Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 53 (1978)

Artikel: Ein geometrisches Endlichkeitskriterium für Untergruppen von Aut (C, 0) und holomorphe 1-codimensionale Blätterungen.

Autor: Kaup, Burchard

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40768

Comment. Math. Helvetici **53** (1978) 295–299 Birkhäuser Verlag, Basel

Ein geometrisches Endlichkeitskriterium für Untergruppen von Aut (C, 0) und holomorphe 1-codimensionale Blätterungen

BURCHARD KAUP

1. Bezeichnungen, Ergebnisse

Es sei Aut $(\mathbf{C}, 0)$ die Gruppe (bezüglich der Komposition) der Keime von biholomorphen Abbildungen zwischen offenen Umgebungen von 0 in $\mathbf{C}$, welche 0 als Fixpunkt haben. Ist $\Phi: U \to V$ ein Repräsentant von $\varphi \in \text{Aut}\ (\mathbf{C}, 0)$ und $z \in U$, so sei

$$B_{(\Phi,\, U)}(z) := \{x \in U;\ \exists p \in \mathbf{N} \text{ mit } \Phi^{\nu}(z) \in U \text{ für } 0 \leqslant \nu \leqslant p \text{ und } \Phi^{p}(z) = x\}.$$

(dabei sei $\Phi^{o}(z) := z$, $\Phi^{\nu+1}(z) := \Phi(\Phi^{\nu}(z))$ für $\nu \geqslant 0$, falls $\Phi^{\nu}(z) \in U$.) $B_{(\Phi,\, U)}(z)$ heisst Bahn von Φ in U durch z.

SATZ 1. *Es sei $G \subset \text{Aut}\ (\mathbf{C}, 0)$ eine endlich erzeugbare Untergruppe. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*
(1) *G ist endlich.*
(2) *Jedes $\varphi \in G$ besitzt als Repräsentanten eine biholomorphe Abbildung $\Phi: U \to V$ mit folgender Eigenschaft: für jedes $z \in U$ ist $B_{(\Phi,\, U)}(z)$ endlich.*
(3) *Alle Elemente von G haben endliche Ordnung.*
(4) *G ist abelsch und hat ein Erzeugendensystem von Elementen endlicher Ordnung.*

Zum Beweis von Satz 1 benötigen wir

SATZ 2. *Es seien U, V offene Umgebungen von 0 im $\mathbf{R}^n$, $f: U \to V$ sei ein Homöomorphismus mit $f(0) = 0$. Die Menge*

$$A := \{x \in U;\ \exists p \in \mathbf{N} \text{ mit } p \geqslant 1,\ f^{\nu}(x) \in U \text{ für } 1 \leqslant \nu \leqslant p,\ f^{p}(x) = x\}$$

sei höchstens abzählbar. Dann gibt es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ *mit* $B_\varepsilon := \{x \in \mathbf{R}^n; \|x\| < \varepsilon\} \subset U \cap V$ *ein* $z \in B_\varepsilon$, *für welches* $B_{(f, B_\varepsilon)}(z)$ *oder* $B_{(f^{-1}, B_\varepsilon)}(z)$ *unendlich ist.*

Eine leichte Folgerung von Satz 1 ist

SATZ 3. *Es sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit, versehen mit einer regulären holomorphen Blätterung. Alle Blätter seien kompakt und komplex*-1-*codimensional. Dann sind alle Holonomiegruppen der Blätterung endlich.*

In [7] wird Satz 3 mit anderen Methoden von H. Holmann für holomorphe Blätterungen auf komplexen Räumen (vgl. [4]) bewiesen, bei denen alle Blätter kompakt und (komplex) eins-codimensional sind. Weitere Erläuterungen zu Satz 3 befinden sich am Ende dieser Note.

Wie in [6] folgt aus Satz 3, dass (mit den Bezeichnungen von Satz 3) der Blätterraum M/B auf kanonische Weise eine Riemannsche Fläche und die kanonische Abbildung $\pi : M \to M/B$ holomorph und eigentlich ist.

2. Beweis der Sätze 1 und 2

In Satz 1 sind die Implikationen (1) $\Rightarrow$ (2) und (4) $\Rightarrow$ (1) trivial. Zum Nachweis von (3) $\Rightarrow$ (4) genügt es zu zeigen, dass der Homomorphismus H: $G \to \mathbf{C}^*$, $H(\varphi) := \varphi'(0)$, injektiv ist. Dazu sei $\varphi \in \text{Kern } H$, d.h. $H(\varphi) = 1$. Wäre φ nicht das neutrale Element von H, dann hätte φ eine Darstellung

$$\varphi(z) = z + a_p z^p + \dots \quad \text{mit} \quad p \geq 2,\ a_p \neq 0.$$

Man rechnet leicht nach, dass $\varphi^n(z) = z + n a_p z^p + \dots$ für $n \in \mathbf{N}$, folglich hätte φ nicht endliche Ordnung.

Die Implikation (2) $\Rightarrow$ (3) ergibt sich unmittelbar aus Satz 2, wenn man berücksichtigt, dass die Fixpunktmenge einer holomorphen Funktion $f : U \to V$ (U, V offen und zusammenhängend in $\mathbf{C}$) diskret ist, falls $f(z) \not\equiv z$.

Beweis von Satz 2. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wähle $r < \varepsilon$ mit $\bar{B}_r \subset U$. Für $p \in \mathbf{N}_+$ definiere

$$\hat{E}_p := \{x \in B_r;\ f^\nu(x) \in B_r \quad \text{für} \quad 1 \leq \nu \leq p\}.$$

$\hat{E}_p$ ist eine offene Teilmenge von B_r, die 0 enthält. Es sei E_p die Zusammenhangskomponente von $\hat{E}_p$, die 0 enthält. Dann gilt $B_r \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots$. Es sei $F := f(B_r)$.

1. FALL $E_{p_o} \in \mathbf{N}$ mit $E_{p_o} \subset F$. Dann ist $f(E_{p+1}) = E_p$ für $p \geqslant p_o$. Denn: für beliebiges p ist $f(\hat{E}_{p+1}) \subset \hat{E}_p$, also auch $f(E_{p+1}) \subset E_p$; andererseits gilt $E_p \subset f(\hat{E}_{p+1})$ (also auch $E_p \subset f(E_{p+1})$, weil f ein Homöomorphismus ist) für $p \geqslant p_o$, denn zu $x \in E_p \subset E_{p_o} \subset F$ gibt es $y \in B_r$ mit $x = f(y)$; da $f^\nu(x) \in B_r$ für $1 \leqslant \nu \leqslant p$, ist $f^\nu(y) \in B_r$ für $1 \leqslant \nu \leqslant p+1$, also $y \in \hat{E}_{p+1}$, folglich $x \in f(\hat{E}_{p+1})$. —Also ist $E_p = f(E_{p+1})$ für $p \geqslant p_o$.

Wähle $x_o \in E_{p_o} \backslash A$, so ist $x_\nu := f^{-\nu}(x_o) \in E_{p_o+\nu}$ wohldefiniert für alle $\nu \in \mathbf{N}_+$ und $(x_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ ist eine unendliche f^{-1}-Bahn in B_ε.

2. FALL $\bigcap_{p \geqslant 1} \bar{E}_p \not\subset A$. Dann wähle man $x_o \in (\bigcap_{p \geqslant 1} \bar{E}_p) \backslash A$. Für $x_o \in \bar{E}_p$ ist $f^p(x_o) \in \bar{B}_r$; folglich ist $(f^\nu(x_o))_{\nu \in \mathbf{N}}$ eine unendliche f-Bahn in $\bar{B}_r \subset B_\varepsilon$.

DER DRITTE FALL, dass nämlich $E_p \not\subset F$ für alle p und $\bigcap_{p \geqslant 1} \bar{E}_p \subset A$, kann nicht auftreten, denn anderfalls wäre

$$\partial B_\rho \cap \bigcap_{p \geqslant 1} \bar{E}_p \neq \varnothing \quad \text{für jedes} \quad \rho > 0 \quad \text{mit} \quad \bar{B}_\rho \subset F, \tag{*}$$

das widerspricht aber $\bigcap_{p \geqslant 1} \bar{E}_p \subset A$ und der Voraussetzung, dass A höchstens abzählbar ist.

Beweis von (*): Für festes p und ρ mit $\bar{B}_\rho \subset F$ gilt: $0 \in E_p \cap B_\rho$, $\bar{B}_\rho \subset F$, $E_p \not\subset F$, B_ρ und E_p sind zusammenhängend; folglich ist $\partial B_\rho \cap E_p \neq \varnothing$, insbesondere $\partial B_\rho \cap \bar{E}_p \neq \varnothing$, und wegen $\bar{E}_1 \supset \bar{E}_2 \supset \ldots$, folgt (*) aus dem Cantorschen Durchschnittssatz.

BEISPIELE. Die Voraussetzung in Satz 2, dass A höchstens abzählbar ist, ist wesentlich, wie folgendes Beispiel zeigt: Definiere f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ durch $f(x, y) := (x+y, y)$. Dann ist $A = \{(x, 0); x \in \mathbf{R}\}$ nicht abzählbar. Eine beliebige Bahn von f im $\mathbf{R}^2$ hat die Gestalt $\{(x+ny, y);\ n \in \mathbf{N}\}$; sie besteht also entweder aus einem Punkt (falls $y = 0$) oder sie ist unendlich und unbeschränkt; Analoges gilt für Bahnen von f^{-1}.

Bezeichnet $G \subset GL(2, \mathbf{C}) \subset \mathrm{Aut}\ (\mathbf{C}^2, 0)$ die durch $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugte Untergruppe, dann ist G unendlich; für beliebiges $\varphi \in G$ und beschränktes $U \subset \mathbf{C}^2$ sind andererseits alle Bahnen $B_{(U, \varphi)}(z)$ endlich. Satz 1 lässt sich also nicht direkt verallgemeinern für Untergruppen von Aut ($\mathbf{C}^n$, 0) für $n \geqslant 2$.

3. Reguläre holomorphe Blätterungen; Beweis von Satz 3.

Es sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit. Eine reguläre holomorphe Blätterung von M ist eine Menge $B = \{(U_i, \varphi_i);\ i \in I\}$ von paarweise verträglichen lokalen regulären holomorphen Blätterungen von M mit $\bigcup_{i \in I} U_i = M$; unter einer lokalen regulären holomorphen Blätterung von M verstehen wir dabei ein Paar (U, φ), wobei U eine offene Teilmenge von M ist und $\varphi\colon U \to B \times V$ eine biholomorphe Abbildung auf ein Produkt zweier Gebiete $B \subset \mathbf{C}^{n_1}$, $V \subset \mathbf{C}^{n_2}$. Zwei solche Paare (U_i, φ_i) mit $\varphi_i = (\varphi_{i1}, \varphi_{i2})\colon U_i \to B_i \times V_i$, $i = 1, 2$, heissen verträglich, wenn es zu jedem $x \in U_1 \cap U_2$ eine offene Umgebung U von x in $U_1 \cap U_2$ und eine biholomorphe Abbildung $\varphi\colon W_1 \to W_2$ gibt zwischen offenen Umgebungen W_i von $\varphi_{i2}(x)$ in V_i mit $\varphi_{i2}(U) \subset W_i$ für $i = 1,2$ und $\varphi \circ \varphi_{12} = \varphi_{22}$ über U.

Jede reguläre holomorphe Blätterung ist eine differenzierbare Blätterung im Sinne von [3]; damit sind die Blätter einer regulären holomorphen Blätterung wohldefiniert. Falls alle Blätter kompakt sind (was wir ab jetzt stets voraussetzen wollen), kann man jedem Blatt eine Holonomiegruppe zuordnen; alle Holonomiegruppen sind endlich erzeugbar. Ist (U, φ) mit $\varphi: U \to B \times V$ ein Element der Blätterung B und sind alle Blätter (komplex) 1-codimensional, so ist V eindimensional; ist $x \in U$ und L das Blatt durch x, so kann man die Holonomiegruppe G von L auffassen als Untergruppe von Aut $(\mathbf{C}, \varphi_2(x))$. Wäre G nicht endlich, gäbe es wegen Satz 1 ein Element $g \in G$ derart, dass g in jeder Umgebung von $\varphi_2(x)$ in V eine unendliche g-Bahn hat.

Das kann aber nicht sein, denn alle Elemente einer g-Bahn liegen im gleichen Blatt (dabei nehmen wir an, dass V eine Teilmenge von M ist und genügend klein gewählt wurde); weil alle Blätter kompakt sind, muss der Durchschnitt eines beliebigen Blattes mit einer relativkompakten Umgebung $\bar{V}$ von $\varphi_2(x)$ in V stets endlich sein.

4. Bemerkungen zu Satz 3

Es gibt einfache Beispiele für nicht-kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeiten M mit (reell) 2-codimensionalen Blätterungen, bei denen alle Blätter kompakt sind, wo jedoch unendliche Holonomiegruppen auftreten (vgl. [2]). Ist jedoch M kompakt, sind alle Holonomiegruppen endlich (vgl. [2], [1], [10]).

Bei ($\geqslant 4$)-codimensionalen differenzierbaren Blätterung mit kompakten Blättern können, auch bei kompaktem M, unendliche Holonomiegruppen auftreten (vgl. [9]).

Holomorphe Blätterungen wurden von H. Holmann in [4] definiert; reguläre holomorphe Blätterungen sind spezielle holomorphe Blätterungen im Sinne von

[4]. Satz 3 wird in [7] mit anderen Methoden für holomorphe Blätterungen auf komplexen Räumen mit kompakten Blättern der Codimension 1 bewiesen. (Vgl. auch [5] und [6]).

LITERATUR

[1] EDWARDS, R., MILLET, K., SULLIVAN, D., *Foliations with all leaves compact.* Publ. I. H. E. S., 1975.
[2] EPSTEIN, B. D. A., *Periodic flows on three-manifolds.* Annals of Math. *95*, 68–82 (1972).
[3] EPSTEIN, B. D. A., *Foliations with all leaves compact.* Publ. I. H. E. S. 1974.
[4] HOLMANN, H., *Holomorphe Blätterungen komplexer Räume.* Comment. math. Helv. 47, 185–204 (1972).
[5] HOLMANN, H., *Analytische periodische Strömungen auf kompakten komplexen Räumen.* Comment. Math. Helv. 52, 251–257 (1977).
[6] HOLMANN, H., *Holomorphe Transformationsgruppen mit kompakten Bahnen, Proceedings of the third Rumanian-Finnish Seminar on Complex Analysis,* Bucharest 1976.
[7] HOLMANN, H., *Holomorphe Blätterungen mit kompakten Blättern.* erscheint demnächst.
[8] REEB, G., *Sur certaines proprietés topologiques des variétés feuilletées.* Act. Sci. et Ind. No 1183, Herman Paris 1952.
[9] SULLIVAN, D., *A counterexample to the periodic orbit conjecture.* Publ. I. H. E. S. No 46 (1976).
[10] VOGT, E., *Foliations of codimension 2 with all leaves compact.* Manuscripta math., 18, 187–212 (1976).

Math. Inst. der Universität
CH-1700 FRIBOURG

Eingegangen den 14. Juli 1977

Buchanzeigen

ISTITUTO NAZIONALE DI ALTA MATEMATICA
Verlag: Academic Press Inc., London
INSTITUTIONES MATHEMATICAE

Volume I, R. Conti, Linear Differential Equations and Control, 178 pp. 1976, L6.00, $11.75

Volume II, G.da Prato, Applications croissantes et équations d'évolutions dans les espaces de Banach, 148 pp. 1977, L6.00, $11.75.

CHARLES O. CHRISTENSON and WILLIAM L. VOXMAN, **Aspects of Topology** (Pure and Applied Mathematics, Vol. 39) 536 pages, illustrated, Fr. 66.–Marcel Dekker, Inc. New Work N.Y. 1977

0. Preliminaries – 1. The Basis Constructs – 2. Connectedness and Compactness – 3. Metric Spaces – 4. Normality and Other Separation Properties – 5. Plane Theorems – 6. The Product Topology and Inverse Systems – 7. Function Spaces, Weak Topologies, and Hilbert Space – 8. Quotient Spaces – 9. Continua – 10. Paracompactness and Metrizability – 11. Nets and Filters – 12. The Algebraization of Topology – 13. Covering Spaces – 14. Some Elements of Simplicial Theory – 15. Further Applications of Homotopy – 16. 2-Manifolds – 17. An Introduction to n-Manifolds – 18. Upper Semicontinuous Decompositions – Appendix – Bibliography – Index.

Numerische Methoden bei Optimierungsaufgaben, Band 3 (ISNM Vol. 36): Optimierung bei graphentheoretischen und ganzzahligen Problemen. Herausgegeben von C. Collatz, G. Meinardus, W. Wetterling. Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1977, 216 Seiten, Fr. 42.

Beiträge von R. E. Burkard – H. Hamacher, U. Zimmermann, L. Collatz, B. Dejon, R. Halin, P. L. Hammer, W. P. A. van der Heyden, H. Th. Jongen, E. Köhler, J. Karup – O. Bilde, K. Kubik – M. Drenthen, K. Neumann, R. Redheffer.

WERNER GÄHLER, **Grundstrukturen der Analysis I.** Lehrbücher und Monographien der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe Band 58, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1977, 412 Seiten, Fr. 64.

1. Mengenlehre – 2. Filtertheorie – 3. Limesräume – 4. Limesuniforme Räume – Verzeichnisse.

JOSEPH E. KUCZKOWSKI and JUDITH L. GERSTING, **Abstract Algebra, a first look.** (Pure and Applied Mathematics: A Series of Monographs and Textbooks, Vol. 38), 366 pages, illustrated, Marcel Dekker, Inc. New York 1977, Fr. 58.

1. Methods of Reasoning – 2. Some Algebraic Structures – 3. Substructures – 4. Building New Structures – 5. Morphisms – 6. An Introduction to the Fundamental Homomorphism Theorems – 7. The Fundamental Homomorphism Theorems Revisited – 8. Pulling a Few Things Together – 9. An Introduction to Category Theory. Index.

Differential Games and Controll Theory II. Edited by Emilio O. Roxin, Pan-Tai Liu and Robert Sternberg (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 30) Marcel Dekker, Inc, New York. N.Y., 504 pages, illustrated, 1977, Fr. 115.

Symposia mathematica. Volume XX, Istituto Nazionale di Alta Matematica. Academic Press London and New York 1976, 578 pp. £17·70/$34.50.

Algebre C^* e Loro Applicazioni in Fisica Teorica, 12–18 Marzo 1975 – Teoria degli Operatori, Indice e Teoria K, 13–18 Ottobre 1975.

Combinatorial Surveys: Proceedings of the Sixth British Combinatorial Conference, edited by Peter J. Cameron, 226 pages £7·00/$13.65, Academic Press Inc., London 1977.

B. Buekenhout, What is a subspace – P. J. Cameron, Extensions of designs – L. Lovasz, Flats in matroids and geometric graphs – D. K. Ray-Chaudhuri, Combinatorial characterization theorems for geometric incidence structures – N. J. A. Sloane, Binary codes, lattices and sphere-packings – A. T. White, Graphs of groups on surfaces – D. R. Woodall, Zeros of chromatic polynomials. Index.