Belfi et Wilkerson ([1], corollaire 4.2). Cependant, si nous nous limitons à la catégorie $\mathfrak{Q}_0$, alors $M \in QG_P(N)$ entraîne $M \in QG_M(N)$ (voir théorème 2.4).

THÉORÈME 2.3. *Si M et N sont des Q-groupes nilpotents de type fini et si l'on a une des conditions:*

i) $M^n \overset{Q}{\cong} N^n$ *pour un certain* $n \in \mathbf{N}$, *ou*

ii) $M \times L \overset{Q}{\cong} N \times L$ *pour un certain Q-groupe nilpotent de type fini L, alors* $M \in QG_p(N)$.

THÉORÈME 2.4. *Soient M, $N \in \mathcal{Q}_0$. Les six conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $QF(M) = QF(N)$

ii) $M^n \overset{Q}{\cong} N^n$ *pour un certain* $n \in \mathbf{N}$

iii) $M \times A \overset{Q}{\cong} N \times A$ *pour tout groupe abélien de type fini A tel que* $h(A) \geq 1$ *et sur lequel on fait opérer Q trivialement*

iv) $\hat{M} \overset{Q}{\cong} \hat{N}$

v) $\hat{M}_p \overset{Q}{\cong} \hat{N}_p$ *pour tout premier p*

vi) $M_p \overset{Q}{\cong} N_p$ *pour tout premier p.*

Le théorème 2.3 se prouve comme dans [16] et le théorème 2.4 est déjà essentiellement prouvé; en effet, les cinq premières conditions sont équivalentes d'après le théorème 2.2 et le lemme 2.3; d'après le lemme 2.4, vi) implique v); enfin iii) entraîne vi) se démontre comme le corollaire 1 dans [12] ainsi que nous le remarquons dans les commentaires suivant le théorème 1.5; dans ce cas, Mislin ne fait pas appel au foncteur $H^2(-,-)$ et le résultat est valide dans $\mathcal{Q}_0$ (et non seulement $\mathcal{M}_0$).

THÉORÈME 2.5. *Pour $N \in \mathcal{Q}_0$, $|QG_M(N)| = |QG_P(N)| \leq \phi(k)/2$ où ϕ est la fonction d'Euler et $k = \exp T(\nu_Q^1 N)$.*

Preuve. Puisque $\nu_Q^1 N$ est abélien et muni d'une Q-action triviale, le genre de $\nu_Q^1 N$ est trivial ([4], proposition 3.3); par ailleurs, $\nu_Q^1(-)$ est un invariant du Q-genre car $(\nu_Q^1 N)_p \overset{Q}{\cong} \nu_Q^1(N_p)$. On peut donc pour chaque $M \in QG_M(N)$ choisir le même entier $k = T(\nu_Q^1 N)$ dans le lemme 2.1 et si M, $M' \in QG_M(N)$, les extensions $T \rightarrowtail N \twoheadrightarrow F_N$, $T \rightarrowtail M \twoheadrightarrow F_M$ et $T \rightarrowtail M' \twoheadrightarrow F_{M'}$ obtenues comme dans le lemme 2.1 sont deux-à-deux faiblement équivalentes d'après le théorème 2.4 (nous avons en effet indiqué dans la preuve du théorème 2.2 que si $\hat{M} \overset{Q}{\cong} \hat{N}$, alors il existe une équivalence faible entre les extensions correspondant à M et N).

Supposons maintenant que $\xi_M : F_n/(F_n)^{(k)} \xrightarrow{\simeq} F_M/(F_M)^{(k)}$ et $\xi_{M'} : F_N/(F_N)^{(k)} \xrightarrow{\simeq} F_{M'}/(F_{M'})^{(k)}$ induisent des équivalences faibles entre les extensions correspondantes telles que $d(\xi_M) = d(\xi_{M'})$. Il existe alors $g : F_N \xrightarrow{\simeq} F_M$ et $h : F_N \xrightarrow{\simeq} F_{M'}$ tels que dét $(\bar{g}^{-1}\xi_{M'}) =$ dét $(\bar{h}^{-1}\xi_{M'})$. Il est clair que $\xi_{M'} \circ \xi_M^{-1} : F_M/(F_M)^{(k)} \xrightarrow{\simeq} F_{M'}/(F_{M'})^{(k)}$

induit une équivalence faible et que dét $(\bar{g}\bar{h}\xi_{M'}\xi_M^{-1}) = \pm 1$. Il découle alors des remarques précédant le lemme 2.2 que $M \overset{Q}{\cong} M'$.

Nous avons montré que nous pouvons associer à chaque élément de $QG_M(N)$ un élément $\bar{a} \in (Z/k)^*/\{\pm 1\}$ et que l'application ainsi obtenue est injective; en particulier, $|QG_M(N)| = |QG_P(N)| \leq |(\mathbf{Z}/k)^*\{\pm 1\}| = \phi(k)/2$.

Notons que Mislin a obtenu une borne supérieure pour $|G_M(N)|$ en montrant qu'il existe une surjection $(\mathbf{Z}/k)^*/\{\pm 1\} \twoheadrightarrow G_M(N)$ alors que nous obtenons un résultat analogue pour $|QG_M(N)|$ en démontrant l'existence d'une injection $QG_M(N) \rightarrowtail (\mathbf{Z}/k)^*/\{\pm 1\}$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Belfi, V. and Wilkerson, C. *Some examples in the theory of P-completions.* Indiana Univ. J. Math. (à paraître).
2. Hilton, P. J., *Localization and cohomology of nilpotent groups.* Math. Z. *132* (1973). 263–286.
3. ——, *Nilpotent actions on nilpotent groups.* Lecture Notes in Math. *450,* Springer (1975), 174–196.
4. ——, *Localization in topology.* Amer. Math. Monthly *82* (1975), 113–131.
5. Hilton, P. J. and Mislin G., *On the genus of a nilpotent group with finite commutator subgroup.* Math. Z. *146* (1976), 201–211.
6. Hilton, P. J., Mislin, G., Roitberg, J. *Sphere bundles over spheres and non-cancellation phenomena.* Lecture Notes in Math. *249,* Springer (1971), 34–46.
7. Hilton, P. J. and Roitberg, J., *On proncipal S^3-bundles over spheres.* Ann. Math. *98* (1969), 91–107.
8. Hilton, P. J. and Stammbach, U., *On group actions on groups and associated series.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. *80* (1976), 43–55.
9. Lemaire, C. *A new bound for the genus of a nilpotent group.* Comment. Math. Helv. *51* (1976), 163–169.
10. Mislin, G., *The genus of an H-space,* Lecture Notes in Math. *249,* Springer (1971), 75–83.
11. ——, *Cancellation properties of H-spaces.* Comment Math. Helv. *49* (1974), 195-200.
12. ——, *Nilpotent groups with finite commutator subgroups.* Lecture Notes in Math. *418,* Springer (1974), 103–118.
13. Pickel, P. F., *Finitely generated nilpotent groups with isomorphic finite quotients.* Trans. Amer. Math. Soc. *160* (1971), 327–341.
14. Roitberg, J., *Rational Lie algebras and p-isomorphisms of nilpotent groups and homotopy types.* Comment Math. Helv. *50* (1975), 1–8.
15. Stammbach, U., *Homology in Group Theory.* Lecture Notes in Math. *359,* Springer (1973).
16. Warfield, R. B., *Genus and cancellation for groups with finite commutator subgroup.* J. Pure and Applied Alg. *6* (1975), 125–132.
17. ——, *Nilpotent Groups.* Lect. Notes in Math. *513,* Springer (1976).
18. Zabrodsky, A., *On the genus of finite CW-H-spaces,* Comment Math. Helv. *49* (1974), 48–64.

Dept. de Mathématiques
Université Laval
Cité Universitaire ●
Quebec, Canada
61*K* 7*P*4

Reçu le 22 Juillet 1977