Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 53 (1978)

Artikel: Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique.

Autor: Banyaga, Augustin

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40763

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici **53** (1978) 174–227 Birkhäuser Verlag, Basel

Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique

AUGUSTIN BANYAGA

Introduction

Soit M une variété différentiable de classe C^∞ paracompacte connexe de dimension n. Si $\mathrm{Diff}^k(M)_0$ est le groupe des difféomorphismes h de M de classe C^k tels qu'il existe une C^k-isotopie H de h à l'identité, fixe en dehors d'un compact, les travaux d'Epstein [7], Herman [8], Mather [11] et Thurston [17], montrent que pour tout $k=0, 1, \ldots, \infty$ $k \neq n+1$, $\mathrm{Diff}^k(M)_0$ est un groupe simple.

Par contre, si M est une variété différentiable de classe C^∞ close et connexe de dimension n et si G_M^v est la composante connexe de l'identité dans le groupe des difféomorphismes de M de classe C^∞, qui préservent une forme-volume sur M, G_M^v n'est pas simple. Thurston [16] a montré que l'abélianisé $H_1(G_M^v) = G_M^v/[G_M^v, G_M^v]$ de G_M^v est isomorphe à un quotient de $H^{n-1}(M, \mathbf{R})$, mais cependant que $[G_M^v, G_M^v]$ est un groupe simple.

Nous démontrons ici un résultat analogue pour le groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique. Plus précisément, soit (M, Ω) une variété différentiable de classe C^∞ close et connexe, munie d'une forme symplectique Ω et soit $G_\Omega(M)$ la composante connexe de l'identité dans le groupe des difféomorphismes de classe C^∞ de M qui préservent la forme Ω. Nous démontrons que $H_1(G_\Omega(M))$ est isomorphe à un quotient de $H^1(M, \mathbf{R})$ et que $[G_\Omega(M), G_\Omega(M)]$ est un groupe simple. La démonstration de ce résultat occupera le chapitre III de ce travail. L'idée de la démonstration est de raffiner et d'adapter au cas symplectique les techniques employées par Thurston pour démontrer les résultats de [16] et [17].

Nous obtenons aussi quelques résultats dans le cas où la variété symplectique (M, Ω) est non compacte. Le résultat fondemantal dans le cas non compact (théorème II.6.2) dit qu'un certain sous-groupe de $[G_\Omega(M), G_\Omega(M)]$ est simple. Par exemple il découle immédiatement de ce théorème qus si (M, Ω) est une variété symplectique ouverte, connexe dont le $H_c^1(M, R) = 0$, alors $[G_\Omega(M), G_\Omega(M)]$ est simple et $H_1(G_\Omega(M))$ est isomorphe à un quotient de $\mathbf{R}$.

Nous démontrons aussi que si Ω est exacte et que si la dimension de M est au moins 4, alors $H_1(G_\Omega(M)) \cong H_c^1(M, \mathbf{R}) \oplus \mathbf{R}$ et $[G_\Omega(M), G_\Omega(M)]$ est simple. Ceci

est une conséquence du théorème II.6.2 et de quelques constructions données au chapitre II.

Les méthodes de ce papier et le résultat principal (théorème II.6.2) ont permis à G. Rousseau [13] de déterminer la structure du groupe $G_\Omega(M)$ dans le cas où M n'est pas compacte. En particulier, il retrouve par une méthode différente notre résultat ci-dessus concernant les variétés à formes symplectiques exactes.

Le chapitre I est consacré aux préliminaires. Nous y rassemblons quelques notions et résultats classiques qui interviendront dans la suite et nous y démontrons quelques faits qui seront utilisés dans le courant de ce travail.

Au chapitre II, nous construisons les invariants qui jouent un rôle clé dans l'étude du groupe des difféomorphismes symplectiques. Ces invariants se trouvent être des homomorphismes de $G_\Omega(M)$ ou de ses sous-groupes à valeur dans certains groupes abéliens. Les résultats de ce travail, énoncés dans ce chapitre, concernent la structure des noyaux de ces homomorphismes.

Le chapitre III est consacré aux démonstrations des résultats.

Tous les objets considérés ici sont de classe C^∞ et le mot "différentiable" signifiera "de classe C^∞." Les espaces d'applications seront toujours munis de la topologie C^∞.

Les résultats démontrés ici ont été annoncés dans [2], [3].

Ce papier est à quelques modifications près, la thèse que j'ai présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Genève. Les modifications sont les suivantes: le chapitre concernant les difféomorphismes qui préservent une forme de contact a été omis. Les résultats de ce chapitre seront publiés ailleurs. En outre, on a inséré quelques compléments sur les difféomorphismes d'une variété symplectique non compacte.

Je suis très heureux d'exprimer ma profonde reconnaissance au Professeur André Haefliger, qui a dirigé ma thèse, pour le rôle essentiel qu'il a joué dans ma formation de mathématicien, et particulièrement dans l'élaboration de ce travail. Par son aide vraiment efficace, ses encouragements et ses enseignements, il a été pour moi un Maître remarquable; il m'a notamment communiqué et longuement expliqué les détails non publiés des démonstrations des résultats de [17] de Thurston, (voir [4]).

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

I. - QUELQUES RESULTATS ET NOTIONS PRELIMINAIRES

1. Isotopies et familles de champs de vecteurs
2. Formes symplectiques
3. Plongement symplectique des boules

II. - CONSTRUCTION DES INVARIANTS ET ENNONCE DES RESULTATS

1. L'invariant S
2. L'invariant S comme obstruction à l'extension des isotopies symplectiques
3. Quelques propriétés du groupe Ker $S(M)$
4. L'invariant R
5. L'invariant μ
6. Ennoncé des résultats

III. - DEMONSTRATIONS DES RESULTATS

1. L'invariant R et l'obstruction à l'extension des isotopies symplectiques
2. Recouvrement associé à une triangulation
3. Le lemme de fragmentation
4. L'ensemble simplicial $B\bar{G}$
5. Le groupe $H_1(B\overline{\mathrm{Ker}\, S(M)}, \mathbf{Z})$
6. Les difféomorphismes symplectiques du tore
7. Fin des démonstrations

BIBLIOGRAPHIE

CHAPITRE I

QUELQUES NOTIONS ET RESULTATS PRELIMINAIRES

1. Isotopies et familles de champs de vecteurs

Soit M une variété différentiable de classe C^∞. Le support d'un difféomorphisme h de M est l'adhérence de l'ensemble $\{x \in M \mid h(x) \neq x\}$. Nous désignerons par $\mathrm{Diff}^\infty(M)$ le groupe de tous les difféomorphismes de M de classe C^∞ à support compact. Soit $\mathrm{Diff}^\infty_K(M)$ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}^\infty(M)$ dont les éléments ont leur support dans un compact fixe K de M, muni de la C^∞-topologie. Alors $\mathrm{Diff}^\infty(M) = \lim_{\rightarrow} \mathrm{Diff}^\infty_K(M)$.

Soit I l'intervalle $[0, 1]$. Une isotopie est une application $c: I \to \mathrm{Diff}^\infty(M)$ telle que $c(0) = \mathrm{id}_M$ et telle que l'application $(t, x) \mapsto c(t)(x)$ de $I \times M$ dans M soit différentiable. Nous dirons qu'une isotopie est un chemin différentiable dans $\mathrm{Diff}^\infty(M)$ d'origine id_M. Un difféomorphisme h est dit isotope à id_M s'il existe une isotopie $c: I \to \mathrm{Diff}^\infty(M)$ telle que $c(1) = h$. Comme le groupe $\mathrm{Diff}^\infty(M)$ est localement connexe par arcs différentiables, la composante connexe de id_M dans $\mathrm{Diff}^\infty(M)$, notée $\mathrm{Diff}^\infty(M)_0$, est l'ensemble de tous les difféomorphismes isotopes à l'identité.

Une isotopie $h: I \to \mathrm{Diff}^\infty(M)$ définit un feuilletage sur $M \times I$ transverse aux fibres de la projection $M \times I \to I$. Soit $x \in M$; la feuille passant par $(x, 0)$ est l'ensemble $\{h_t(x)\}_{t \in I}$.

On définit une famille (différentiable) de champs de vecteurs $\dot{h}_t$ en posant:

$$\dot{h}_t(x) = \frac{dh_t}{dt}(h_t^{-1}(x)), \qquad x \in M$$

La famille de champs de vecteurs $\dot{h}_t$ est la projection sur M du champ de vecteurs sur $M \times I$ qui se projette sur le champ constant $\partial/\partial t$ de I et qui est tangent aux feuilles du feuilletage défini par l'isotopie h_t.

PROPOSITION I.1.1. *Soit $h_{s,t}$ une famille différentiable à 2-paramètres de difféomorphismes de M telle que $h_{0.0} = \mathrm{id}_M$. Si X_{st} et Y_{st} sont les familles de champs de vecteurs sur M définies par:*

$$X_{st}(x) = \frac{dh_{s,t}}{dt}(h_{s,t}^{-1}(x)); \qquad Y_{st}(x) = \frac{dh_{s,t}}{ds}(h_{s,t}^{-1}(x)), \qquad x \in M$$

alors, on a:

$$\frac{\partial X_{st}}{\partial s} = \frac{\partial Y_{st}}{\partial t} + [X_{st}, Y_{st}].$$

Démonstration. La famille $h_{s,t}$ définit un feuilletage sur $M \times (I \times I)$ transverse aux fibres de la projection $p: M \times (I \times I) \to (I \times I)$. Soient $\partial/\partial t$ et $\partial/\partial s$ les champs de vecteurs constants sur $I \times I$. Les champs $X' = X_{st} + \partial/\partial t$ et $Y' = Y_{st} + \partial/\partial s$ sont tangents aux feuilles. D'après le critère d'intégrabilité, $[X', Y']$ doit aussi être tangent aux feuilles. Or $p_*[X', Y'] = [\partial/\partial t, \partial/\partial s] = 0$. Donc $[X', Y']$ est vertical. Comme les fibres sont transverses aux feuilles, $[X', Y']$ doit être nul. Il en résulte:

$$0 = [X_{st}, Y_{st}] + \left[\frac{\partial}{\partial t}, Y_{st}\right] + \left[X_{st}, \frac{\partial}{\partial s}\right] = [X_{st}, Y_{st}] + \frac{\partial Y_{st}}{\partial t} - \frac{\partial X_{st}}{\partial s}.$$

La proposition est démontrée.

Soit $\Lambda(M) = \oplus \Lambda^p(M)$ l'algèbre des formes différentielles sur M. Pour tout champ de vecteurs X, on définit les opérations de dérivée de Lie L_X et de produit intérieur $i(X)$. La dérivée de Lie L_X est l'unique dérivation de l'algèbre $\Lambda(M)$ de

degré 0, déterminée par les conditions suivantes:

$$L_X(f) = df(X), \qquad L_X(df) = dL_X(f)$$

pour toute fonction f.

Le produit intérieur $i(X)$ est l'antidérivation de degré -1 qui à la p-forme α associe la $(p-1)$-forme $i(X)\alpha$ telle que pour $(p-1)$ champs de vecteurs $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{p-1}$, on ait:

$$(i(X)\alpha)(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{p-1}) = \alpha(X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{p-1}).$$

Si d est la différentielle extérieure, on a les formules suivantes:

$$L_X = di(X) + i(X)d$$

$$i([X, Y]) = L_X i(Y) - i(Y)L_X.$$

Les propositions suivantes (I.1.2 et I.1.3) sont des faits bien connus que nous utiliserons fréquemment dans la suite.

PROPOSITION I.1.2. *Soit α_t une famille de formes différentielles sur une variété compacte M. Il y a équivalence entre les énnoncés suivants:*

(i) *Il existe une isotopie h_t de M telle que $h_t^*\alpha_t = \alpha_0$*

(ii) *Il existe une famille de champs de vecteurs X_t telle que $L_{X_t}\alpha_t + \partial\alpha_t/\partial t = 0$*

Démonstration (cf [12]). La proposition résulte immédiatement de la formule suivante:

$$\frac{d}{dt}(h_t^*\alpha_t) = h_t^*\left(L_{\dot{h}_t}\alpha_t + \frac{\partial \alpha t}{\partial t}\right).$$

PROPOSITION I.1.3. *Soit α une forme fermée et soit h_t une isotopie, alors*

$$h_t^*\alpha - \alpha = d\beta_t \quad \textit{avec} \quad \beta_t = \int_0^t h_s^*(i(\dot{h}_s)\alpha)\, ds.$$

Démonstration.

$$\frac{d}{ds}(h_s^*\alpha) = h_s^*(L_{\dot{h}_s}\alpha) = h_s^*(di(\dot{h}_s)\alpha) = d(h_s^*(i(\dot{h}_s)\alpha)).$$

On a donc:

$$h_t^*\alpha - \alpha = \int_0^t \frac{d}{ds}(h_s^*\alpha)\, ds = d\left[\int_0^t h_s^*(i(\dot{h}_s)\alpha))\, ds\right].$$

D'où la proposition

2. Formes symplectiques

Une *forme-volume* sur une variété différentiable M de dimension n est une n-forme partout non nulle. Une telle forme existe si et seulement si M est orientée.

Une *forme symplectique* sur une variété différentiable de dimension paire $2n$ est une 2-forme fermée Ω telle que $\Omega^n = \Omega \wedge \Omega \wedge \cdots \wedge \Omega$ soit une forme-volume. C'est une 2-forme de rang maximum: ceci veut dire que l'application μ qui associe à un champ de vecteurs X de M la 1-forme $i(X)\Omega$ est un isomorphisme de l'espace des champs de vecteurs tangents à M sur celui des 1-formes. Si M est munie d'une forme symplectique Ω, nous dirons que le couple (M, Ω) est une variété symplectique.

Soit f une fonction de classe C^∞ sur une variété symplectique (M, Ω). Le champ de vecteurs $X_f = \mu^{-1}(df)$ sera appelé le *gradient symplectique* de f. Si X est un champ de vecteurs tel que la 1-forme $i(X)\Omega$ soit exacte, une fonction f telle que $i(X)\Omega = df$ s'appelle un *hamiltonnien* de X.

Un champ de vecteur X sur (M, Ω) sera dit un *champ de vecteurs symplectique* si le groupe à 1-paramètre qu'il engendre préserve la forme Ω. Si X est un champ symplectique, on a: $L_X\Omega = 0$. Comme Ω est fermée, cette condition exprime que la 1-forme $i(X)\Omega$ est fermée.

Soit (M, Ω) une variété symplectique de dimension $2n$. Pour tout point x de M, il existe un voisinage U de x et un système de coordonnées locales $h: \mathbf{R}^{2n} \to U$ tel que si $\Omega|_U$ est la restriction de Ω à U, alors $h^*(\Omega|_U)$ soit la forme symplectique canonique $dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$ de $\mathbf{R}^{2n}$. C'est le théorème de Darboux (voir par exemple [10]). La carte (h, U) s'appelle une carte canonique.

3. Plongements symplectiques des boules

Soient X et Y deux variétés symplectiques. Un plongement de X dans Y sera dit symplectique s'il transporte la forme symplectique de Y sur celle de X. Deux plongements symplectiques f_0 et f_1 de X dans Y seront dits isotopes s'il existe une

famille (différentiable) à 1-paramètre de plongements symplectiques $P_t : X \to Y$ telle que $P_0 = f_0$ et $P_1 = f_1$.

L'analogue différentiable de la proposition suivante est bien connu:

PROPOSITION I.3.1. *Deux plongements symplectiques d'une boule B de $\mathbf{R}^{2n}$ dans $\mathbf{R}^{2n}$ sont isotopes.*

Démonstration. Il suffit de montrer que tout plongement symplectique h de B dans $\mathbf{R}^{2n}$ est isotope au plongement naturel $i : B \hookrightarrow \mathbf{R}^{2n}$. Remarquons d'abord que h est isotope à un plongement symplectique $\bar{h}$ tel que $\bar{h}(0) = 0$. En effet si T est une translation telle que $T(h(0)) = 0$, on prend $\bar{h} = T \cdot h$.

Pour tout $t \in]0, 1]$, soit R_t l'homothétie de rapport t dans $\mathbf{R}^{2n}$. On a: $R_t(B) \subset B$ et $R_t^* \Omega = t^2 \cdot \Omega$, où Ω est la restriction à B de la forme symplectique standard de $\mathbf{R}^{2n}$. Il est clair que $R_t^{-1} \cdot \bar{h} \cdot R_t$ est un plongement symplectique de B dans $\mathbf{R}^{2n}$ et que sa dérivés en 0 est le plongement symplectique linéaire suivant:

$$h'(0)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\bar{h}(tx)}{t} = \lim_{t \to 0} (R_t^{-1} \cdot \bar{h} \cdot R_t)(x).$$

La famille:

$$H_t = \begin{cases} R_t^{-1} \cdot \bar{h} \cdot R_t & \text{pour} \quad 0 < t \leqq 1 \\ h'(0) & \text{pour} \quad t = 0 \end{cases}$$

est une famille continue de plongements symplectiques telle que $H_1 = \bar{h}$. Cette famille est homotope relativement aux extrémités à une famille différentiable (par changement convenable de paramètre) de plongements symplectiques.

Nous venons de montrer que h est isotope à un plongement symplectique linéaire. Comme le groupe symplectique linéaire $Sp(n)$ est connexe par arcs différentiables, tout plongement symplectique linéaire est isotope au plongement naturel $i : B \hookrightarrow R^{2n}$. La proposition est démontrée.

La proposition suivante donne une précision sur le support de l'isotopie entre deux plongements symplectiques de boules.

PROPOSITION I.3.2. *Soit V un ouvert convexe de R^{2n} contenu dans une boule $B_{r/8}$ de centre 0 et de rayon $r/8$. Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout difféomorphisme symplectique $h : V \to B_{r/8}$ vérifiant:*

$$1 - \varepsilon \leqq \frac{\|h'(x)(y)\|}{\|y\|} \leqq 1 + \varepsilon \quad (*)$$

pour x et y dans V, il existe une isotopie symplectique H_t de $\mathbf{R}^{2n}$ à support dans B_r et telle que $H_1|_V = h$.

Démonstration. En composant éventuellement avec une translation, on peut supposer que $h(0)=0$. La condition plus haut et la formule de la moyenne impliquent que pour tout $t \in [0,1]$, $x \in V$, on a: $\|h(tx)\| \leqq t\,\|x\|\,(1+\varepsilon)$. Donc pour $t \in [0,1]$, $x \in V$, $h(tx)/t \in B_{r/4}$. Si $h'(0)$ est la dérivée en 0, on a aussi que $h'(0)(V) \subset B_{r/4}$. La condition $(*)$ signifie que $h'(0) \in Sp(n)$ est proche du compact maximal $U(n)$ de $Sp(n)$. Soit $p: T(U(n)) \to U(n)$ un C^∞-voisinage tublaire dans $Sp(n)$. Alors en identifiant $T(U(n))$ avec un voisinage de $U(n)$ dans $Sp(n)$, on peut écrire que $h'(0) \in T(U(n))$. Soit $g_t \in Sp(n)$ l'isotopie de $h'(0)$ à l'identité obtenue en composant les chemins a_t et b_t où a_t joint $h'(0)$ à $p(h'(0))$ dans $T(U(n))$ et b_t joint $p(h'(0))$ à l'identité dans $U(n)$. Alors $g_t(V) \subset B_{r/2}$. Soit G_t le chemin reliant h à l'identité obtenu en composant le chemin allent de h à $h'(0)$ et le chemin g_t ci-dessus. Alors $G_t(V) \subset B_{r/2}$. Soit u une fonction C^∞ à support dans B_r, égale à sur $B_{r/2}$ et soit f_t un hamiltonnien de G'_t, où G'_t est l'isotopie obtenue par lissage de G_t. Si H_t est l'isotopie symplectique obtenue en intégrant le gradient symplectique de $u \cdot f_t$, alors supp $(H_t) \subset B_r$ et $H_1|_V = h$. La proposition est démontrée.

CHAPITRE II

CONSTRUCTION DES INVARIANTS ET ENNONCE DES RESULTATS

1. L'invariant S

Soit h_t une isotopie dans $\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(M)$. Nous allons montrer que la forme $\sum(h_t) = \int_0^1 i(\dot{h}_t)\Omega\,dt$ est une 1-forme fermée dont la classe de cohomologie ne dépend que de la classe d'homotopie de h_t relativement aux extrémités. Plus précisément, on a la proposition suivante, qui est dûe à Calabi [6]:

PROPOSITION II.1.1. *Soit (M, Ω) une variété symplectique et soit $\widetilde{G_\Omega(M)}$ le revêtement universel du groupe $\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(M)_0 = G_\Omega(M)$. Il existe un homomorphisme surjectif et continu:*

$$\tilde{S}: \widetilde{G_\Omega(M)} \to H^1_c(M, \mathbf{R})$$

où $H^1_c(M, \mathbf{R})$ est le premier groupe de cohomologie de de Rham à supports compacts.

Démonstration. D'après Weinstein [20], $G_\Omega(M)$ est localement contractible; donc aussi localement connexe par arcs différentiables. Il en résulte que les éléments $\tilde{h}$ de $\widetilde{G_\Omega(M)}$ sont des paires $(h, \{h_t\})$ où $h \in G_\Omega(M)$ et $\{h_t\}$ est une classe d'homotopie d'isotopies symplectiques de h à l'id_M. Comme h_t est dans $G_\Omega(M)$, $\dot{h}_t$ est un champ de vecteurs symplectiques, c.à.d. que $i(\dot{h}_t)\Omega$ est une 1-forme fermée. Il en est de même de la 1-forme:

$$\sum(h_t) = \int_0^1 i(\dot{h}_t)\Omega\, dt.$$

Soit h'_t une autre isotopie dans $\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(M)$ telle que $h'_1 = h_1 = h$ et qui est homotope à h_t. Ceci veut dire qu'il existe une famille différentiable à 2-paramètres $H_{s,t}$ d'éléments de $\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(M)$ telle que:

$$H_{s,0} = id_M \qquad H_{s,1} = h \quad \text{pour tout} \quad s \in I$$

$$H_{0,t} = h_t \qquad H_{1,t} = h'_t \quad \text{pour tout} \quad t \in I.$$

Considérons les champs de vecteurs $X_{s,t}$ et $Y_{s,t}$ définis par:

$$X_{s,t}(x) = \frac{\partial H_{s,t}}{\partial t}(H^{-1}_{s,t}(x)) \qquad Y_{s,t}(x) = \frac{\partial H_{s,t}}{\partial_s}(H^{-1}_{s,t}(x)).$$

Si on pose: $\sum(H_{s,t}) = \int_0^1 i(X_{s,t})\Omega\, dt$, on a: $\sum(H_{0,t}) = \sum(h_t)$ et $\sum(H_{1,t}) = \sum(h'_t)$. Calculons la variation de la famille $\sum(H_{s,t})$:

$$\frac{\partial}{\partial s}\sum(H_{s,t}) = \int_0^1 i\left(\frac{\partial X_{s,t}}{\partial s}\right)\Omega\, dt = \int_0^1 i\left(\frac{\partial Y_{s,t}}{\partial t}\right)\Omega\, dt + \int_0^1 i([X_{s,t}, Y_{s,t}])\Omega\, dt.$$

La dernière ligne résulte de la proposition I.1.1. Les champs $Y_{s,0}$ et $Y_{s,1}$ sont nuls. Il en résulte:

$$\int_0^1 i\left(\frac{\partial Y_{s,t}}{\partial t}\right)\Omega\, dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(i(Y_{s,t})\Omega)\, dt = i(Y_{s,1})\Omega - i(Y_{s,0})\Omega = 0.$$

D'autre part:

$$\int_0^1 i([X_{st}, Y_{st}])\Omega\, dt = \int_0^1 (L_{X_{st}} i(Y_{st})\Omega)\, dt = d\left\{\int_0^1 \Omega(Y_{st}, X_{st})\, dt\right\}.$$

Donc:

$$\sum(h_t') - \sum(h_t) = d\alpha, \quad \text{où} \quad \alpha = \int_{I\times I} \Omega(Y_{st}, X_{st})\, dt \wedge ds.$$

Ceci montre que la classe de cohomologie de la forme $\sum(h_t)$ est indépendante du choix de h_t dans sa classe d'homotopie relativement aux extrémités. La correspondance $\tilde{h} \mapsto \tilde{S}(\tilde{h})$, où $\tilde{S}(\tilde{h})$ désigne la classe de cohomologie de $\sum(h_t)$ définit une application continue:

$$\tilde{S} : \widetilde{G_\Omega(M)} \to H_c^1(M, R).$$

Cette application est un homomorphisme de groupes: en effet soient $\tilde{g}_i = (g_i, \{c_t^i\})$ deux éléments de $\widetilde{G_\Omega(M)}$. Leur produit peut être représenté par l'isotopie c_t obtenue en faisant un changement convenable de paramètre dans le chemin différentiable par morceaux c_t' suivant (On dira que c_t est un *lissage* de c_t'):

$$c'(t) = \begin{cases} c_{2t}^2 & \text{pour} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ c_{2t-1}^1 \cdot c_1^2 & \text{pour} \quad \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Il est évident que $\sum(c_t) = \sum(c_t^1) + \sum(c_t^2)$. L'application $\tilde{S}$ est donc un homomorphisme. Il est évidemment continu.

Soit θ une 1-forme fermée à support compact représentant un élément $[\theta]$ de $H_c^1(M, R)$. Le champ de vecteurs X défine par $i(X)\Omega = \theta$ est un champ symplectique. Soit $\tilde{h} = (h, \{h_t\}) \in \widetilde{G_\Omega(M)}$, où h_t est le groupe à un paramètre engendré par X, alors $\tilde{S}(\tilde{h}) = [\theta]$. D'où la surjectivité. La proposition est démontrée.

Remarque II.1.2. Soit $\gamma : I \to M$ un 1-simplexe singulier différentiable dans M. Pour toute isotopie symplectique h_t, on considère l' application $G : I \times I \to M$ définie par:

$$G(s, t) = h_t(\gamma(s)).$$

On montre facilement la formule suivante [6]:

$$\int_{I\times I} G^*\Omega = \int_\gamma \sum(h_t). \tag{$*$}$$

D'autre part, les 1-formes $\sum(h_t)$ et $\int_0^1 h_t^* i(\dot{h}_t)\Omega\, dt$ sont cohomologues. De là résultent des définitions équivalentes de l'invariant $\tilde{S}$.

DÉFINITION DE L'HOMOMORPHISME S. Désignons par Γ l'image par $\tilde{S}$ du sous-groupe $\pi_1(G_\Omega(M))$ de $\widetilde{G_\Omega(M)}$. Par passage au quotient, on obtient un homomorphisme surjectif et continu:

$$S: G_\Omega(M) \to H_c^1(M, R)/\Gamma.$$

Le sous-groupe Γ

Soit P_Ω le sous-groupe de $\mathbf{R}$ formé des périodes de Ω, c.à.d. que P_Ω est le sous-ensemble de $\mathbf{R}$ formé des a tels que $a = \int_c \Omega$, où c est un 2-cycle entier de M. Il résulte de la formule $(*)$ ci-dessus que $\Gamma \subset H_c^1(M, P_\Omega)$. En particulier, Γ est dénombrable si M est à base dénombrable. De plus, si la forme Ω est à périodes entières, alors Γ est discret. Nous allons montrer qu'il en est encore ainsi si la forme symplectique Ω provient d'une métrique kählérienne sur M.

Soit ω une forme-volume sur une variété différentiable M de dimension n et soit K un compact de M. On munit de la C^∞-topologie le groupe $\mathrm{Diff}^\infty_{K,\omega}(M) = \{h \in \mathrm{Diff}^\infty(M) \mid \mathrm{supp}(h) \subset K \text{ et } h^*\omega = \omega\}$. Soit $\mathrm{Diff}^\infty_\omega(M) = \lim_{\to} \mathrm{Diff}^\infty_{K,\omega}(M)$ et $\mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)_0$ la composante connexe de l'identité dans $\mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)$. Soit h_t une isotopie dans $\mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)$ et $\{h\}$ sa classe dans $\widetilde{\mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)_0}$. Thurston [16] a montré que la classe de cohomologie $\tilde{V}(\{h\})$ de la $(n-1)$-forme fermée $\int_0^1 i(\dot{h}_t)\omega\, dt$, ne dépend pas du choix des représentants de $\{h\}$ et que la correspondance $\{h\} \mapsto \tilde{V}(\{h\})$ est un homomorphisme surjectif et continu $\tilde{V}: \widetilde{\mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)_0} \to H_c^{n-1}(M, \mathbf{R})$.

Soit (M, Ω) une variété symplectique de dimension $2n$. Alors $\omega = \Omega^n$ est une forme-volume. On a l'inclusion $\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(M) \subset \mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)$. Soit h_t une isotopie dans $\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(M)$, alors:

$$\int_0^1 i(\dot{h}_t)\omega\, dt = n\int_0^1 (i(\dot{h}_t)\Omega) \wedge \Omega^{n-1}\, dt = n\left(\int_0^1 i(\dot{h}_t)\Omega)\, dt\right) \wedge \Omega^{n-1}.$$

On a donc le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(M)_0} & \xrightarrow{\tilde{S}} & H_c^1(M, \mathbf{R}) \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle \wedge n\Omega^{n-1}} \\ \mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)_0 & \xrightarrow{\tilde{V}} & H_c^{2n-1}(M, \mathbf{R}). \end{array}$$

La dernière flèche verticale étant induite par la multiplication par Ω^{n-1}.

Supposons que la multiplication par Ω^{n-1} induise un isomorphisme $H_c^1(M, \mathbf{R}) \to H_c^{2n-1}(M, \mathbf{R})$. Ceci est le cas par exemple si Ω provient d'une

métrique käehlérienne sur M [19]. Il résulte de la commutativité du diagramme ci-dessus, que $\Gamma = \tilde{S}(\pi_1(\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(M)_0))$ est isomorphe à $\tilde{V}(i(\pi_1(\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(M)_0))$. Or, d'après [16], ce dernier groupe est discret. Il en est donc de même de Γ.

Je n'ai pas d'exemple de variété symplectique (M, Ω) où le sous-groupe Γ ne soit pas discret.

Construction directe de l'invariant S dans le cas où Ω est exacte

D'après ce qui précède, si Ω est exacte, Γ est trivial. On a donc un homomorphisme $S: G_\Omega(M) \to H^1_c(M, \mathbf{R})$. Nous nous proposons de construire directement cet homomorphisme sans utiliser les isotopies.

Soit λ une 1-forme telle que $d\lambda = \Omega$. Pour tout $h \in G_\Omega(M)$, la 1-forme $h^*\lambda - \lambda$ est une 1-forme fermée à support compact. Sa classe de cohomologie $[h^*\lambda - \lambda] \in H^1_c(M, \mathbf{R})$ est indépendante du choix de λ. En effet soit λ' une autre 1-forme telle que $d\lambda' = \Omega$, alors $\lambda' - \lambda$ est fermée. Donc la 1-forme suivante est exacte: $(h^*\lambda' - \lambda') - (h^*\lambda - \lambda) = h^*(\lambda' - \lambda) - (\lambda' - \lambda)$. Donc $[h^*\lambda - \lambda]$ est indépendante du choix de λ.

On voit immédiatement que $[h^*\lambda - \lambda] = S(h)$. En effet si h_t est une isotopie symplectique de h à l'identité, on a:

$$h^*\lambda - \lambda = \int_0^1 h_t^*(L_{\dot{h}_t}\lambda)\, dt = \int_0^1 h_t^* i(\dot{h}_t)\Omega\, dt + d\left(\int_0^1 h_t^*(i(\dot{h}_t)\lambda)\, dt\right).$$

Remarque. Dans les constructions de l'invariant S, nous n'avons utilisé que le seul fait que Ω est fermée. Soit donc $G_\omega(M)$ la composante connexe par arcs différentiables dans le groupe des C^∞-difféomorphismes d'une variété différentiable M, à support compact et qui préservent une p-forme fermée ω, et soit $\widetilde{G_\omega(M)}$ son revêtement universel. On obtient avec les mêmes constructions, un homomorphisme $\tilde{S}_\omega: \tilde{G}_\omega(M) \to H^{p-1}_c(M, \mathbf{R})$ et si ω est exacte, $S_\omega: G_\omega(M) \to H^{p-1}_c(M, \mathbf{R})$.

2. L'invariant S comme obstruction à l'extension des isotopies symplectiques

Dans la suite, nous aurons à résoudre le problème suivant: étant donnés une variété symplectique (M, Ω), un sous-ensemble fermé F dans M et h_t une isotopie de M qui préserve la forme Ω sur un voisinage de F, trouver une isotopie $\bar{h}_t$ symplectique partout et qui coincide avec h_t au voisinage de F. C'est un problème d'"extension des isotopies symplectiques." La solution est donnée par le résultat suivant:

THÉORÈME II.2.1. *Soit* (M, Ω) *une variété symplectique compacte,* F *un fermé dans* M *et* h_t *une isotopie symplectique au voisinage de* F. *Supposons que*

$$\int_c h_t^* \Omega - \Omega = 0$$

pour toute 2*-chaine singulière différentiable* c *dont le bord est dans* F. (c.à.d. que les périodes relatives de $h_t^* \Omega - \Omega$ modulo F sont toutes nulles) *Il existe alors une isotopie symplectique* $\bar{h}_t$ *qui coincide avec* h_t *au voisinage de* F. *De plus, pour tout voisinage* V *de l'identité* (pour la C^∞-topologie) *dans* $C^\infty(I, \mathrm{Diff}^\infty(M))$, *il existe un voisinage de l'identité* W *tel que si* h_t *appartient à* W, *alors* $h_t^{-1} \cdot \bar{h}_t$ *est dans* V.

Ce théorème résulte du lemme suivant, qui est un "théorème de de Rham relatif avec paramètre."

LEMME II.2.2. *Soit* M *une variété différentiable et* θ_t *une famille à* 1*-paramètre de* p*-formes, nulles au voisinage d'un fermé* F *de* M *et dont les périodes relatives modulo* F *sont toutes nulles. Il existe alors une famille à* 1*-paramètre de* $(p-1)$*-formes* α_t *nulles au voisinage de* F *et telles que* $\theta_t = d\alpha_t$.

Avant de démontrer ce lemme, nous allons rappeler quelques notions sur les produits tensoriels d'espaces vectoriels topologiques (EVT) (cf. par exemple [14] ou [18]).

Soient E_1 et E_2 deux EVT localement convexes. On note par $E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2$ respectivement $E_1 \hat{\otimes}_\epsilon E_2$ leur produit tensoriel complété avec la topologie π respectivement avec la toploogie ϵ (voir [14] pour la définition de ces topologies). Un EVT localement convexe E est dit nucléaire si pour tout EVT localement convexe F, alors $E \hat{\otimes}_\epsilon F$ et $E \hat{\otimes}_\pi F$ coincident. On montre que l'espace $C^\infty(U)$ des fonctions de classe C^∞ d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ est un EVT nucléaire.

Soient $u_i : E_i \to F_i$ deux surjections linéaires d'EVT, où les E_i sont métrisables, alors $u_1 \hat{\otimes}_\pi u_2 : E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2 \to F_1 \hat{\otimes}_\pi F_2$ est une surjection.

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et E un EVT complet. Si $C^\infty(U, E)$ est l'espace des applications de classe C^∞ de U dans E, on a l'isomorphisme:

$$C^\infty(U, E) \cong C^\infty(U) \hat{\otimes}_\epsilon E \cong C^\infty(U) \hat{\otimes}_\pi E.$$

On omet la mention π ou ϵ et on écrit: $C^\infty(U, E) \cong C^\infty(U) \hat{\otimes} E$.

Démonstration du lemme II.2.2. Soit $\Lambda^p(M, V)$ (respectivement $B^p(M, V)$) l'espace des p-formes nulles sur un voisinage convenable V de F (respectivement

des p-formes fermées dont la classe de cohomologie relative modulo V sont nulles), muni de la topologie C^∞. Par voisinage convenable V de F, nous entendons une sousvariété à bord approximant F. Le théorème de de Rham relatif dit que

$$d:\Lambda^{p-1}(M, V) \to B^p(M, V)$$

est une surjection linéaire d'espaces de Fréchet. D'après ce qui précède,

$$d\hat{\otimes} id_M : C^\infty(I)\hat{\otimes}\Lambda^{p-1}(M, V) \to C^\infty(I)\hat{\otimes}B^p(M, V)$$

est encore une surjection.

Une famille à 1-paramètre de p-formes n'est rien d'autre qu'une application de classe C^∞ de 1 dans l'espace des p-formes, c.à.d. un élément de $C^\infty(I, \Lambda^p(M))$. Comme $C^\infty(I, \Lambda^{p-1}(M, V)) \cong C^\infty(I)\hat{\otimes}\Lambda^{p-1}(M, V)$ et même chose en remplaçant $\Lambda^{p-1}(M, V)$ par $B^p(M, V)$, on obtient la surjection

$$C^\infty(I, \Lambda^{p-1}(M, V)) \to C^\infty(I, B^p(M, V))$$

Le lemme est démontré.

Démonstration du théorème II.2.1. La famille à 1-paramètre

$$\dot{\Omega}_t = \frac{\partial}{\partial t}\Omega t \quad \text{où} \quad \Omega_t = h_t^*\Omega,$$

vérifie les hypothèses du lemme II.2.2. Il existe donc une famille à 1-paramètre de 1-formes α_t nulles au voisinage de F telles que $d\alpha_t = \dot{\Omega}_t$. Suivant Moser [14], on définit une famille à 1-paramètre de champs de vecteurs symplectiques X_t par l'équation: $i(X_t)\Omega_t = -\alpha_t$. On aura alors que $L_{X_t}\Omega_t + \dot{\Omega}_t = 0$. Si ψ_t est la famille de difféomorphismes symplectiques obtenue en intégrant le champ X_t (avec la condition initiale $\psi_0(x) = x$), alors d'après la proposition I.1.2, $\psi_t^*\Omega_t = \Omega_0 = \Omega$. De plus, ψ_t = identité au voisinage de F; ainsi $\bar{h}_t = h_t \cdot \psi_t$ est une isotopie symplectique et coincide avec h_t au voisinage de F.

L'isotopie ψ_t dépend continuement de α_t: donc pour tout voisinage V de l'identité dans $C^\infty(I, \mathrm{Diff}^\infty(M))$, il existe un voisinage T de 0 dans $C^\infty(I, \Lambda^1(M, V))$ tel que si α_t est dans T, alors ψ_t soit dans V. D'après le théorème de l'application ouverte, l'image de T par la différentielle extérieure est un voisinage S de 0 dans $C^\infty(I, B^2(M, V))$.

D'autre part, il est clair que pour tout voisinage U de 0 dans $C^\infty(I, B^2(M, V))$,

il existe un voisinage W de l'identité dans $C^\infty(I, \mathrm{Diff}^\infty(M))$ tel que si h_t est dans W, alors $\dot{\Omega}_t$ est dans U.

On choisit $U = S$. Soit $W = W(S)$ le voisinage de l'identité dans $C^\infty(I, \mathrm{Diff}^\infty(M))$ correspondant. Si h_t est dans W, alors $\dot{\Omega}_t \in U = S = d(T)$. c.à.d. que $\dot{\Omega}_t = d\alpha_t$ avec $\alpha_t \in T$. Il en résulte que $\psi_t = h_t^{-1} \cdot \bar{h}_t \in V$. Le théorème est démontré.

Formulation du théorème II.2.1. *à l'aide de l'invariant S*

Soit h_t une isotopie de M, symplectique sur un fermé $F \subset M$ et soit X_{st} la famille de champs de vecteurs définie par:

$$X_{st}(x) = \frac{d}{ds} h_{s \cdot t}(h_{s \cdot t}^{-1}(x)).$$

D'après la proposition I.1.3, on a pour tout t

$$h_t^* \Omega - \Omega = d \sum{}' (h_{st}) \quad \text{où} \quad \sum{}' (h_{st}) = \int_0^1 h_{s \cdot t}^*(i(X_{st})\Omega)\, ds.$$

La restriction $\sum{}'' (h_{st})$ de $\sum{}' (h_{st})$ à F est une famille de 1-formes fermées dont les classes de cohomologie ne dépendent que de la classe d'homotopie d'isotopies symplectiques sur F, reliant pour tout t, h_t à l'identité.

Dans le cas où h_t est une isotopie symplectique sur M, la classe de cohomologie de $\sum (h_{st}) = \int_0^1 i(X_{st})\Omega\, ds$ (qui est la même que celle de $\sum{}' (h_{st})$) est la valeur de l'invariant $\tilde{S}$ sur $\tilde{h}_t$, où $\tilde{h}_t$ est l'élément de $\widetilde{G_\Omega(M)}$ représenté par l'isotopie $s \mapsto h_{s \cdot t}$. Par analogie, on peut dire que la classe de cohomologie de $\sum{}'' (h_{st})$ est la valeur $\tilde{S}_F(\tilde{h}_t)$ d'un "invariant $\tilde{S}_F$ relatif" sur l'élément $\tilde{h}_t$.

Soit ∂ l'opérateur cobord $\partial : H^1(F) \to H^2(M, F)$ dans la suite exacte de cohomologie réelle de la paire (M, F). Le théorème II.2.1 prend alors la forme suivante:

THÉORÈME II.2.3. *Soit h_t une isotopie de M, symplectique sur un fermé $F \subset M$. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une isotopie $\bar{h}_t$, symplectique partout et qui coïncide avec h_t sur F, est que l'élément $\partial(\tilde{S}_F(\tilde{h}_t))$ de $H^2(M, F)$ soit nul.*

3. Quelques propriétés du groupe Ker $S(M)$

Dans ce paragraphe, nous démontrons quelques propriétés topologiques du groupe Ker $S(M)$. Rappelons qu'un élément $h \in G_\Omega(M)$ est dans Ker $S(M)$ s'il

existe une isotopie symplectique h_t de h à id_M telle que la forme $\sum(h_t)$ soit exacte.

PROPOSITION II.3.1. *Le groupe* Ker $S(M)$ *est connexe par arcs différentiables.*

Démonstration. Soit $h \in \mathrm{Ker}\, S(M)$ et soit h_t une isotopie symplectique de h à id_M telle que $\sum(h_t) = dg$, où g est une fonction à support compact. Si on fixe $t \in I$, alors $h_{s \cdot t}$, $s \in I$, est une isotopie de h_t à id_M. Soit X_{st} la famille de champs de vecteurs définie par:

$$X_{st}(x) = \frac{dh_{s \cdot t}}{ds}(h_{s \cdot t}^{-1}(x)).$$

Posons:

$$\alpha_t = \int_0^1 i(X_{st})\Omega\, ds.$$

Soit Y_t la famille de champs de vecteurs définie par: $i(Y_t)\Omega = \beta_t$ où $\beta_t = \alpha_t - t\alpha_1$. On a:

$$\int_0^1 i(X_{st} - Y_t)\Omega\, ds = d(t \cdot g).$$

Si H_{st} est la famille à 2-paramètres de difféomorphismes symplectiques définie par intégration (en s) de la famille de champs de vecteurs $Z_{st} = X_{st} - Y_t$ autrement dit H_{st} est la famille de difféomorphismes telle que $H_{0,t} = \mathrm{id}_M$ et

$$\frac{\partial H_{st}}{\partial s}(H_{s,t}^{-1}(x)) = Z_{st}(x).$$

Il est clair que $H_{s,1} = h_s$ pour tout $s \in I$ et que $H_{1,t} \in \mathrm{Ker}\, S(M)$ pour tout t. Comme $H_{1,1} = h$ et que $H_{1,0} = \mathrm{id}_M$, $H_{1,t}$ est un chemin différentiable dans Ker $S(M)$ qui relie h à l'identité. D'où la proposition.

Remarque II.3.2. D'après la proposition II.3.1, Ker $S(M)$ est connexe. Mais en général, Ker $S(M)$ pourrait ne pas être localement connexe. En fait, on a équivalence entre les énnoncés suivants:

(i) Ker $S(M)$ est localement connexe
(ii) Le groupe $\Gamma = \tilde{S}(\pi_1(G_\Omega(M))$ est un sous-groupe discret de $H_c^1(M, R)$.

C'est par exemple le cas si Ω est une forme symplectique à périodes entières ou si elle provient d'une métrique kählérienne sur M.

PROPOSITION II.3.3. *Soit c_t une isotopie dans* Ker $S(M)$. *Alors pour tout t, la 1-forme $i(\dot{c}_t)\Omega$ est exacte.*

Démonstration. Le groupe $\pi_1(G_\Omega(M))$ agit sur $\widetilde{G_\Omega(M)}$. Désignons par $\pi_1(G_\Omega(M))$. Ker $\tilde{S}(M)$ l'ensemble des orbites des points de Ker $\tilde{S}(M)$. Il est clair que si $p:\widetilde{G_\Omega}(M)\to G_\Omega(M)$ est la projection de revêtement, alors:

$$p^{-1}(\text{Ker } S(M)) = \pi_1(G_\Omega(M)) \cdot \text{Ker } \tilde{S}(M).$$

Tout chemin continu dans Ker $S(M)$ se relève en un chemin continu dans $\pi_1(G_\Omega(M))$. Ker $\tilde{S}(M)$. Soit $\tilde{c}_t$ un relèvement continu de l'isotopie c_t tel que $\tilde{c}(0)=\mathrm{id}_M$. Pour tout t, $\tilde{S}(\tilde{c}_t)\in\Gamma$. L'application $t\mapsto\tilde{S}(\tilde{c}_t)$ est donc une courbe continue dans Γ. Comme Γ est dénombrable, cette courbe est constante. Donc $\tilde{S}(\tilde{c}_t)=\tilde{S}(\tilde{c}_0)=0$, pour tout t, c.à.d. que $\tilde{c}_t\in\text{Ker } \tilde{S}(M)$.

D'après la démonstration de la proposition II.3.1, il existe pour tout t, une isotopie $s\mapsto H_{s,t}$ représentant $\tilde{c}_t$ (i.e. $H_{0,t}=\mathrm{id}_M$, $H_{1,t}=\tilde{c}_t$) telle que l'image dans $\widetilde{G_\Omega}(M)$ de l'isotopie $s\mapsto H_{s,t}$ soit dans Ker $\tilde{S}(M)$, et que l'application $(s,t)\mapsto H_{s,t}$ soit continue.

Pour tout $t\in 1$, l'application:

$$I\times I\ni(v,s)\mapsto H_{(v(s-1)+1),((1-v)s+v)t}\in\text{Ker } S(M)$$

est une homotopie entre les chemins $s\mapsto H_{s,t}$ et $s\mapsto c_{s\cdot t}$. Si $\bar{H}_{1,t}$ et $\bar{c}_t$ sont les images de ces chemins dans $\widetilde{G_\Omega(M)}$, on a donc que: $\tilde{S}(\bar{c}_t)=\tilde{S}(\bar{H}_{1,t})$. Mais la classe $\tilde{S}(\bar{H}_{1,t})$ (et donc aussi la classe $\tilde{S}(\bar{c}_t)$) est nulle. Si X_{st} est la famille de champs de vecteurs symplectiques définie par:

$$X_{st}(x)=\frac{dc_{st}}{ds}(c_{st}^{-1}(x)).$$

Alors la 1-forme:

$$\int_0^1 i(X_{st})\Omega\,ds=\int_0^t i(\dot{c}_s)\Omega\,ds$$

est exacte. Il en résulte que $i(\dot{c}_t)\Omega=df_t$ avec $f_t=dg_t/dt$, où g_t est une famille de

fonctions telle que:

$$\int_0^t i(\dot{c}_s)\Omega\, ds = dg_t.$$

La proposition est démontrée.

Le noyau de la surjection $\operatorname{Ker} \tilde{S}(M) \to \operatorname{Ker} S(M)$ est $\pi_1(G_\Omega(M)) \cap \operatorname{Ker} \tilde{S}(M)$. D'autre part, $\operatorname{Ker} \tilde{S}(M)$, ayant le type d'homotopie de $G_\Omega(M)$, est simplement connexe. Il en résulte que si l'on munit $\operatorname{Ker} S(M)$ de la topologie quotient de $\operatorname{Ker} \tilde{S}(M)$ par l'action de $\pi_1(G_\Omega(M)) \cap \operatorname{Ker} \tilde{S}(M)$, alors $\operatorname{Ker} \tilde{S}(M)$ est le revêtement universel de $\operatorname{Ker} S(M)$; on a donc que π_1 $(\operatorname{Ker} S(M)) = \pi_1(G_\Omega(M)) \cap \operatorname{Ker} \tilde{S}(M)$. En résumé, on a le diagramme suivant, avec les lignes et les colonnes exactes.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \pi_1(\operatorname{Ker} S(M)) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(G_\Omega(M)) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} \tilde{S}(M) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{G_\Omega(M)} \arrow[r, "\tilde{S}"] \arrow[d, "P"] & H_c^1(M, R) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} S(M) \arrow[r] \arrow[d] & G_\Omega(M) \arrow[r, "S"] \arrow[d] & H_c^1(M, R)/\Gamma \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Remarque II.3.4. Pour terminer ce paragraphe, signalons une propriété de transitivité du groupe $\operatorname{Ker} S(M)$. Soit (M, Ω) une variété symplectique close et connexe. Boothby [5] a montré que $G_\Omega(M)$ est transitif. Pour $x, y \in M$, il construit un difféomorphisme $h \in G_\Omega(M)$ tel que $h(x) = y$ comme le composé de difféomorphismes symplectiques à supports dans de petites boules. Il est clair que de tels difféomorphismes sont dans $\operatorname{Ker} S(M)$. Il en résulte que $h \in \operatorname{Ker} S(M)$.

4. L'invariant R

La proposition suivante est dûe à Calabi [6], mais nous allons en donner une démonstration directe.

PROPOSITION II.4.1. *Soit (M, Ω) une variété symplectique ouverte et soit* $\widetilde{\operatorname{Ker} S}(M)$ *le revêtement universel de* $\operatorname{Ker} S(M)$. *Il existe un homomorphisme surjectif et continu:*

$$\tilde{R}: \widetilde{\operatorname{Ker} S}(M) \to \mathbf{R}$$

La démonstration utilise le lemme suivant:

LEMME II.4.2. *Soit (M, Ω) une variété symplectique non compacte, sans bord. Soit $\hat{\mathcal{L}}_\Omega(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs symplectiques X sur M à support compact et tel que la forme $i(X)\Omega$ soit exacte. Pour tout X dans $\hat{\mathcal{L}}_\Omega(M)$ soit f_X l'unique hamiltonnien de X à support compact. Alors l'application $r: \hat{\mathcal{L}}_\Omega(M) \to \mathbf{R}$ définie par:*

$$X \mapsto \int_M f_X \Omega^n$$

est un homomorphisme surjectif d'algèbre de Lie

Démonstration. Il est clair que l'application r est additive et surjective. Il ne reste qu'à vérifier qu'elle s'annulle sur les crochets. Soient X_1 et X_2 dans $\hat{\mathcal{L}}_\Omega(M)$, on a:

$$i([X_1, X_2])\Omega = L_{X_1} i(X_2)\Omega = d(i(X_1)i(X_2)\Omega).$$

Donc:

$$f_{[X_1, X_2]} = i(X_1)i(X_2)\Omega.$$

Or:

$$0 = i(X_1)(i(X_2)\Omega \wedge \Omega^n) = (i(X_1)i(X_2)\Omega)\Omega^n - i(X_2)\Omega i(X_1)\Omega^n)$$
$$= f_{[X_1, X_2]}\Omega^n - n \cdot i(X_2)\Omega \wedge i(X_1)\Omega \wedge \Omega^{n-1}$$

c.à.d.

$$f_{[X, X_2]}\Omega^n = n \cdot df_{X_2} \wedge df_{X_1} \wedge \Omega^{n-1} = d(nf_{X_2} \cdot df_{X_1} \wedge \Omega^{n-1}).$$

La conclusion résulte de la formule de Stokes. Le lemme est démontré.

Démonstration de la proposition II.4.1. Soit $\tilde{h}=(h,\{h_t\})$ un élément de Ker $S(M)$. D'après la proposition II.3.3, $\dot{h}_t \in \hat{\mathscr{L}}_\Omega(M)$, pour tout t.

En reprennant les notations de la proposition II.1.1. soit h'_t une autre isotopie dans Ker $S(M)$ telle que $h'_1=h_1=h$. On suppose que h'_t est homotope à h_t par une homotopie différentiable H_{st} dans Ker $S(M)$. Soient X_{st} et Y_{st} les champs de vecteurs définis comme dans la démonstration de la proposition II.1.1, on a:

$$\frac{\partial}{\partial S}\int_0^1 r(X_{st})\,dt=\int_0^1 r\left(\frac{\partial X_{s,t}}{\partial s}\right)dt$$
$$=\int_0^1 r\left(\frac{\partial Y_{st}}{\partial t}\right)dt+\int_0^1 r([X_{st},Y_{st}])\,dt=\int_0^1 r\left(\frac{\partial}{\partial t}Y_{st}\right)dt.$$

La dernière ligne résulte de la proposition I.1.1 et du lemme II.4.2

Or:

$$\int_0^1 r\left(\frac{\partial}{\partial t}Y_{st}\right)dt=r(Y_{s,1})-r(Y_{s,0})=0$$

car $Y_{s,1}=Y_{s,0}=0$

Il en résulte que l'application:

$$\tilde{h}\mapsto\int_0^1 r(\dot{h}_t)\,dt$$

est bien définie. On montre que c'est un homomorphisme de $\widetilde{\mathrm{Ker}\,S}(M)$ dans R comme dans la proposition II.1.1. La surjectivité ainsi que la continuité sont évidentes. La proposition est démontrée.

Définition de l'invariant R

Désignons par Λ l'image par $\tilde{R}$ du sous-groupe Ker P de $\widetilde{\mathrm{Ker}\,S(M)}$, noyau de la projection naturelle P: $\widetilde{\mathrm{Ker}\,S(M)}\to\mathrm{Ker}\,S(M)$. Par passage au quotient, on obtient un homomorphisme surjectif et continu

$$R:\mathrm{Ker}\,S(M)\to\mathbf{R}/\Lambda$$

Construction directe de l'invariant R dans le cas où la forme Ω est exacte

Notation: si ω est une forme à support compact de degré maximum sur une variété différentiable M, nous dénoterons par $[\omega]$ son intégrale sur M.

Soit λ une 1-forme telle que $d\lambda = \Omega$. Si $h \in \operatorname{Ker} S(M)$, il existe une fonction unique à support compact $f(h, \lambda)$ dépendant de h et de λ telle que $h^*\lambda - \lambda = df(h, \lambda)$. On a:

PROPOSITION II.4.3. *Soit (M, Ω) une variété symplectique de dimension $2n$ dont la forme symplectique est exacte. Alors pour tout $h \in \operatorname{Ker} S(M)$, le nombre $[f(h, \lambda) \cdot \Omega^n]$ est indépendant du choix de λ tel que $d\lambda = \Omega$. De plus la correspondance $h \mapsto [f(h, \lambda) \cdot \Omega^n]$ est un homorphisme surjectif et continu ρ qui coincide à une constante près avec l'homomorphisme R. Plus précisément, on a:*

$$\rho(h) = (n+1) \cdot R(h), \qquad \forall h \in \operatorname{Ker} S(M).$$

COROLLAIRE. *Soit (M, Ω) une variété symplectique dont la forme symplectique est exacte. Alors le groupe Λ est trivial.*

Démonstration. Soit λ' une autre 1-forme telle que $d\lambda' = \Omega$. On a:

$$\begin{aligned}(h^*\lambda' - \lambda') - (h^*\lambda - \lambda) &= d(f(h, \lambda') - f(h, \lambda)) \\ &= h^*(\lambda' - \lambda) - (\lambda' - \lambda) = d\left(\int_0^1 h_t^* i(\dot{h}_t)(\lambda' - \lambda)\, dt\right)\end{aligned}$$

où h_t est une isotopie dans $\operatorname{Ker} S(M)$ de h à l'identité. On a donc:

$$f(h, \lambda') = f(h, \lambda) + \int_0^1 h_t^* i(\dot{h}_t)(\lambda' - \lambda)\, dt.$$

Soit f_t une famille de fonctions à support compact telle que $i(\dot{h}_t)\Omega = df_t$, on a: $(h_t^* i(\dot{h}_t)(\lambda' - \lambda) \cdot \Omega^n = d(-n \cdot h_t^*(f_t \cdot (\lambda' - \lambda) \cdot \Omega^{n-1})$. Il en résulte donc que $[f(h, \lambda')\Omega^n] = [f(h, \lambda)\Omega^n]$. Donc ρ est bien définie.

D'autre part, on a: $h_t^*\lambda - \lambda = \int_c^t h_s^*(L_{\dot{h}_s})\lambda\, ds = du_t$ où

$$u_t = \int_0^t (h_s^* i(\dot{h}_s)\lambda)\, ds + \int_0^t (f_s \circ h_s)\, ds.$$

On a: $[(h_s^* i(\dot{h}_s)\lambda) \cdot \Omega^n] = [i(\dot{h}_s)\lambda)\Omega^n]$ et $[(f_s \circ h_s)\Omega^n] = [f_s \cdot \Omega^n]$. De plus: $i(\dot{h}_s)\lambda \cdot \Omega^n = n \cdot f_s \cdot \Omega^n - d(n \cdot f_s \cdot \lambda \wedge \Omega^{n-1})$. Il en résulte que $[i(\dot{h}_s)\lambda \cdot \Omega^n] = n \cdot [f_s\Omega^n]$. Or par définition, $\rho(h) = [u_1 \cdot \Omega^n]$. On a donc: $[u_1 \cdot \Omega^n] = \int_0^1 ([i(\dot{h}_s)\lambda\Omega^n] + [f_s\Omega^n])\, ds = (n+1) \cdot R(h)$. Q.E.D.

5. L'invarient μ

Si M est une variété symplectique de dimension $2n \geqslant 4$, dont la forme symplectique est exacte, alors l'homomorphisme $R: \operatorname{Ker} S(M) \to \mathbf{R}$ s'étend en un homomorphisme $\mu: G_\Omega(M) \to \mathbf{R}$. L'objet de ce paragraphe est de construire cet homomorphisme. On a:

PROPOSITION II.5.1. *Soit M une variété différentiable de dimension $2n \geqslant 4$, munie d'une forme symplectique exacte. Soit λ une 1-forme telle que $d\lambda = \Omega$. Pour tout $h \in G_\Omega(M)$, on pose:*

$$\mu(h) = (-1/(n+1)) \cdot \int_M h^*\lambda \wedge \lambda \wedge \Omega^{n-1}.$$

Alors $\mu(h)$ est indépendant du choix de λ. De plus, $h \mapsto \mu(h)$ est un homomorphisme, et la restriction de μ à Ker $S(M)$ *est l'homomorphisme R. (En particulier, μ est surjectif).*

Remarque. Si α est une 1-forme fermée sur une variété différentiable de dimension $2n \geqslant 4$, munie d'une forme symplectique exacte et si h_t est une isotopie symplectique, alors la forme $f\Omega^n$, où $f = \int_0^1 (h_t^* i(\dot{h}_t)\alpha)\, dt$, est exacte. En effet: $i(\dot{h}_t)\alpha \cdot \Omega^n = dW_t$ où $W_t = n \cdot \alpha i(\dot{h}_t)\Omega \wedge \lambda \wedge \Omega^{n-2}$, si $d\lambda = \Omega$.

Preuve. Désignons par $\omega(h, \lambda)$ la $2n$-forme: $h^*\lambda \wedge \lambda \wedge \Omega^{n-1}$. C'est une $2n$-forme à support compact, car hors du support de h, $\omega(h, \lambda)$ devient $\lambda \wedge \lambda \wedge \Omega^{n-1}$ qui est nulle.

Montrons que le nombre réel $[\omega(h, \lambda)]$ est indépendant du choix de λ. Soit λ' une autre 1-forme telle que $\Omega = d\lambda'$. Alors $\lambda' = \lambda + \alpha$ où α est une forme fermée. On a:

$$\begin{aligned}\omega(h, \lambda') = \omega(h, \lambda) &+ h^*\lambda \wedge \alpha \wedge \Omega^{n-1} + h^*\alpha \wedge \lambda \wedge \Omega^{n-1} \\ &+ h^*\alpha \wedge \alpha \wedge \Omega^{n-1}.\end{aligned}$$

D'après la proposition I.1.3,

$$h^*\alpha = \alpha + df$$

où $f = \int_0^1 h_t^* i(\dot{h}_t)\alpha\, dt$ et où h_t est une isotopie symplectique de h à l'identité. Donc:

$$h^*\lambda \wedge \alpha \wedge \Omega^{n-1} + h^*\alpha \wedge \lambda \wedge \Omega^{n-1} = (h^*\lambda - \lambda) \wedge \alpha \wedge \Omega^{n-1} + df \wedge \lambda \wedge \Omega^{n-1}.$$

On a:

$$(h^*\lambda-\lambda)\wedge\alpha\wedge\Omega^{n-1}=d\Phi_1, \quad \text{où} \quad \Phi_1=(h^*\lambda-\lambda)\wedge\alpha\wedge\lambda\wedge\Omega^{n-2}$$
$$h^*\alpha\wedge\alpha\wedge\Omega^{n-1}=d\Phi_2, \quad \text{où} \quad \Phi_2=h^*\alpha\wedge\alpha\wedge\lambda\wedge\Omega^{n-2}.$$

Donc:

$$\begin{aligned}\omega(h,\lambda')&=\omega(h,\lambda)+d(\Phi_1+\Phi_2)+df\wedge\lambda\wedge\Omega^{n-1}\\&=\omega(h,\lambda)+d(\Phi_1+\Phi_2+f\cdot\lambda\wedge\Omega^{n-1})-f\cdot\Omega^n.\end{aligned}$$

Mais d'après la remarque ci-dessus, $f\cdot\Omega^n$ est exacte. Il en résulte donc que $[\omega(h,\lambda')]=[\omega(h,\lambda)]$.

La correspondance $h\mapsto[\omega(h,\lambda)]$ est un homomorphisme:
En effet, si h_1 et h_2 sont deux éléments de $G_\Omega(M)$, alors:

$$\begin{aligned}\omega(h_1\cdot h_2,\lambda)&=(h_2^*(h_1^*\lambda-\lambda)+(h_2^*\lambda-\lambda))\wedge\lambda\wedge\Omega^{n-1}\\&=((h_1^*\lambda-\lambda)+dg+(h_2^*\lambda-\lambda))\wedge\lambda\wedge\Omega^{n-1}\end{aligned}$$

où $g=\int_0^1(h_2^t)^*i(\dot{h}_2^t)(h_1^*\lambda-\lambda)\,dt$ et où h_2^t est une isotopie symplectique de h_2 à l'identité. Donc:

$$\begin{aligned}\omega(h_1\cdot h_2,\lambda)&=\omega(h_1,\lambda)+\omega(h_2,\lambda)+dg\wedge\lambda\wedge\Omega^{n-1}\\&=\omega(h_1,\lambda)+\omega(h_2,\lambda)+d(g\cdot\lambda\wedge\Omega^{n-1})-g\cdot\Omega^n.\end{aligned}$$

D'après la remarque ci-dessus, $g\cdot\Omega^n$ est une forme exacte. Il en résulte donc que μ est un homomorphisme de groupes.

Si $h\in\operatorname{Ker}S(M)$, alors $h^*\lambda=\lambda+df(h,\lambda)$. Dès lors:

$$\begin{aligned}\omega(h,\lambda)&=df(h,\lambda)\wedge\lambda\wedge\Omega^{n-1}\\&=-f(h,\lambda)\cdot\Omega^n+d(f(h,\lambda)\cdot\lambda\wedge\Omega^{n-1})\end{aligned}$$

c.à.d

$$[\omega(h,\lambda)]=-[f(h,\lambda)\cdot\Omega^n]=-(n+1)\cdot R(h)$$

La proposition est démontrée.

6. Ennoncé des résultats

Rappelons qu'un groupe G est dit parfait s'il est égal à son sous-grouppe des commutateurs $[G,G]$, c.à.d. si l'abélianisé $G/[G,G]$ de G, noté $H_1(G)$ est trivial.

Un groupe G est dit simple s'il ne possède pas d'autres sous-groupes normaux que le groupe G lui-même et le groupe trivial (réduit à l'élément neutre).

Les résultats principaux de ce travail sont les suivants:

THÉORÈME II.6.1. *Soit* (M, Ω) *une variété symplectique close et connexe. Alors:*

(i) *Le noyau* Ker $\tilde{S}(M)$ *de* $\tilde{S}: \widetilde{G_\Omega(M)} \to H^1(M, \mathbf{R})$ *est un groupe parfait égal à* $[\widetilde{G_\Omega}(M), \widetilde{G_\Omega}(M)]$.

(ii) *Le noyau* Ker $S(M)$ *de* $S: G_\Omega(M) \to H^1(M, R)/\Gamma$ *est un groupe simple égal à* $[G_\Omega(M), G_\Omega(M)]$.

COROLLAIRE. *Soit* (M, Ω) *une variété symplectique close et connexe. Alors:*

(i) $H_1(\widetilde{G_\Omega}(M)) \cong H^1(M, \mathbf{R})$

(ii) $H_1(G_\Omega(M)) = H^1(M, \mathbf{R})/\Gamma$

Remarques. (a) Ce théorème est l'analogue d'un théorème de Thurston pour les difféomorphismes qui préservent une forme-volume [16]. Sa démonstration occupera le prochain chapitre.

(b) comme le montre la proposition II.4.1, le théorème II.6.1 est faux si M est non compacte.

On a le résultat suivant:

THÉORÈME II.6.2. *Soit* (M, Ω) *une variété symplectique connexe, non compacte. Alors le noyau* Ker R, *de l'homomorphisme* R, *est un groupe simple.*

COROLLAIRE. *Soit* (M, Ω) *une variété symplectique non compacte, connexe et telle que* $H_c^1(M, \mathbf{R}) = 0$, *alors:*

(i) $H_1(G_\Omega(M)) \cong \mathbf{R}/\Lambda$

(ii) $[G_\Omega(M), G_\Omega(M)]$ *est un groupe simple*

Remarque. Si en plus des hypothèses du corollaire, la forme Ω est exacte, alors $H_1(G_\Omega(M)) \cong \mathbf{R}$.

Comme conséquence du théorème II.6.2, on obtient:

THÉORÈME II.6.3. *Soit* M *une variété différentiable de dimension* $2n \geqslant 4$ *munie d'une forme symplectique exacte* Ω. *Alors:*

(i) $H_1(G_\Omega(M)) = H_c^1(M, \mathbf{R}) \oplus \mathbf{R}$

(ii) $[G_\Omega(M), G_\Omega(M)]$ *est un groupe simple*

Remarque. Rousseau [13] a déduit du théorème II.6.2 la structure du groupe $G_\Omega(M)$ si M est non compacte. En particulier, il retrouve par des méthodes différentes le théorème II.6.3.

CHAPITRE III

DEMONSTRATION DES RESULTATS

1. L'invariant R et l'obstruction à l'extension des isotopies symplectiques

Soit M une variété différentiable de dimension n et U un ouvert de M difféomorphe à une boule de $\mathbf{R}^n$. On dira que U est une *boule* de M. Si U et V sont deux boules telles que $\bar{V} \subsetneq U$, on dira que $\bar{U} - V$ est une couronne de dimension n. La couronne de dimension n est homéomorphe à $S^{n-1} \times I$.

Soit (M, Ω) une variété symplectique compacte et soit U une boule de M. Désignons par G_U (respectivement $G_{C\bar{U}}$) le sous-groupe de Ker $S(M)$ formé des éléments à support dans U (respectivement hors de $\bar{U}$). Soit $\tilde{h} \in \tilde{G}_U$ (resp. $\tilde{h} \in \tilde{G}_{C\bar{U}}$) et f_t le hamiltonnien à support dans U (respectivement dans $M - \bar{U}$) du champ $\dot{h}_t$, où h_t est un chemin différentiable dans Ker $S(M)$ à support dans U (resp. hors de $\bar{U}$) représentant $\tilde{h}$. Alors la correspondance:

$$\tilde{h} \mapsto \int_{M \times I} f_t \cdot dt \wedge \Omega^n$$

est un homomorphisme surjectif $\tilde{R}_U$ (resp. $\tilde{R}_{C\bar{U}}$) de $\tilde{G}_U$ (resp. de $\tilde{G}_{C\bar{U}}$) dans $\mathbf{R}$.

Soient Λ, Λ_U, $\Lambda_{C\bar{U}}$, les images par $\tilde{R}$, $\tilde{R}_U$, $\tilde{R}_{C\bar{U}}$, des sous-groupes $\pi_1(\text{Ker } S(M))$ (où M est une variété symplectique ouverte), $\pi_1(G_U)$, $\pi_1(G_{C\bar{U}})$ (où U est une boule dans une variété symplectique compacte) de $\widetilde{\text{Ker } S(M)}$, $\tilde{G}_U$, $\tilde{G}_{C\bar{U}}$, on obtient par passage au quotient des homomorphismes surjectifs

$$R(M): \text{Ker } S(M) \to R/\Lambda$$

$$R_U: G_U \to R/\Lambda_U$$

$$R_{C\bar{U}}: G_{C\bar{U}} \to R/\Lambda_{C\bar{U}}$$

Soit $C = \bar{U} - V$ une couronne dans une variété symplectique compacte. Alors les invariants R_U et $R_{C\bar{V}}$ sont bien définis. La proposition suivante montre que la

différence des invariants $R_{C\bar{V}}$ et R_U peut s'interpréter comme une obstruction à l'existence d'extensions d'isotopies symplectiques définies sur une partie de la couronne. On met également en évidence le lien qu'il y a entre $R_{C\bar{V}} - R_U$ et l'invariant S.

PROPOSITION III.1.1. *Soient $C_i = \bar{U}_i - V_i$, $i = 1, 2$, deux couronnes dans une variété symplectique compacte (M, Ω) se coupant comme dans la figure* 1. *Soit h_t une isotopie symplectique de M proche de l'identité à support dans C_1. L'obstruction $\mathcal{O}$ à l'existence l'une isotopie symplectique à support dans $C_1 \cap U_2$ et égal à h_t sur $C_1 \cap V_2$ est le nombre réel:*

$$\mathcal{O} = (\tilde{R}_{C\bar{V}_1}(\{h\}) - \tilde{R}_{U_1}(\{h\}))/\mathrm{Vol}\,(M)$$

où $\mathrm{Vol}\,(M) = \int_M \Omega^n$ *et* $\{h\}$ *est l'image de h_t dans le revêtement universel.*

Démonstration. Il existe une isotopie $\hat{h}_t$ non symplectique à support dans $C_1 \cap U_2$ et qui est égale à h_t sur $C_1 \cap V_2$. Soit f_t le hamiltonnien à support dans U_1 de h_t et soit 0 un point de V_1, on a:

$$\tilde{R}_U(\{h\}) = \int_{M \times I} f_t \cdot dt \wedge \Omega^n$$

$$\tilde{R}_{C\bar{V}}(\{h\}) = \int_{M \times I} (f_t - f_t(0))\, dt \wedge \Omega^n = R_U(h) - \left(\int_0^1 f_t(0)\, dt\right) \cdot \mathrm{Vol}\,(M).$$

Soit D le 2-cycle relatif hachuré sur la figure 1. Sur ∂D, $\hat{h}_t =$ identité sauf sur le segment $\gamma = ab$ d'extrémités a et b sur lequel $\hat{h}_t = h_t$. D'après la proposition

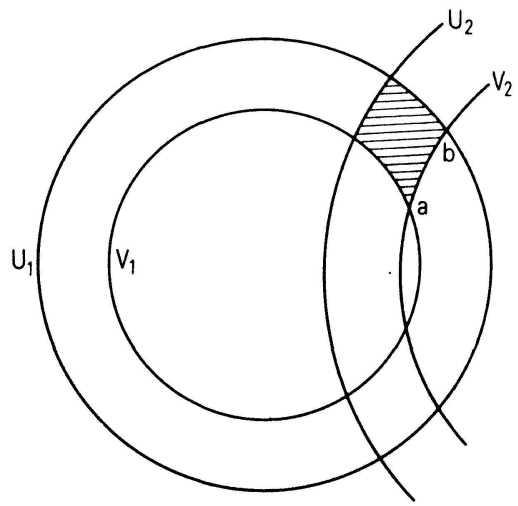

Figure 1

I.1.3 est le théorème II.2.1, on a:

$$\mathcal{O} = \int_\gamma \int_c^1 h_t^*(i(\dot{h}_t)\Omega)\, dt = \int_\gamma \int_c^1 h_t^*(df_t)\, dt = \int_0^1 (f_t(h_t(b)) - f_t(h_t(a)))\, dt$$
$$= \int_0^1 (f_t(b) - f_t(a))\, dt = -\int_0^1 f_t(0)\, dt.$$

Donc: $\tilde{R}_{C\bar{V}}(\{h_t\}) - \tilde{R}_U(\{h\}) = \mathcal{O}.\ \mathrm{Vol}\,(M)$. cqfd.

2. Recouvrement associé à une triangulation

Suivant Thurston [16] nous associons à toute C^∞-triangulation $T = (\Delta_i^k)_{i \in I_k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, d'une variété différentiable M de dimension n, un recouvrement ouvert $\mathcal{V} = (V_i^k)_{i \in I_k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ par des boules V_i^k indexées comme les simplexes de la triangulation. Ce recouvrement sera construit par récurence sur les squelettes. Les ouverts V_i^0 sont des boules contenant Δ_i^0 telles que $V_i^0 \cap V_j^0 = \varnothing$ si $i \neq j$. Supposons construites les boules $\{V_j^l\}_{j \in I_l}$, $l = 0, 1, \ldots, k-1$, qui recouvrent le $(k-1)$-squelette de manière que:

$$\tilde{\Delta}_i^k = \Delta_i^k - \bigcup_{(l \in I_j, j \leqq k-1)} V_l^j$$

soit un rétrécissement du simplexe Δ_i^k. Soit $\hat{\Delta}_i^k$ un léger épaississement de $\tilde{\Delta}_i^k$. On prend pour V_i^k un C^∞-voisinage tubulaire de $\hat{\Delta}_i^k$. Le voisinage tubulaire V_i^k sera choisi suffisamment petit pour que $V_i^k \cap V_j^k = \varnothing$ pour tout k et $i \neq j$.

Soit $\mathcal{U} = (U_i^k)_{i \in I_k}$, $k = 0, \ldots, n$ un recouvrement construit de la même manière que $\mathcal{V}$, mais où chaque U_i^k est un épaississement de V_i^k de telle sotte que $\bar{V}_i^k \subset U_i^k$ pour tout k et tout i et que $U_i^k \cap U_j^k = \varnothing$ pour tout k et $i \neq j$.

Nous dirons que les recouvrements $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont des *recouvrements associés à la triangulation T.*

Dans la suite, nous envisagerons de tels recouvrements et nous nous intéresserons aux sous-ensembles de M suivants:

$$F_i^k = \bar{U}_i^k - \bigcup_{j \leqq k} V^j \quad \text{où} \quad V^j = \bigcup_{l \in I_j} V_l^j$$

$$G_{i,j}^{k,l} = (\bar{U}_i^k \cap \bar{U}_j^l) - \left(\bigcup_{j \leqq k} V^j\right) = F_i^k \cap \bar{U}_j^l.$$

D'après la manière dont sont construits les ouverts U_i^k et V_i^k on voit que F_i^k est homéomorphe à $\Delta_i^k \times C^{n-k}$, où C^{n-k} est la couronne de dimension $n-k$, qui est

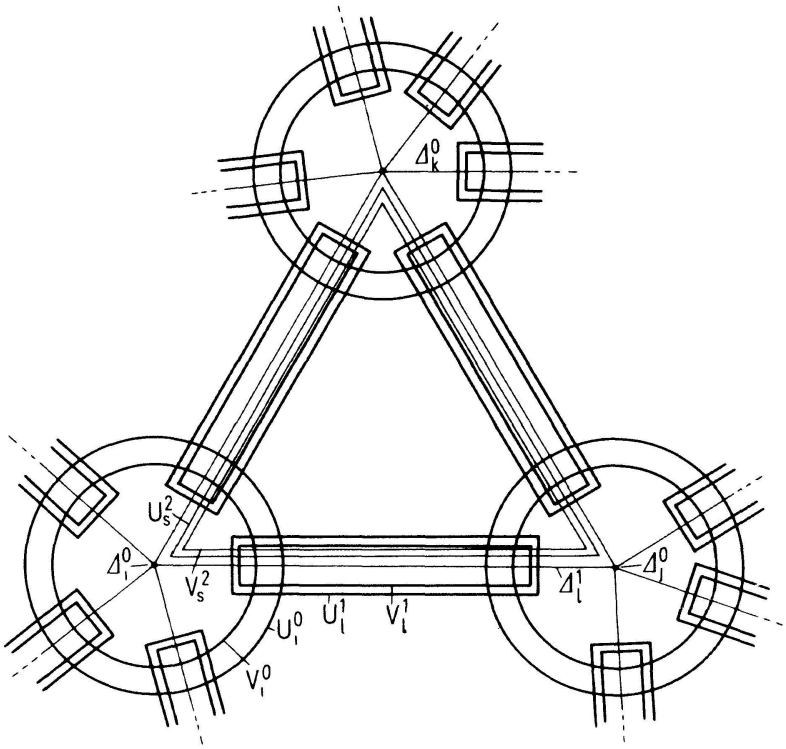

Figure 2

homéomorphe à $S^{n-k-1} \times I$. On voit aussi (cfr figure 2) que $G_{i,j}^{k,l}$ est homéomorphe à $\Delta^l \times C^{n-k} \times D^{k-1}$, où D^{k-1} est le disque de dimension $k-1$.

Soit $\mathcal{W} = (W_i)_{i \in 1}$ un recouvrement ouvert de M. On choisit une C^∞-triangulation $T_{\mathcal{W}} = (\Delta_i^k)_{i \in I_k}$, $k = 0, \ldots, n$ telle que l'étoile de chaque sommet de Δ_i^k soit contenue dans l'un des W_j. On construit comme plus haut les recouvrements $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ associés à la triangulation $T_{\mathcal{W}}$ dont les ouverts V_i^k et U_i^k sont suffisamment petits pour que chaque U_i^k soit contenu dans un W_j.

Ainsi donc pour tout recouvrement $\mathcal{W}$ de M, il existe des recouvrements $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ associés à la triangulation $T_{\mathcal{W}}$ qui sont plus fins que le recouvrement donné $\mathcal{W}$.

3. Le lemme de fragmentation

Soit M une variété différentiable et h un difféomorphisme de M isotope à l'identité. Il est bien connu que pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de M, h peut s'écrire: $h = h_1, h_2, \ldots, h_m$, où chaque h_i est un difféomorphisme isotope à l'identité à support dans un ouvert de $\mathcal{U}$. Nous allons montrer que le groupe Ker $S(M)$ jouit de cette propriété (Lemme de fragmentation). Nous aurons besoin de la proposition suivante:

PROPOSITION III.3.1. *Soit (M, Ω) une variété symplectique compacte et soit h_t une isotopie dans* Ker $S(M)$. *Si U et U' sont deux boules de M telles que $\bigcup_{t\in I} h_t(\bar{U}) \subset U'$ il existe des isotopies h_t^1 et h_t^2 dans* Ker $S(M)$ *telles que:*

$$\operatorname{supp}(h_t^1) \subset U'; \qquad \operatorname{supp}(h_t^2) \subset M - \bar{U}; \qquad h_t = h_t^1 \cdot h_t^2$$

$$R_{U'}(h_t^1) = R_{C\bar{U}}(h_t^2) = 0, \quad \textit{pour tout } t.$$

Démonstration. Soit λ une fonction C^∞ à support dans U' et égale à 1 sur $\bigcup_{t\in I} h_t(\bar{U})$ et soit f_t une famille de fonctions telle que $i(\dot{h}_t)\Omega = df_t$. Si φ_t est la famille de difféomorphismes symplectiques obtenue on intégrant le gradient symplectique de $\lambda \cdot f_t$, alors $\operatorname{supp}(\varphi_t) \subset U'$ et $\varphi_t = h_t$ sur U. Posons:

$$r_1(t) = R_{U'}(\varphi_t) \quad \text{et} \quad r_2(t) = R_{CU}(\varphi_t'), \quad \text{où} \quad \varphi_t' = \varphi_t^{-1} \cdot h_t.$$

Soit u_t une famille de fonctions C^∞ à support dans U' telles que:

(i) $u_t = -(r_1(t) + r_2(t))/\operatorname{Vol}(M)$ sur U, où $\operatorname{Vol}(M) = \int_M \Omega^n$

(ii) $\int_M u_t \Omega^n = -r_1(t)$.

Le groupe à 1-paramètre $I \ni s \mapsto \nu_t^s$ engendré par le gradient symplectique de u_t a son support dans $U' - U$ et l'on a:

$$R_{U'}(\nu_t^1) = -r_1(t)$$

$$R_{CU}(\nu_t^1) = \int_M (u_t + (r_1(t) + r_2(t))/\operatorname{Vol}(M)\Omega^n = r_2(t).$$

Si $h_t^1 = \varphi_t \cdot \gamma_t^1$ et $h_t^2 = (\gamma_t^1)^{-1} \cdot \varphi_t^1$, on a: $h_t = h_t^1 \cdot h_t^2$, $\operatorname{supp}(h_t^1) \subset U'$ $\operatorname{supp}(h_t^2) \subset M - U$ et $R_{U'}(h_t^1) = R_{C\bar{U}}(h_t^2) = 0$ pour tout t. D'où la proposition.

LEMME DE FRAGMENTATION (III.3.2). *Soit (M, Ω) une variété symplectique compacte et soit $\mathcal{O} = (O_i)$ un recouvrement ouvert fini de M par des boules O_i. Toute isotopie $h_t \in$* Ker $S(M)$ *peut s'écrire comme un produit d'isotopies $h_t^i \in$* Ker $S(M)$ *à support dans des boules O_i et telles que $R_{O_i}(h_t^i) = 0$.*

Nous aurons besoin du résultat intermédiaire suivant:

LEMMA III.3.2'. *Soit (M, Ω) une variété symplectique compacte de dimension $2n$ et soit $\mathcal{U} = (U_i^k)_{i\in I_k}$, $k = 0, \ldots, 2n$, un recouvrement associé à une triangulation. Toute isotopie assez petite Ψ_t dans* Ker $S(M)$ *est homotope relativement aux extrémités à une isotopie Φ_t qui est un produit $\Phi_t = \varphi_0^t, \ldots, \varphi_{2n}^t$ d'isotopies φ_k^t dans*

Ker $S(M)$ *à support dans la réunion disjointe* $U^k = \bigcup_{i \in I_k} U_i^k$. *De plus si* $\varphi_{k,i}^t$ *est la restriction de* φ_k^t *à la boule* U_i^k, *on a:*

(i) $R_{U_i^k}(\varphi_{k,i}^t) = 0$, *pour tout* i *et tout* $k < 2n$, *et tout* $t \in I$

(ii) $\sum_{j \in I_{2n}} R_{U_j^{2n}}(\varphi_{2n,j}^t) = 0$, *pour tout* $t \in I$

Démonstration. D'après la proposition III.3.1, il existe des isotopies symplectiques h_t et g_t telles que supp $(h_t) \subset M - V_1^0$, supp $(g_t) \subset U_1^0$, $\Psi_t = g_t \cdot h_t$ et $R_{U_1^0}(g_t) = R_{C\overline{V}_1^0}(h_t) = 0$.

Le lemme III.3.2′ résultera du sous-lemme suivant:

SOUS-LEMME III.3.3. *Il existe des isotopies symplectiques* $h_t^{(k)}$, $k = 0, \ldots, 2n$, *dans* Ker $S(M)$ *telles que:*

$$\text{(i)}\quad h_t^{(0)} = \begin{cases} h_t \text{ sur } V^0 \left(\text{où } V^k = \bigcup_{i \in I_k} V_i^k\right) \\ \textit{identité sur } U_1^0 \\ \textit{identité hors de } U^0 \left(\text{où } U^k = \bigcup_{i \in I_k} U_i^k\right) \end{cases}$$

$$\text{(ii)}\quad h_t^{(k)} = \begin{cases} h_t^{(k-1)} \textit{ hors de } U^k \\ h_t \textit{ sur } \bigcup_{j \leqq k} V^j \textit{ pour } k \geqq 1 \end{cases}$$

On convient que $h_t^{(-1)} = \mathrm{id}_M$

(iii) si $\psi_{k,i}^t$ est la restriction de $\psi_k^t = (h_t^{(k-1)})^{-1} \cdot h_t^{(k)}$ à U_i^k, alors:

(a) $R_{U_i^k}(\psi_{k,i}^t) = 0$ pour tout i, k $k < 2n$ et pour tout $t \in I$

(b) $\sum_{j \in I_{2n}} R_{U_j^{2n}}(\psi_{2n,j}^t) = 0$, pour tout $t \in I$.

Le lemme III.3.2′ en résultera immédiatement. En effet: $h_t^{(2n)} = h_t$, $h_t^{(-1)} = \mathrm{id}_M$. Si on pose $\varphi_0^t = g_t \cdot \psi_0^t$ et $\varphi_k^t = \psi_k^t$ pour $k > 0$, on a: $\Psi_t = \varphi_0^t, \ldots, \varphi_{2n}^t$ et chacun des φ_k^t vérifie les conditions du lemme.

Démonstration du sous-lemme. Les isotopies $h_t^{(k)}$ seront construites par récurence. Pour pouvoir mener à bien cette construction, nous imposerons encore la condition suivante:

(iv)$_{(k)}$ Etant donné un voisinage $\mathcal{W}^{(k)}$ de id_M dans $C^\infty(I, \mathrm{Diff}^\infty(M))$, il existe un voisinage $\mathcal{W}^{(k-1)}$ de id_M tel que si $h_t^{(k-1)}$ et h_t sont dans $\mathcal{W}^{(k-1)}$, alors $h_t^{(k)} \in \mathcal{W}^{(k)}$.

Les voisinages $\mathcal{W}^{(k)}$ seront choisis suffisamment petits pour que si $V_i^{*k} = \bigcup_{t \in I} h_t(V_i^k)$ et si $U_i^{*k}(\pm) = M - (\bigcup_{t \in I} (h_t^{(k-1)})^{\pm 1}(M - U_i^k))$, on ait:

(v) $V_i^{*k} \subset U_i^{*k}(\pm)$. On posera: $U_i^{*k} = U_i^{*k}(+)$ et $U_i'^k = U_i^{*k}(-)$

Construction de $h_t^{(0)}$

Soit r_t une isotopie. On considère les 1-formes suivantes:

$$\alpha(r_t) = \int_0^t r_s^*(i(\dot{r}_s)\Omega\, ds \quad \text{et} \quad \beta(r_t) = \int_0^t i(\dot{r}_s)\Omega\, ds.$$

Puisque h_t est une isotopie dans Ker $S(M)$, la forme $\beta(h_t)$ est exacte d'après la proposition II.3.3. Il en est de même de la forme $\alpha(h_t)$ qui lui est cohomologue. Soit f_t l'unique fonction qui s'annulle sur un voisinage β de $\Delta_1^0 \subset V^0$ et telle que $\alpha(h_t) = df_t$ et soit g_t la famille de fonctions à support hors de B telle que $i(\dot{h}_t)\Omega = dg_t$. On a alors:

$$f_t(x) = \int_0^t g_s(h_s(x))\, ds$$

pour tout $x \in M$. Soit U_i^0 la boule contenant $A_i = \Delta_i^0$ et K_i une courbe dans $U_i^0 - U^1$ joignant A_i à un point P_i de $\partial \bar{U}_i^0$ (voir figure 3).

Nous nous proposons de construire un $h_t^{(0)}$ qui vérifie, en plus des conditions énumérées plus haut, la condition suivante, dont l'intérêt n'apparaitra que ultérieurement pour pouvoir construire $h_t^{(1)}$:

(vi) $\int_{K_i} \alpha(h_t^{(0)}) = -f_t(A_i)$ pour tout i

Il existe un voisinage $\mathcal{W}^{(-1)}$ de id_M dans $C^\infty(I, \mathrm{Diff}^\infty(M))$ dépendant des boules U_i^0 et V_i^0 tel que si $h_t \in \mathcal{W}^{(-1)}$, alors $\bar{V}_i^{*0} \subset U_i^0$. On supposera donc que $h_t \in \mathcal{W}^{(-1)}$. Soit λ une fonction C^∞, à support dans U^0, nulle sur U^0 et égale à 1 sur $\bigcup_{j \neq 1} V_j^{*0}$ et soit g_j^t la restriction à U_j^0 de $\lambda \cdot g_t$. Pour tout $j \in I_0$, on choisit une fonction C^∞ r_j^t à support dans $U_j^0 - V_j^{*0}$ telle que $r_1^t = 0$ et si $j \neq 1$, on ait:

$$\int_M r_j^t \Omega^n = -\int_M g_j^t \Omega^n.$$

Posons: $\tilde{g}_j^t = r_j^t + g_j^t$. Si X_t est le gradient symplectique de $\tilde{g}_t = \sum_j g_j^t$, alors la famille

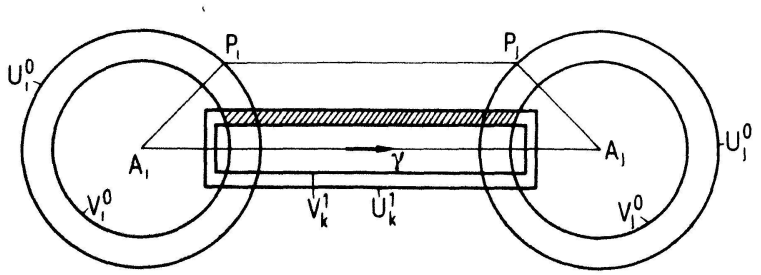

Figure 3

de difféomorphismes symplectiques $h_t^{(0)}$ obtenue en intégrant X_t vérifie les conditions (i), (iii) et $(\mathrm{iv})_{(0)}$. Comme:

$$\alpha(h_t^{(0)}) = d\left(\int_0^t (\tilde{g}_s \circ h_s^{(0)})\, ds\right).$$

On aura:

$$\int_{K_t} \alpha(h_t^{(0)}) = -\int_0^t \tilde{g}_s(h_s^{(0)}(A_i))\, ds.$$

Le point A_i étant dans V_i^0, on a: $h_0^{(0)}(A_i) = h_s(A_i)$ et comme h_s est proche de l'identité, $h_s(A_i)$ est dans V_i^0 pour tout s. Mais sur V_i^0, $\tilde{g}_t = g_i^t = g_t$. Il en résulte que:

$$\int_{K_t} \alpha(h_t^{(0)}) = -\int_0^t g_s(h_s(A_i))\, ds = -f_t(A_i).$$

La condition (vi) est donc aussi vérifiée.

Construction de $h_t^{(k)}$ pour $k \geq 1$

On suppose construites les isotopies $h_t^{(j)}$ pour $j \leqq k-1$ avec toutes les conditions requises.

Soit (λ_1, λ_2) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{(M - \bar{V}^{*k}), U^{*k}\}$ de M. Le champ de vecteurs $X = \lambda_1 \cdot \dot{h}_t^{(k-1)} + \lambda_2 \cdot \dot{h}_t$ sur $M \times I$ définit une isotopie H_t^k de M qui coincide avec h_t sur $\bigcup_{j \leqq k} V^j$ et avec $h_t^{(k-1)}$ hors de U^k. Cette isotopie est donc symplectique partout sauf sur $U^k - \bigcup_{j \leqq k} V^j = \bigcup_{i \in I_k} F_i^k$.

D'après le théorème II.2.1, l'obstruction $\mathcal{O}_k$ à étendre symplectiquement H_t^k est:

$$\mathcal{O}_k = \int_c \Omega_t^k - \Omega \quad \text{où} \quad \Omega_t^k = (H_t^k)^* \Omega,$$

c parcourt l'espace $H_2(M, M - F_i^k)$, pour tout i et k.

Par construction du recouvrement associé à une triangulation, $F_i^k = \Delta_i^k \times C^{n-k}$ (voir le paragraphe 4). Un petit calcul montre que: $H_2(M, M - F_i^k) = H_2(F_i^k, \partial F_i^k)$ est isomorphe à R si $k = 1$ et est trivial si $k \neq 1$. Il en résulte donc que l'obstruction $\mathcal{O}_k$ est nulle si $k \neq 1$.

Occupons-nous du cas $k = 1$. D'après la proposition I.1.3, $\Omega_t^1 - \Omega = d\alpha(H_t^1)$ et l'on a: $\mathcal{O}_1 = \int_{\partial c} \alpha(H_t^1)$, où c est un générateur de $H_2(F_i, \partial F_i)$.

Soit ν un 1-simplexe orienté de la triangulation partant d'un O-simplexe A_i et aboutissant à un autre O-simplexe A_j. Sur la figure 3, nous avons hachuré un générateur c de $H_2(F_i, \partial F_i)$. Soit c' une 2-chaine contenant c dont le bord est constitué par ν, K_i, K_j ainsi que par une courbe L située hors de U^1 joignant les extrémités P_i et P_j de K_i et K_j (voir figure 2). Comme sur $c'-c$, la forme $\Omega_t^1-\Omega$ est nulle, on a que

$$\int_c \Omega_t^1-\Omega=\int_{c'} \Omega_t^1-\Omega.$$

En tenant compte que sur γ, H_t^1 coincide avec h_t, qu'au voisinage de K_i et K_j, H_t^1 n'est rien d'autre que $h_t^{(0)}$ et que la forme $\alpha(H_t^1)$ est identiquement nulle sur L, en utilisant enfin la condition (vi), on a:

$$\mathcal{O}_1=\int_{\partial c'} \alpha(H_t^1)=f_t(A_j)-f_t(A_i)+\int_{K_j} \alpha(h_t^{(0)})-\int_{K_i} \alpha(h_t^{(0)})=0.$$

On voit donc que il n'y a aucune obstruction à étendre symplectiquement H_t^1. Pour $k \geqq 1$, il existe donc des isotopies symplectiques $h_t'^{(k)}$ qui coincident avec H_t^k hors de $\bigcup F_i^k$. Ces isotopies satisfont à la condition (ii). Nous allons les modifier pour qu'elles satisfassent aussi la condition (iii), ceci sans tuer la condition (ii).

Pour tout voisinage $\mathcal{W}'^k$, $k \geqq 1$, de l'identité dans $C^\infty(I, \mathrm{Diff}^\infty(M))$, il existe un voisinage $\mathcal{W}^{(k-1)}$ tel que si $h_t^{(k-1)}$ et h_t sont dans $\mathcal{W}^{(k-1)}$, alors $h_t'^{(k)} \in \mathcal{W}'k$. Ceci résulte de la continuité des opérations avec lesquelles on a fabriqué h_t' à partir de $h_t^{(k-1)}$ et de h_t, et du théorème II.2.1.

Le nombre $R_{U_i^k}((h_t^{(k-1)})^{-1} \cdot h_t'^{(k)}|_{U_i^k})=a_{i,k}^t$ est proche de zéro. Soit s_t^k une famille de fonctions proches de la fonction nulle, à support dans $(U^k-\bigcup_{j \leqq k} V^{*j})$ pour $k \leqq 2n-1$, telle que si $s_t^{k,i}$ est le restriction de s_t^k à U_i^k, on ait:

$$\int_M s_t^{k,i} \cdot \Omega^n=-a_{k,i}^t.$$

Si $u \mapsto r_t^u$ est le groupe à 1-paramètre engendré par le gradient symplectique de s_t^k, on prend pour $h_t^{(k)}$ l'isotopie $r_t \cdot h_t'^{(k)}$. On a alors:

$$R_{U_i^k}((h_t^{(k-1)})^{-1} \cdot h_t^{(k)}|_{U_i^k})=0 \quad \text{pour tout } i \text{ et tout } k<2n.$$

Soit B_0 une petite boule contenue dans V_1^0 telle que $B_0 \cap U_i^k=\varnothing$ si $U_i^k \neq U_1^0$. Le support de l'isotopie $\psi_t^k=(h_t^{(k-1)})^{-1} \cdot h_t^{(k)}$ ne rencontre pas B_0. Par conséquent:

$$R_{U_i^k}(\psi_t^k|_{U_i^k})=R_{CB_0}(\psi_t^k|_{U_i^k})=0, \quad \text{pour} \quad k<2n.$$

Comme $h_t = \psi_t^0, \ldots, \psi_t^{2n}$ et que $R_{CB_0}(h_t) = 0$, il en résulte que:

$$0 = R_{CB_0}(h_t) = \sum_{k=0}^{2n} R_{CB_0}(\psi_t^k | U_i^k) = \sum_{i \in I_{2n}} R_{CB_0}(\psi_t^{2n}|_{U_i^{2n}})$$

$$= \sum_{i \in I_{2n}} R_{U_i^{2n}}(\psi_t^{2n}|_{U_i^{2n}}).$$

La condition (iii) est donc aussi vérifiée. Remarquons que la construction qu'on vient de faire n'affecte pas la validité de la condition (ii). De plus pour tout voisinage $\mathcal{W}^k$ de l'identité dans $C^\infty(I, \mathrm{Diff}^\infty(M))$, il existe un voisinage $\mathcal{W}'^{(k)}$ tel que si $h_t'^{(k)} \in \mathcal{W}'^{(k)}$, alors $h_t^{(k)} \in \mathcal{W}^{(k)}$. Il suffit pour cela de choisir convenablement la famille de fonctions s_t^k ci-dessus.

L'isotopie $h_t^{(k)}$ ainsi construite vérifie toutes les conditions exigées dans le lemme.

La grandeur des voisinages successifs à considérer est dictée par la condition (v). Pour que la construction puisse se poursuivre jusqu'au bout, il faut exiger que $h_t \in \mathcal{W} = \bigcap_{i=-1}^{2n} \mathcal{W}^{(k)}$: ce qu'on peut toujours supposer en subdivisant suffisamment l'isotopie h_t. Le sous-lemme est démontré.

Démonstration du lemme III.3.2. Soit $\mathcal{U} = (U_i^k)$ un recouvrement associé à une triangulation T_θ (cfr & 5).

Nous pouvons supposer que l'isotopie $h_t \in \mathrm{Ker}\, S(M)$ est proche de l'identité, car on peut toujours écrire une isotopie comme un produit d'isotopies proches de l'identité.

D'après le lemme II.6.2′, h_t s'écrit:

$$h_t = \psi_0^t \cdot \psi_1^t, \ldots, \psi_{2n}^t.$$

Soit $\psi_{k,j}^t$ l'isotopie égale à ψ_k^t sur U_j^k et à l'identité en dehors de U_j^k. On a montré que $R_{U_j^k}(\psi_{k,j}^t) = 0$, pour tout j et tout $k < 2n$, et que $\sum R_{U_j^{2n}}(\psi_{2n,j}^t) = 0$.

Pour tout $i \in I_{2n}$, soit x_i le barycentre de Δ_i^{2n}, et a_{ik} le barycentre de la face commune Δ_{ik}^{2n-1} aux simplexes Δ_i^{2n} et Δ_k^{2n}. Soit G le graphe dont les 0-simplexes sont les points x_i et a_{ik} et dont les 1-simplexes sont les 1-simplexes de sommets x_i et a_{ik}. Soit T l'arbre obtenue en supprimant dans $G \cap (M - V^0)$ certaines arrêtes. On considère des boules B_{ik} centrées en a_{ik} telles que: $B_{ik} \cap U_j^{2n} = \varnothing$ pour tout $j \in I_{2n}$; $B_{ik} \cup U_i^{2n} \subset 0_r$; $B_{ik} \cup U_k^{2n} \subset O_s$. Soit $\alpha_i^t \in \mathrm{Ker}\, S(M)$ à support dans B_{ik} tel que $R_{B_{ik}}(\alpha_i^t) = -R_{U_i^{2n}}(\psi_{2n,i}^t)$. Alors $\psi_{2n,i}^t \cdot \psi_{2n,k}^t = \tilde{\psi}_{2n,i}^t \cdot \hat{\psi}_{2n,k}^t$, avec: $\tilde{\psi}_{2n,i}^t = \psi_{2n,i}^t \cdot \alpha_i^t$ et $\hat{\psi}_{2n,k}^t = (\alpha_i^t)^{-1} \psi_{2n,k}^t$, et supp $(\tilde{\psi}_{2n,i}^t) \subset O_r$, $R_{O_r}(\tilde{\psi}_{2n,i}^t) = 0$. On a donc chassé l'invariant R de la boule O_r (en l'augmentant dans la boule voisine O_s). En procédant de proche en proche, par ordre à partir des branches du sommet jusqu'au pied de

l'arbre T, on accumule tous les invariants R au pied de l'arbre (= dernière boule). Comme la somme des invariants R était nulle (condition (iii) b du lemme III.3.2'), l'invariant R est donc aussi nulle dans la dernière boule. Le lemme est démontré.

4. L'ensemble simplicial $B\bar{G}$

Pour tout groupe topologique G, on dénote par G^{Δ^n} l'ensemble des applications continues du simplexe standard Δ^n dans G. L'application $a: G \times G^{\Delta^n} \to G^{\Delta^n}$ définie par:

$$a(g, c) = g \cdot c \quad \text{où} \quad (g \cdot c)(x) = g \cdot c(x), \quad \text{pour} \quad x \in \Delta^n, \qquad g \in G, \qquad c \in G^{\Delta^n}$$

est une action de G sur G^{Δ^n}. Soit $B\bar{G}(n)$ le quotient G^{Δ^n}/G de G^{Δ^n} modulo cette action. On identifie $B\bar{G}(n)$ avec l'ensemble $(G, e)^{(\Delta^n, 0)}$ des applications continues de Δ^n dans G, qui appliquent le premier sommet "0" de Δ^n sur l'élément neutre e de G.

La réunion des $B\bar{G}(n)$ est un ensemble simplicial $B\bar{G}$. En effet, on a des opérateurs-face $\partial_i: B\bar{G}(n) \to B\bar{G}(n-1)$ et des opérateurs-dégénérescence $s_i: B\bar{G}(n) \to B\bar{G}(n+1)$ définis comme suit: pour tout $c \in BG(m)$ et tout $x_m \in \Delta^m$ de coordornées barycentriques $(t_0, t_1, \ldots, t_m)$, alors:

$$(\partial_0 c)(t_0, \ldots, t_{n-1}) = c(0, t_0, \ldots, t_{n-1}) \cdot c(0, 1, 0, 0, \ldots, 0)^{-1}$$
$$(\partial_i c)(t_0, \ldots, t_{n-1}) = c(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{n-1}) \quad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq n-1$$
$$(s_i c)(t_0, \ldots, t_{n+1}) = c(t_0, \ldots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+1}, \ldots, t_{n+1}) \quad \text{pour} \quad 0 \leqq i \leqq n+1.$$

Ces opérateurs satisfont aux relations habituelles entre opérateurs-face et opérateurs-dégénérescence dans les ensembles simpliciaux.

L'ensemble simplicial $B\bar{G}$ ne possède qu'un seul 0-simplexe: c'est l'unique application qui associe au point Δ^0 l'élément neutre e.

De plus $B\bar{G}$ est un complexe de Kan, c.à.d. qu'il jouit de la propriété d'extension suivante: soient $c_0, \ldots, c_{k-1}, c_{k+1}, \ldots, c_m$ des m-simplexes tels que $\partial_j c_j = \partial_{j-1} c_i$ pour $i < j$, $i \neq k$, $m > 0$, alors il existe un $(m+1)$-simplexe c tel que $\partial_i c = c_i$, pour $i \neq k$.

On définit sur $B\bar{G}(1)$ la relation d'équivalence suivante: soient τ_0 et τ_1 deux éléments de $B\bar{G}(1)$, $\tau_0 \sim \tau_1$ si et seulement si il existe un 2-simplexe $c \in B\bar{G}(2)$ tel que $\partial_0 c = \tau_0$, $\partial_1 c = \tau_1$ et $\partial_2 c$ est le 1-simplexe dégénéré (c.a.d. l'application constante de 1 dans G qui applique 1 sur l'élément neutre e). Les classes d'équivalence $R\bar{G}(1)/\sim$ modulo cette relation forment un groupe. Par définition: $\pi_1(B\bar{G}) = B\bar{G}(1)/\sim$.

Pour tout $c \in B\bar{G}(1)$, la classe d'homotopie relativement aux extrémités du chemin $c(t)$, $t \in 1$, est élément du revêtement universel $\tilde{G}$ de G. De plus deux éléments c_0 et c_1 de $B\bar{G}(1)$ définissent le même élément dans $\tilde{G}$ si et seulement si $c_0 \sim c_1$. Il en résulte:

$$\pi_1(B\bar{G}) = \tilde{G} \quad \text{et} \quad H_1(B\bar{G}, Z) = H_1(\pi_1(B\bar{G})) = H_1(\tilde{G}).$$

Soit τ_t un 1-simplexe. Comme $B\bar{G}$ n'a qu'un zéro-simplexe, τ_t est un cycle. Ce cycle est homologue à zéro si et seulement si il existe des 1-simplexes $a_i(t)$, $b_i(t)$ tels que τ_t soit homotope relativement aux extrémités au chemin:

$$t \mapsto [a_1(t), b_1(t)] \cdots [a_r(t), b_r(t)]$$

où

$$[a_i(t), b_i(t)] = a_i(t) b_i(t) (a_i(t))^{-1} \cdot (b_i(t))^{-1}.$$

En particulier, on doit avoir (si τ_t est homologue à zéro):

$$\tau_1 = [a_1(1), b_1(1)] \cdots [a_r(1), b_r(1)].$$

Soient σ, $\tau \in B\bar{G}(1)$. Désignons par $I_{\sigma(1)}\tau$ le conjugé de τ par $\sigma(1)$: c'est le 1-simplexe $t \mapsto \sigma(1)\tau(t)(\sigma(1))^{-1}$ On a:

PROPOSITION III.4.1. *Pour tous* 1-*simplexes* σ, $\tau \in B\bar{G}(1)$, *les* 1-*simplexes* τ *et* $I_{\sigma(1)}\tau$ *sont homologues.*

Démonstration. Les 1-simplexes $c_1(t) = [\sigma(1), \tau(t)]$ et $c_2(t) = [\sigma(t), \tau(t)]$ sont homotopes par l'homotopie $H_{s,t} = [\sigma(s + t - s \cdot t), \tau(t)]$. Comme $c_2(t)$ est homologue à zéro, il en est de même de $c_1(t)$: ce qui signifie que $\tau(t)$ est homologue à $\sigma(1)\tau(t)(\sigma(1))^{-1}$. cqfd

Supposons maintenant que G soit un groupe de difféomorphismes d'une variété différentiable M. Pour tout n, un élément $c \in B\bar{G}(n)$ définit un feuilletage sur $\Delta^n \times M$ transverse aux fibres de la projection $\Delta^n \times M \to \Delta^n$. La feuille passant par $(t, x) \in \Delta^n \times M$ est l'ensemble $\bigcup_{t \in \Delta^n} c_t(x)$. Le *support* d'un tel n-simplexe est défini comme étant le plus petit fermé $K \subset M$ tel que le feuilletage induit sur $\Delta^n \times (M - K)$ par c soit horizontal, c.à.d. que $c_t(x) = x$ pour tout $t \in I$ et tout $x \in M - K$.

Soit (M, Ω) une variété symplectique. Nous allons définir un sous-complexe $\overline{\mathrm{BKer}\, S(M)}$ de $\overline{BG_\Omega(M)}$ comme suit: un n-simplexe c de $\overline{\mathrm{BKer}\, S(M)}$ est une

application différentiable de Δ^n dans $G_\Omega(M)$ telle pour tout chemin $\gamma: I \to \Delta^n$, si $\bar{c}(t)$ est le chemin $c \circ \gamma: I \to G_\Omega(M)$, alors la forme $i(\dot{\bar{c}}_t)\Omega$ est exacte pour tout t, ou, ce qui revient au même, la classe de $\bar{c}_t$ dans $\widetilde{G_\Omega(M)}$ est dans $\widetilde{\operatorname{Ker} S(M)}$.

Dans la suite U désignera une boule fixe qui est l'image dans M d'une boule de R^{2n} par une carte canonique. Soit G_U le sous-groupe de $G_\Omega(M)$ formé des éléments de $G_\Omega(M)$ à support dans U. Nous définissons un sous-complexe $\overline{\mathrm{BKer}\, R_U}$ de $B\bar{G}_U$ comme suit: un n-simplexe de $\overline{\mathrm{BKer}\, R_U}$ est une application différentiable c de Δ^n dans G_U telle que pour tout chemin différentiable $\gamma: I \to \Delta^n$, si $\bar{c}(t)$ est le chemin $c \circ \gamma(t)$, alors $\int_M f_t \Omega^n = 0$, où f_t est l'unique hamiltonnien à support dans U du champ de vecteurs $\dot{\bar{c}}_t$, c.à.d. que la classe de $\bar{c}_t$ dans $\tilde{G}_U$ est dans $\operatorname{Ker} \tilde{R}_U$.

5. Le groupe $H_1(\overline{\mathrm{BKer}\, S(M)}, Z)$

On a une application naturelle de $\overline{\mathrm{BKer}\, R_U}$ dans $\overline{\mathrm{BKer}\, S(M)}$. Le but de ce paragraphe est d'étudier l'homomorphisme induit sur le 1er groupe d'homologie entière. On a:

THÉORÈME III.5.1. *Soit (M, Ω) une variété symplectique close et connexe. L'homomorphisme $\Phi: H_1(\overline{\mathrm{BKer}\, R_U}, Z) \to H_1(\overline{\mathrm{BKer}\, S(M)}, Z)$ induit par la flèche $\overline{\mathrm{BKer}\, R_U} \to \overline{\mathrm{BKer}\, S(M)}$, est un isomorphisme.*

La démonstration de ce théorème utilise les lemmes suivants:

LEMME III.5.2. *Il existe un recouvrement fini $\mathcal{W}'$ de M par des boules W_k telles que si $W_i \cap W_j \neq \varnothing$, alors $W_i \cap W_j$ est une boule. De plus, il existe pour tout i et pour tout j des isotopies $\varphi_t^i \in \operatorname{Ker} S(M)$ et $H_t^{ij} \in G_U$ telles que:*

$$\varphi_1^i(W_i) \subset U,\ H_1^{ij}(\varphi_1^i(W_i \cap W_j)) = \varphi_1^j(W_i \cap W_j).$$

Dans la suite, nous considérérons un recouvrement $\mathcal{U} = (U_i^k)$ associé à une triangulation $T_{\mathcal{W}'}$, tel que si U_1 et U_2 sont des ouverts de $\mathcal{U}$ avec $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, alors $U_1 \cup U_2$ soit contenu dans une boule de $\mathcal{W}'$. Nous envisagerons aussi le recouvrement $\mathcal{W} = \mathcal{W}' \cup \{U\}$.

LEMME III.5.3. *Toute 1-chaine dans $\overline{\mathrm{BKer}\, R_U}$ qui borde une 2-chaine c de $\overline{\mathrm{BKer}\, S(M)}$ borde alors une 2-chaine $\tilde{c} = \sum_k \tilde{c}_k$ dont les 2-simplexes $\tilde{c}_k$ ont leurs supports dans les ouverts du recouvrement $\mathcal{W}$.*

LEMME III.5.4. *L'homomorphisme $H_1(\overline{\mathrm{BKer}\, R_U}, Z) \to H_1(\overline{BG_U}, Z)$ est injectif.*

Démonstration du théorème III.5.1

(a) *Φ est injectif*

Soit a un élément de $H_1(\overline{\mathrm{BKer}\, R_U}, Z)$ tel que $\Phi(a)=0$. Si $\tau=\sum\tau_k$ est une 1-chaine représentant a, alors τ borde une 2-chaine $c=\sum_i c_i$ dans $\overline{\mathrm{BKer}\, S(M)}$. D'après le lemme III.5.3, τ borde aussi une 2-chaine $\tilde{c}=\sum_k \tilde{c}_k$ dans $\overline{\mathrm{BKer}\, S(M)}$ telle que le support de chaque c_k soit dans un ouvert de $\mathcal{W}$. Chaque 1-simplexe $\partial_j\tilde{c}_k$ a donc son support dans une boule de $\mathcal{W}$ que nous dénotons par W^{jk}. Soit φ_t^{jk} l'isotopie dans $\mathrm{Ker}\, S(M)$ telle que $\varphi_1^{jk}(W^{jk})\subset U$. On convient que si $W^{jk}=U$, alors $\varphi_t^{jk}=\mathrm{id}_M$. On a:

$$\tau=\sum \hat{\tau}_k, \quad \text{où} \quad \hat{\tau}_k=\sum_{j=0}^{2}(-1)^j I_{\varphi_1^{jk}}(\partial_j\tilde{c}_k).$$

Si ψ_t^k est une isotopie dans $\mathrm{Ker}\, S(M)$ telle que $\psi_1^k(\mathrm{supp}\,(c_k))\subset U$, alors: $\partial(I_{\psi_1^k}(\tilde{c}_k))$ est homologue à $\hat{\tau}_k$. En effet:

$$\partial(I_{\psi_1^k}(\tilde{c}_k))=\sum_{j=0}^{2}(-1)^j\,\partial_j I_{\psi_1^k}(\tilde{c}_k)=\sum_{j=0}^{2}(-1)^j I_{\psi_1^k}(\partial_j\tilde{c}_k).$$

D'après le lemme III.5.2, il existe une isotopie S_t dans G_U telle que:

$$S_1(\psi_1^k(\mathrm{supp}\,(\tilde{c}_k)\cap W^{jk}))=\varphi_1^{jk}(\mathrm{supp}\,(\tilde{c}_k)\cap W^{jk}).$$

Il en résulte que:

$$I_{S_1}(I_{\psi_1^k}(\partial_j\tilde{c}_k)=I_{\varphi_1^{jk}}(\partial_j\tilde{c}_k).$$

D'après la proposition III.4.1, les 1-simplexes $I_{\psi_1^k}(\partial_j\tilde{c}_k)$ et $I_{\psi_1^{jk}}(\partial_j\tilde{c}_k)$ sont homologues. Ceci entraine que τ est homologue à $\partial(\sum_k I_{\psi_1^k}(\tilde{c}_k))$. Donc τ est homologue à zéro dans $H_1(\overline{BG_U}, Z)$. D'après le lemme III.5.4, τ est aussi homologue à zéro dans $H_1(\overline{\mathrm{BKer}\, R_U}, Z)$. D'où l'injectivité.

(b) *Φ est surjectif*

Soit $[h]$ dans $H_1(\overline{\mathrm{BKer}\, S(M)}, Z)$. D'après le lemme de fragmentation, $[h]$ peut être représenté par une isotopie h_t qui est un produit $h_t=\prod_{i,k} h_t^{ik}$ où $h_t^{ik}\in \mathrm{Ker}\, S(M)$, $\mathrm{supp}\,(h_t^{ik})\subset U_i^k$ et $\sum_{i,k} R_{U_i^k}(h_t^{ik})=0$.

D'après le lemme II.8.2, il existe pour tout i et k des isotopies φ_t^{ik} dans $\mathrm{Ker}\, S(M)$ telles que $\varphi_1^{ik}(U_i^k)\subset U$. Le conjugé $I_{\varphi_1^{ik}}(h_t^{ik})$ du 1-simplexe h_t^{ik} par φ_1^{ik} a

son support dans U et il est homologue à h_t^{ik} d'après la proposition III.4.1. Il est clair alors que la classe d'homologie $[\hat{h}]$ du 1-simplexe $\prod_{i,k} I_{\varphi_1^{ik}}(h_t^{ik})$ appartient à $H_1(\overline{\mathrm{BKer}\, R_U}, Z)$ et que $\Phi([\hat{h}]) = [h]$. D'où la sur jectivité.

Démonstration du lemme III.5.2. Commençons par réduire le groupe structural du fibré des repères sur M au groupe $U(n) \subset Sp(n)$: c.à.d. que nous considérons une métrique hermitienne compatible avec la structure symplectique.

Soit y le centre de la boule U. D'après la remarque II.3.4, il existe pour tout point $x \in M$, une isotopie symplectique $\varphi_t^x \in \mathrm{Ker}\, S(M)$ telle que $\varphi_1^x(x) = y$. On peut supposer que la dérivée en x de φ_1^x, $d_x(\varphi_1^x)$, envoie la métrique hermitienne de T_xM sur celle de T_yM.

Pour tout $x \in M$, on considère une boule ouverte géodésique W_x de centre x et de rayon $r(W_x) = \delta_x$ suffisamment petit pour que $\varphi_1^x(W_x) \subset U$. On sait (voir par ex. [9] p. 166–167) que toute intersection non vide $W_x \cap W_{x'}$ est difféomorphe à une boule.

Soit $\alpha : U \to \mathbf{R}^{2n}$ un système de coordonnées canoniques tel que $d_y\alpha : T_yM \to \mathbf{R}^{2n}$ soit un repère hermitien. Alors pour tout $x \in M$, $d_x(\alpha \circ \varphi_1^x) : T_xM \to \mathbf{R}^{2n}$ est un repère hermitien. Si x' est un point proche de x, alors $d_{x'}(\alpha \cdot \varphi_1^x) : T_{x'}M \to \mathbf{R}^{2n}$ est proche d'une application hermitienne. Ainsi si les boules W_x sont suffisamment petites, tout point $z \in W_x \cap W_{x'}$ est à la fois proche de x et de x'. Il en résulte donc que pour tout $z \in W_x \cap W_x$ l'application:

$$f_{x,x'}(z) = d_{(\alpha \cdot \varphi_1^x(z))}(\alpha \cdot \varphi_1^{x'} \cdot (\varphi_1^x)^{-1} \cdot \alpha^{-1})$$

sera proche d'une application hermitienne. Plus précisément, pour tout $x \in M$, il existe un nombre positif $\delta_x^1 < \delta_x$ tel que si $r(W_x) < \delta_x^1$, alors pour tout $u \in W_x \cap W_{x'}$

$$1 - \varepsilon \leqq \frac{\|f_{x,x'}(z)(u)\|}{\|u\|} \leqq 1 + \varepsilon$$

où ε est le nombre dont l'existance a été démontré dans la proposition I.4.2. Le recouvrement cherché est un recouvrement fini $W_1, W_2, \ldots, W_k$ extrait du recouvrement $\{W_x\}_{x \in M}$ par les boules géodesiques W_x de rayon inférieur à δ_x^1. Soient φ_t^i les isotopies correspondantes aux W_i telles que $\varphi_1^i(W_i) \subset U$ et soient $f_{ij}(z)$ les changements de cartes:

$$f_{ij}(z) = d_{(\alpha \cdot \varphi_1^i(z))}(\alpha \cdot \varphi_1^j(\varphi_1^i)^{-1} \cdot \alpha^{-1}).$$

D'après la proposition I.4.2, il existe une isotopie symplectique $\tilde{H}_t^{ij}$ à support dans $\alpha(U)$ telle que $\tilde{H}_1^{ij}$ soit égal à $\alpha\varphi_1^j \cdot (\varphi_1^i)^{-1}\alpha^{-1}$ sur $\alpha \cdot \varphi_1^i(W_i \cap W_j)$ Posons: $H_t^{ij} = \alpha^{-1} \cdot \tilde{H}_t^{ij} \cdot \alpha$, alors $H_t^{ij} \in G_U$ et H_1^{ij} est égal à $\varphi_1^j \cdot (\varphi_1^i)^{-1}$ sur $\varphi_1^i(W_i \cap W_j)$. Nous

avons donc démontré que:

$$H_1^{ij}(\varphi_1^i(W_i \cap W_j)) = \varphi_1^j(W_i \cap W_j).$$

D'où le lemme III.5.2

Démonstration du lemme III.5.3. La démonstration de ce lemme est délicate. Elle se fera en plusieurs étapes.

Etape 0. Soit c un p-simplexe de $\overline{\mathrm{BDiff}^\infty(M)}$. Par des subdivisions barycentriques succéssives, on décompose c en une somme de p-simplexes "petits." Par "petit" simplexe, nous entendons que le feuilletage correspondant sur $\Delta^p \times M$ soit suffisamment proche du feuilletage horizontal dans la C^1-topologie. Dans la suite, nous supposerons que les simplexes considérés sont "très petits." La "petitesse" sera explicitée s'il le faut et dépendra des constructions que nous serons emmenés à faire.

Etape 1. Soit c un petit 2-simplexe de $\overline{\mathrm{BKer}\, S(M)}$ et soit $\partial c = \sum_{j=0}^{2} (-1)^j \partial_j c$ son bord. Chaque chemin $\partial_j c : 1 \to \mathrm{Ker}\, S(M)$ est une isotopie que nous désignerons par $(\partial_j c)(t)$. En appliquant le lemme de fragmentation à chaque isotopie $(\partial_j c)(t)$, on trouve des isotopies symplectiques $h_k^j(t)$, $k = -1, 0, \ldots, 2n$ ($\dim(M) = 2n$), telles que:

$$h_k^j(t) = \begin{cases} h_{k-1}^j(t) & \text{hors de } U^k \\ (\partial_j c)(t) & \text{sur } \bigcup_{j \leqq k} V^j \end{cases}$$

pour $k \geqq 0$ et on convient que $h_{-1}^j(t) = \mathrm{id}_M$.

Si on pose:

$$s_k^j(t) = (h_{k-1}^j(t))^{-1} \cdot h_k^j(t).$$

On a:

$$(\partial_j c)(t) = s_0^j(t), \ldots, s_{2n}^j(t) \quad \text{et} \quad \mathrm{supp}\,(s_k^j(t)) \subset U^k.$$

Explicitons quelques notations:

Nous commençons par ordonner les boules $\{U_i^k\}_{i \in I_k}$, $k = 0, \ldots, 2n$. Les boules U_j^0 porteront le numéro j et seront désignées U_j. Pour $k \geqq 1$, une boule U_i^k sera désignée U_m si $m = (\sum_{s \leqq k-1} N_s) + i$, où N_s est le cardinal de I_s.

L'isotopie $s_k^j(t)$ a son support dans la réunion disjointe $U^k = \cup_{i \in I_k} U_i^k$. Soit $\sigma_m^j(t)$ l'isotopie égale à $s_k^j(t)$ sur $U_i^k = U_m$ et à l'identité en dehors.

Soit $N = N_0 + \cdots + N_{2n}$. On pose $\mathfrak{T}_1^j(t) = \sigma_1^i(Nt)$ pour $0 \leqq t \leqq 1/N$ et pour $m = 2, \ldots, N$:

$$\mathfrak{T}_m^j(t) = (\sigma_1^j *, \ldots, * \sigma_m^j)(t) = \sigma_1^j(1) \cdot \sigma_2^j(1) \cdots \sigma_k^j(1) \cdot \sigma_{k+1}^j(Nt - k)$$

pour $k/N \leqq t \leqq (k+1)/N$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$.

Pour tout j, le 1-simplexe $t \mapsto \mathfrak{T}_N^j(t)$ est une somme des 1-simplexes $t \mapsto \sigma_n^j(t)$, à support dans les boules U_n; il est évident que $\mathfrak{T}_N^j(1) = (\partial_j c)(1)$ et que les chemins $(\partial_j c)(t)$ et $\mathfrak{T}_N^j(t)$ sont homotopes. Par changement de paramètres, on peut supposer que le 2-simplexe standard Δ^2 est $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1\}$. Soit Ξ l'application de $\partial\Delta^2$ dans Ker $S(M)$ définie par:

$$\Xi(t, 0) = \mathfrak{T}_N^2(t); \qquad \Xi(t, t) = \mathfrak{T}_N^1(t); \qquad \Xi(1, t) = \mathfrak{T}_N^0(t), \qquad t \in I.$$

Désignons par $\Delta^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant N\}$. La composition de l'homothétie de rapport $1/N$ et de l'application Ξ est une application de $\partial\underline{\Delta}^2$ dans Ker $S(M)$, notée encore Ξ telle que:

$$\Xi(k, 0) = \mathfrak{T}_k^2(1); \qquad \Xi(N, l) = \mathfrak{T}_l^0(1); \qquad \Xi(k, k) = \mathfrak{T}_k^1(1)$$

pour $0 \leqslant k \leqslant N$ et $0 \leqslant l \leqslant N$.

On interprète Ξ comme une 1-chaîne (donc un 1-cycle) de $\overline{\mathrm{BKer}\, S(M)}$.

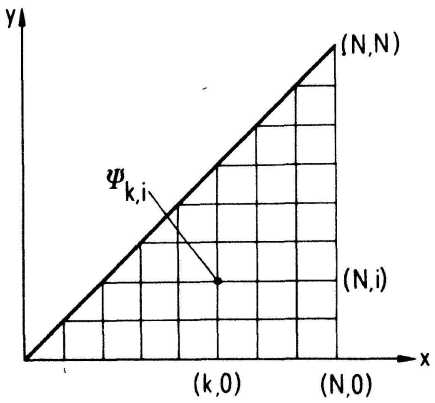

Figure 4

Etape 2: Construction d'une 2-chaine dont le bord est Ξ et dont les 2-simplexes ont des supports dans des ouverts de $\mathcal{W}$. Pour ce faire, nous aurons besoin de construire pour tout couple d'entiers (k, l) tels que $0 \leqslant l, k \leqslant N$, des difféomorphismes $\psi_{k,l} \in \mathrm{Ker}\, S(M)$ tels que que pour tout k, l, chaque difféomorphisme $\psi_{k,l}\psi_{k,l-1}^{-1}$; $\psi_{k,l} \cdot \psi_{k-1,l}^{-1}$ ait son support dans une boule de $\mathcal{W}$ et tels

que:

$$\psi_{0,0}=\mathrm{id}_M; \qquad \psi_{k,0}=\mathfrak{T}_k^2(1); \qquad \psi_{k,k}=\mathfrak{T}_k^1(1); \qquad \psi_{N,l}=\mathfrak{T}_N^0(1)(*)$$

avec $1\leqslant k,\ k\leqslant N$.

(i) *Construction des $\psi_{k,l}$ pour $0\leqslant l,\ k\leqslant N_0$*

On pose:

$$\psi_{k,l}=\begin{cases}\psi_{N_0,0}\cdot H_l & \text{sur } \bigcup_{j\leqslant k} U_j^0\\ \text{identité ailleurs}\end{cases}$$

où:

$$H_l=\begin{cases}\psi_{N_0,0}^{-1}\cdot\psi_{N_0,N_0} & \text{sur } \bigcup_{j\leqslant l} U_j^0\\ \text{identité ailleurs}\end{cases}$$

pour $k,\ l\geqslant 1$ et $H_0=\mathrm{id}_M$, et $\psi_{N_0,0}$, ψ_{N_0,N_0} définis par (*)

Il est évident que:

$$\operatorname{supp}(\psi_{k,l}\cdot\psi_{k-1,l}^{-1})\subset U_k^0; \qquad \operatorname{supp}(\psi_{k,l}\cdot\psi_{k,l-1}^{-1})\subset U_l^0$$

(ii) *Construction des $\psi_{k,l}$ pour $N_0+1\leqslant k\leqslant N_0+N_1,\ 1\leqslant l\leqslant N_0$.*

Nous allons utiliser le lemme III.5.5 ci-dessous. Sa démonstration sera donnée plus loin.

LEMME III.5.5. *Soit φ_k le difféomorphisme égal à $\varphi=\psi_{N_0,N_0}^{-1}\cdot\psi_{N,N_0}\cdot\psi_{N,0}^{-1}\cdot\psi_{N_0,0}$ sur la couronne $C_k=\bar{U}_k^0-V_k^0$ et à l'identité en dehors de C_k. (Ceci a un sens puisque φ a son support dans la réunion disjointe des couronnes C_k.) Alors: $R_{C\bar{V}_k^0}(\varphi_k)=R_{U_k^0}(\varphi_k)=0$, pour tout k.*

Le lemme III.5.5 et la proposition III.1.1 impliquent qu'il existe pour tout i, j des difféomorphismes $\alpha_{ij}\in\operatorname{Ker} S(M)$, à support dans $U_i'^1$ et égal à φ sur $V_i^{*1}\cap C_j$ (voir condition (v) du lemme de fragmentation et la figure 5)

Considérons les difféomorphismes:

$$h_{k,l}=\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ 1\leqslant j\leqslant l}}\alpha_{ij}, \qquad k=1,\dots,N, \qquad l=1,\dots,N_0.$$

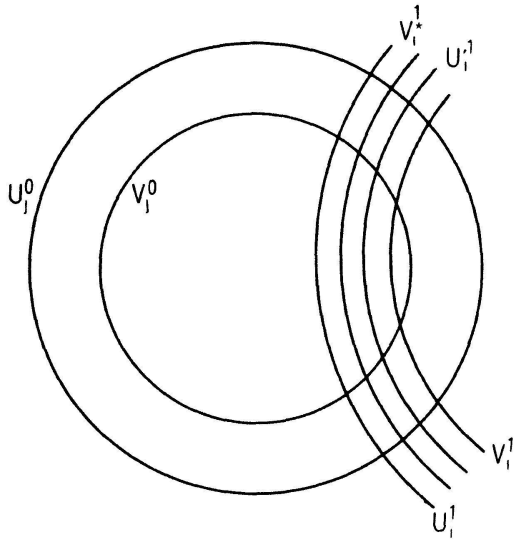

Figure 5

Pour $1 \leqslant k \leqslant N$ et $1 \leqslant l \leqslant N_0$; on pose:

$$\psi_{N_0+k,l} = \psi_{N_0,l} \cdot h_{k,l} \cdot T_k,$$

où T_k est égal à $\psi_{N_0,0}^{-1} \cdot \psi_{N_0+N_1,0}$ sur $\bigcup_{j \leqslant k} U_j^1$ et à l'identité ailleurs. Pour $l \geqslant 2$,

$$\psi_{N_0+k,l} \cdot \psi_{N_0+k,l-1}^{-1} = \varphi_{N_0,l} \cdot h_{k,l} \cdot h_{k,l-1}^{-1} \cdot \psi_{N_0,l-1}^{-1}$$

a son support dans U_l^0. En effet, supp $(\psi_{N_0,l-1}^{-1}) \subset \bigcup_j U_j^0$; supp $(h_{k,l} \cdot h_{k,l-1}^{-1}) \subset U_1^0$ et les boules U_j^0 sont disjointes.

D'autre part:

$$\rho = \psi_{N_0+k,1} \cdot \psi_{N_0+k,0}^{-1} = \psi_{N_0,1} \cdot h_{k,1} \cdot T_k \cdot \psi_{N_0+k,0}^{-1}$$

a son support dans U_1^0. En effet, $T_k \cdot \psi_{N_0+k,0}^{-1}$ est égal à $\psi_{N_0,0}^{-1}$ qui est égal à $\psi_{N_0,1}^{-1}$ hors de U_1^0. Donc pour tout $x \notin U_1^0$, $T_k \cdot \psi_{N_0+k,0}^{-1}(x) = \psi_{N_0,1}^{-1}(x)$. Le point $\psi_{N_0,1}^{-1}(x)$ ne rencontre pas le support de $h_{k,1}$. Il en résulte que $\rho(x) = x$, c.à.d. que supp $(\rho) \subset U_1^0$.

Il est clair que:

$$\psi_{N_0,l}^{-1} \cdot \psi_{N_0+1,l} = h_{1,l} \cdot T_1$$

a son support dans U_1^1

Pour $k \geqslant 2$, on voit facilement que:

$$\theta = \psi_{N_0+k,l} \cdot \psi_{N_0+k-1,l}^{-1} = \psi_{N_0,l} \cdot h_{k,l} \cdot T_k T_{k-1}^{-1} h_{k-1,l}^{-1} \cdot \psi_{N_0,l}^{-1}$$

a son support dans $U_k'^1$. En effet, visiblement supp $(\theta) \subset \bigcup_{i,j} U_i^0 \bigcup U_j^1$. Si $x \in U_i^0$, où $U_i^0 \cap U_k^1 = \emptyset$, alors $h_{k-1,l}^{-1} \cdot \psi_{N_0,l}^{-1}(x) \notin U_k^1$ et comme hors de U_k^1, $h_{k,l} = h_{k-1,l}$, il en résulte que $\theta(x) = x$.

Soit $\tilde{U}^0$ la réunion des boules U_j^0 qui rencontrent U_k^1. Pour $x \in U_j^1$, $j \neq k$ et $U_j^1 \cap \tilde{U}^0 = \emptyset$, il est facile de voir que $\theta(x) = x$. Si $x \in \tilde{U}^0$ et $x \notin U_k'^1$, alors $\psi_{N_0,l}^{-1}(x) \notin U_k^1$. Donc $(h_{k,l} \cdot T_k \cdot T_{k-1}^{-1} \cdot h_{k-1,l}^{-1})(\psi_{N_0,l}^{-1})(x) = \psi_{N_0,l}^{-1}(x)$. Autrement dit, $\theta(x) = x$.

La propriété suivante des difféomorphismes $\psi_{N_0+N_1,l}$ sera utile dans la suite (pour montrer la cohérence des conditions (*) dans la construction (iii) ci-dessus).

$$\psi_{N_0+N_1,l} = \psi_{N,l} \quad \text{sur} \quad \bigcup_{j \leq N_0+N_1} V_j$$

En effet sur cet ensemble, $\psi_{N_0+N_1,l} \cdot \psi_{N_0+N_1,0}^{-1}$ est égal au difféomorphisme H suivant:

$$H = \begin{cases} \psi_{N_0,l}\psi_{N_0,N_0}^{-1} \cdot \psi_{N,N_0}\psi_{N,0}^{-1} & \text{sur} \quad \bigcup_{j \leq l} U_j^0 \\ \text{identité ailleurs.} \end{cases}$$

Comme $\psi_{N_0,l} = \psi_{N_0,N_0}$ sur $\bigcup_{j \leq l} U_j^0$

$$H = \begin{cases} \psi_{N,N_0}\psi_{N,0}^{-1} & \text{sur} \quad \bigcup_{j \leq l} U_j^0 \\ \text{identité ailleurs.} \end{cases}$$

Il en résulte que sur $\bigcup_{j \leq N_0+N_1} V_j$,

$$\psi_{N_0+N_1,l} = H \cdot \psi_{N_0+N_1,0} = H \cdot \psi_{N,0} = \psi_{N,l}$$

(iii) *Construction des $\psi_{k,l}$ pour $1 \leq l \leq N_0$, $k > N_0 + N_1$ et k, $l > N_0$*

Cette construction se fera par récurence dans l'ordre des l et k croissants en posant:

$$\psi_{k,1} = \begin{cases} \psi_{k-1,l} & \text{hors de } U_k \\ \psi_{k,l-1} & \text{hors de } U \\ \psi_{N,l} & \text{sur } \bigcup_{j \leq k} V_j. \end{cases} \qquad (*)$$

Nous laissons au soin du lecteur de vérifier que ces conditions sont cohérentes. Elles définissent donc des difféomorphismes symplectiques $\psi_{k,l} \in \operatorname{Ker} S(M)$ en dehors de $U_k \cap U_l - \bigcup_{j \leq k} V_j$. Il se pose alors le problème de les étendre symplectiquement à toute la variété.

En reprennant les anciennes notations, U_k et U_l sont de la forme $U_k = U_j^r$, $U_l = U_{j'}^{r'}$. Comme $l < k$, on a que $r' \leq r$. Si $r' = r$, alors $U_k \cap U_l = \varnothing$ et $\psi_{k,l}$ est déjà défini parout. Supposons donc que $r' < r$ et que $U_k \cap U_l \neq \varnothing$.

$$\bar{U}_k \cap \bar{U}_l - \bigcup_{j \leq k} V_j = \left(\bar{U}_j^r - \bigcup_{j \leq r} V^j\right) \cap \bar{U}_{j'}^{r'}.$$

Chaque composante connexe de l'ensemble ci-dessus est l'ensemble $G_{i,j}^{r,r'}$ décrit au paragraphe 5. Nous avons vu que cet ensemble est homéomorphe à $D^{r-r'} \times \Delta^{r'} \times C^{2n-r}$. Un petit calcul montre que:

$$H_2(G_{ij}^{r,r'}, \partial G_{ij}^{r,r'}) = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{si } r = 1 \text{ et } r' = 0 \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Dans le cas qui nous intérèsse (c.à.d. $1 \leq l \leq N_0$, $k > N_0 + N_1$ et $k, l > N_0$), les groupes d'homologies relatifs ci-dessus sont tous nuls. D'après le théorème II.2.1, les difféomorphismes $\psi_{k,l}$ s'étendent symplectiquement à toute la variété.

Considérons les triangles T_k de sommets (k, k), $(k, k-1)$ et $(k-1, k-1)$ et les carrés de $C_{k,l}$ de sommets (k, l), $(k-1, l)$, $(k-1, l-1)$ et $(k, l-1)$ dans Δ^2 (voir figure 4).

Le sous-groupe des difféomorphismes de $\operatorname{Ker} S(M)$ à support dans une boule est exactement le groupe de tous les difféomorphismes symplectiques à support dans cette boule. Ce groupe est localement contractible.

Comme tous les difféomorphismes $\psi_{k,l}$ sont proches de l'identité, il existe donc des isotopies symplectiques h_t, g_t, u_t, v_t telles que:

$$\operatorname{supp}(h_t) \subset U'_k \quad \operatorname{supp}(g_t) \subset U'_k \quad \operatorname{supp}(u_t) \subset U_l \quad \operatorname{supp}(v_t) \subset U_l$$
$$(\psi_{k-1,l}^{-1} \cdot \psi_{k,l}) = h_1; \quad (\psi_{k-1,l-1}^{-1} \cdot \psi_{k,l}) = g_1$$
$$(\psi_{k-1,l-1}^{-1} \cdot \psi_{k-1,l}) = u_1; \quad (\psi_{k,l-1}^{-1} \cdot \psi_{k,l}) = v_1.$$

De plus on peut s'arranger pour que si $U'_k \cap U_l = \varnothing$, alors $h_t = g_t$ et $u_t = v_t$. Il suffit pour cela de les construire ces isotopies dans l'ordre suivant: pour l donné, on construit d'abord les isotopies relatives au carré $C_{N,l}$, ensuite celles relatives à $C_{N-1,l}$, $C_{N-2,l}$, etc., $l = \ , 2, 3, \ldots$. Ces isotopies fournissent donc des applications différentiables par morceaux

$$\lambda_k : \partial T_k \to \operatorname{Ker} S(M) \quad \text{et} \quad \mu_{k,l} : \partial C_{k,l} \to \operatorname{Ker} S(M).$$

De nouveau par contractibilité locale du groupe des difféomorphismes symplectiques à support dans une boule, ces applications s'étendent, après lissage, en des applications différentiables:

$$\Lambda_k : T_k \to \operatorname{Ker} S(M) \quad \text{et} \quad M_{k,l} : C_{k,l} \to \operatorname{Ker} S(M)$$

telles que $\operatorname{supp}(\Lambda_k(T_k)) \subset U'_k$ et $\operatorname{supp}(M_{k,l}(C_{k,l})) \subset U'_k \cup U_l$.

Considérons la 2-chaine $\hat{c}$ somme de toutes les 2-chaines Λ_k et $M_{k,l}$. On a alors que $\partial\hat{c} = \Xi$, où Ξ est le 1-cycle de $\overline{\mathrm{BKer}\, S(M)}$ décrit à la fin de l'étape 1.

Soient U'_k et U_l tels que $U_k \cap U_l = \varnothing$. Comme $H_t = g_t$ et $u_t = v_t$, il en résulte que le feuilletage sur les faces opposés de $\partial C_{k,l} \times M$ sont les mêmes. Ceci veut dire que si $U'_k \cap U_l = \varnothing$, alors le bord du 2-simplexe $M_{k,l}$ est nul.

Si $\tilde{c}$ est la 2-chaine obtenue à partir de la 2-chaine $\hat{c}$, en laissant tomber les 2-simplexes $M_{k,l}$ tels que leur support est dans $U'_k \cup U_l$ avec $U'_k \cap U_1 = \varnothing$, alors on a encore $\partial\tilde{c} = \partial\hat{c} = \Xi$.

D'après la construction du recouvrement $\mathcal{W}$, tout 2-simplexe de $\tilde{c}$ a son support dans un ouvert de $\mathcal{W}$. La 2e étape est terminée.

Soient $\tau = \sum_k \tau_k$ une 1-chaine dans $\overline{\mathrm{BKer}\, R_U}$ et $\sigma = \sum_i c_i$ une 2-chaine dans $\overline{\mathrm{BKer}\, S(M)}$ telle que $\partial\sigma = \tau$.

Pour chaque 2-simplexe c_i de σ, on fait les constructions des étapes 0, 1, 2. Le fait τ_k est dans $\overline{\mathrm{BKer}\, R_U}$ nous assure que la construction de l'étape 2 est possible. En effet chaque τ_k fait partie du bord d'un 2-simplexe c_r et nous avons dû utiliser le fait que les invariants R des 1-simplexes du bord sont nuls.

Soit $\tilde{c}_i$ la 2-chaine obtenue à partir du 2-simplexe c_i par le constructions 0, 1, 2, alors la 1-chaine $\tilde{\tau} = \partial(\sum_i \tilde{c}_i)$ est homologue à τ dans $H_1(\overline{\mathrm{BKer}\, R_U}, Z)$ et c'est bien le bord d'une 2-chaine dont les 2-simplexes ont des supports dans les ouverts de $\mathcal{W}$.

Le lemme II.8.3 est démontré.

Démonstration du lemme III.5.4

Soit $\tau = \sum \tau_k$ une 1-chaine de $\overline{\mathrm{BKer}\, R_U}$ qui borde une 2-chaine $c = \sum c_k$ de $B\bar{G}_U$. Par subdivisons barycentriques, on peut supposer que tous les 2-simplexes c_k sont petits et en particulier que pour tour $x \in \Delta^2$, alors $c_k(x) \in G_U$ est proche de l'identité. Par contractibilité locale de G_U, il existe une isotopie canonique $t \mapsto c_k^t(x)$ dans G_U de $c_k(x)$ à id_U. On a:

$$R_U(c_k(x)) = \int_{M \times I} f_t \, dt \wedge \Omega^n,$$

où f_t est le hamiltonnien à support dans U du champ de vecteurs $\dot{c}_k^t(x)$. L'application $x \mapsto R_U(c_k(x))$ de Δ^2 dans R est continue.

Considérons une fonction g ce classe C^∞ à support dans U telle que $\int_M g\Omega^n = 1$. Si $\varphi^t_{k,x}$ est le groupe à 1-paramètre engendré par le gradient symplectique de $-R_U(c_k(x)) \cdot g$, on a: $R_U(\varphi^1_{k,x} \cdot c_k(x)) = 0$ et l'application $\tilde{c}_k : \Delta^2 \to G_U$ définie par

$$\tilde{c}_k(x) = \varphi^1_{k,x} \cdot c_k(x)$$

est continue. Pour tout k, $\tilde{c}_k$ est donc un 2-simplexe de $\overline{\mathrm{BKer}\, R_U}$.

Supposons que $x \in \partial\Delta^2$ et que $c_k(x)$ soit un $\tau_1(x)$. Il existe une petite isotopie $\tau^t_1(x)$ telle que ${}_{M\times I}\int f_t\, dt \wedge \Omega^n = 0$, où f_t est le hamiltonnien à support dans U de $\dot{\tau}^t_1(x)$. Cette isotopie est homotope relativement aux extrémités, à l'isotopie canonique de $\tau_1(x)$ à id_U. Donc $R_U(\tau_1(x)) = 0$ et $\hat{\tau}_1(x) = \tau_1(x)$. On voit donc que $\tau = \partial\tilde{c}$ où $\tilde{c} = \sum \tilde{c}_k$ le lemme est démontré.

Démonstration du lemme III.5.5

$$R_{CV^0_i}(\varphi) = \sum_{k=i} R_{CV^0_i}(\varphi_k) + R_{CV^0_i}(\varphi_i) = \sum_{k\neq i} R_{U^0_k}(\varphi_k) + R_{CV^0_i}(\varphi_i).$$

D'autre part:

$$R_{U^0_i}(\varphi_i) = R_{U^0_i}(\psi^{-1}_{N_0,N_0}|_{U^0_i}) + R_{U^0_i}(\psi_{N,N_0} \cdot \psi^{-1}_{N,0}|_{U^0_i}) + R_{U^0_i}(\psi_{N,0}|_{U^0_i}).$$

En effet les deux membres de l'équation précédente sont bien définis car ψ_{N_0,N_0}; $\psi_{N,N_0} \cdot \psi^{-1}_{N,0}$ et $\psi_{N_0,0}$ ont leur support dans U^0. Par construction de ces difféomorphismes (voir lemme de fragmentation), chacun des termes du membre de droite dans l'équation précédente est nul. Ainsi donc $R_{U^0_i}(\varphi_i) = 0$, ce qui démontre une des affirmations du sous-lemme et prouve que $R_{CV^0_i}(\varphi_i) = R_{CV^0_i}(\varphi)$. Or:

$$\begin{aligned} R_{CV^0_i}(\varphi) &= R_{CV^0_i}(\psi^{-1}_{N_0,N_0} \cdot \psi_{N,N_0}) + R_{CV^0_i}(\psi^{-1}_{N,0} \cdot \psi_{N_0,0}) \\ &= R_{CV^0_i}(\psi^{-1}_{N_0,N_0} \cdot \psi_{N,N}) + R_{CV^0_i}(\psi^{-1}_{N,N} \cdot \psi_{N,N_0}) + R_{CV^0_i}(\psi^{-1}_{N,0} \cdot \psi_{N_0,0}.) \end{aligned}$$

Rappelons que:

$$\begin{aligned} \psi^{-1}_{N_0,N_0} \cdot \psi_{N,N} &= (s^2_1(1) \cdots s^2_{2n}(1))^{-1} \\ \psi^{-1}_{N,N} \cdot \psi_{N,N_0} &= (s^0_1(1) \cdots s^0_{2n}(1))^{-1} \\ \psi^{-1}_{N,0} \cdot \psi_{N_0,0} &= s^1_1(1) \cdots s^1_{2n}(1) \end{aligned}$$

(voir fin de l'étape 1)

Soit A une boule contenue dans V^0_1 et telle que $A \cap U^k_j = \varnothing$ si $U^k_j \neq U^0_1$.

Comme chacun des s_j^i ci-dessus a son support hors de A, on a:

$$R_{CV_i^0}(\varphi) = R_{CA}(\varphi) = R_{CA}\left(\prod_{k\geqq 1} s_k^1(1)\right) - R_{CA}\left(\prod_{k\geqq 1} s_k^0(1)\right) - R_{CA}\left(\prod_{k\geqq 1} s_k^2(1)\right).$$

Or d'après le lemme de fragmentation:

$$\sum_{k\geqq 1} R_{CA}(s_k^i(1)) = \sum_{k\geqq 1} R_U k(s_k^i(1)) = 0.$$

Le lemme est démontré.

6. Les difféomorphismes symplectiques du tore

Le tore T^m est le quotient de $\mathbf{R}^m$ par $\mathbf{Z}^m$. Soit p: $\mathbf{R}^m \to T^m$ la projection canonique. Nous désignerons par $\tilde{x}$ un relèvement dans $\mathbf{R}^m$ d'un $x \in T^m$. Pour tout $\alpha \in T^m$, l'application $\rho_\alpha : T^m \to T^m$ définie par:

$$\rho_\alpha(x) = p(\tilde{x} + \tilde{\alpha})$$

est un difféomorphisme de T^m de classe C^∞ isotope à l'identité, qu'on appelle la rotation d'angle α. Ainsi T^m s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Diff}^\infty(T^m)_0$. Le théorème de conjugaison suivant est dû à Herman et Sergeraert [8], [15].

THÉORÈME. *Soient $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ un point de $\mathbf{R}^m$, $c > 0$, et $d > 0$ tels que pour tout $k = (k_0, k_1, \ldots, k_m) \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z}^m - 0)$, on ait: $|k \cdot a| > c/|k|^d$ avec $|k \cdot a| = k_0 + k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_m a_m$ et $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$. Soit $\alpha = p(a) \in T^m$. Il existe un voisinage V de ρ_α dans $\mathrm{Diff}^\infty(T^m)_0$ et une application $s: V \to \mathrm{Diff}^\infty(T^m)_0 \times T^m$ telle que pour tout $\varphi \in V$ si $s(\varphi) = (\psi, \beta)$, alors $\varphi = \rho_\beta \cdot \psi^{-1} \cdot \rho_\alpha \psi$. De plus si φ_t est une famille dans V qui dépend différentiablement d'un paramètre t et si $s(\varphi_t) = (\psi_t, \beta_t)$, alors ψ_t et β_t dépendent différentiablement de t.*

Considérons maintenant le tore de dimension $2n$. La forme symplectique $dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$ de $\mathbf{R}^{2n}$ est invariante par translation. Elle induit donc une forme symplectique Ω sur T^{2n}. Pour $\alpha \in T^{2n}$, la rotation ρ_α laisse invariante Ω. il en résulte que T^{2n} s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(T^{2n})_0$. Comme la forme symplectique de Ω de T^{2n} est à périodes entières, il résulte de la remarque II.1.2 (b) que $\tilde{S}$ envoit $\pi_1(G_\Omega(T^{2n}))$ dans $H^1(T^{2n}, \mathbf{Z})$.

Nous allons montrer que l'image de $\pi_1(G_\Omega(T^{2n}))$ par $\tilde{S}$ est $H^1(T^{2n}, \mathbf{Z})$. Pour

tout $x \in \mathbf{R}^{2n}$, la famille d'applications $\rho^t_{p(x)} : T^{2n} \to T^{2n}$ définie par

$$\rho^t_{p(x)}(y) = p(\tilde{y} + tx), \qquad y \in T^{2n}, \qquad t \in I,$$

est un chemin différentiable dans $G_\Omega(T^{2n})$. On obtient ainsi une application j de $\mathbf{R}^{2n}$ dans $\widetilde{G_\Omega(T^{2n})}$. On voit immédiatement que j envoit $\mathbf{Z}^{2n}$ dans $\pi_1(G_\Omega(T^{2n}))$. D'autre part, $\tilde{S}$ envoie surjectivement $\widetilde{G_\Omega(T^{2n})}$ sur $H^1(T^{2n}, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^{2n}$. Calculons $\tilde{S}(j(x))$, pour $x \in \mathbf{R}^{2n}$.

Soit $(c_1, c_2, \ldots, c_{2n})$ une base de $H_1(T^{2n}, \mathbf{Z})$. On prend pour c_i les cycles "rotations autour du $i^{ème}$ facteur" c.à.d. les images par p des courbes $\tilde{c}_i : \mathrm{I} \to R^{2n}$ définies par:

$$\tilde{c}_i(t) = (0, 0, \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0) \qquad (t \text{ à la } i^{ème} \text{ place}).$$

Pour tout i soit $H_i : I \times I \to T^{2n}$ l'application:

$$H_i(s, t) = \rho^t_{p(x)}(c_i(s)).$$

En passant au revêtement universel, elle s'écrit:

$$\tilde{H}_i(s, t) = (tx_1, tx_2, \ldots, tx_{i-1}, tx_i + s, tx_{i+1}, \ldots, tx_{2n}).$$

On a donc:

$$\tilde{H}_i^* \tilde{\Omega} = \begin{cases} -x_{i+1}\, dt \wedge ds & \text{si } i \text{ est impair} \\ +x_{i-1}\, dt \wedge ds & \text{si } i \text{ est pair.} \end{cases}$$

Il en résulte que:

$$\tilde{S}(j(x))(c_i) = \int_{I \times I} \tilde{H}_i^* \tilde{\Omega} = \begin{cases} -x_{i+1} & \text{si } i \text{ est impair} \\ x_{i-1} & \text{si } i \text{ est pair.} \end{cases}$$

On a donc montré que: pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) \in \mathbf{R}^{2n}$

$$\tilde{S}(j(x)) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \ldots, -x_{2n}, x_{2n-1}) \in \mathbf{R}^{2n} \cong H^1(T^{2n}, \mathbf{R}).$$

Il en résulte que $\tilde{S}$ envoie surjectivement $G_\Omega(T^{2n})$ sur $H^1(T^{2n}, \mathbf{Z})$. De plus nous

venons de montrer:

LEMME III.6.1. *La restriction de l'homomorphisme S au sous-groupe T^{2n} de $G_\Omega(T^{2n})$ est l'isomorphisme $J: T^{2n} \to H^1(T^{2n}, \mathbf{R})/H^1(T^{2n}, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{R}^{2n}/\mathbf{Z}^{2n} = T^{2n}$ défini par*

$$J(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \ldots, -x_{2n}, x_{2n-1}).$$

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant:

THÉORÈME III.6.2. *Le groupe $H_1(\overline{\mathrm{BKer}\, S}(T^{2n}), \mathbf{Z})$ est trivial.*

Démonstration. Montrons d'abord que $\widetilde{\mathrm{Ker}\, S}(T^{2n}) = [\widetilde{G_\Omega}(T^{2n}), \widetilde{G_\Omega}(T^{2n})]$. Soit φ_t un chemin différentiable dans $\mathrm{Ker}\, S(T^{2n})$ représentant un élément $\tilde{\varphi}$ de $\widetilde{\mathrm{Ker}\, S}(T^{2n})$. Soit ρ_α une petite rotation satisfaisant à la condition arithmetique du théorème de Herman–Sergeraert et soit V un voisinage de ρ_α dans $\mathrm{Diff}^\infty(T^{2n})_0$ qui lui correspond dans ce même théorème. Pour m assez grand, l'isotopie $h_t^k = \varphi_{(k/m)t} \cdot (\varphi_{((k-1)/m)t})^{-1}$ est dans $\rho_\alpha^{-1}(V) \cap \mathrm{Ker}\, S(T^{2n})$. Il existe donc un $\gamma_t^k \in \mathrm{Diff}^\infty(T^{2n})_0$, $\beta_t^k \in T^{2n}$ dépendant différentiablement de t tels que:

$$h_t^k = \rho_\alpha^{-1} \cdot \rho_{\beta_t^k} \cdot (\gamma_t^k)^{-1} \rho_\alpha \gamma_t^k.$$

On a alors:

$$\Omega = h_t^* \Omega = (\gamma_t^k)^*(\rho_\alpha^*((\gamma_t^k)^{-1})^* \Omega)) \quad \text{c.à.d.} \quad ((\gamma_t^k)^{-1})^* \Omega = \rho_\alpha^*((\gamma_t^k)^{-1})^* \Omega.$$

La condition arithmétique sur $\alpha \in T^{2n}$ implique que les composantes de $\tilde{\alpha} \in \mathbf{R}^{2n}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbf{Q}$. Il en résulte que α engendre un sous-groupe dense dans T^{2n}. La forme $((\gamma_t^k)^{-1})^* \Omega$, étant invariante par ρ_α, est invariante par T^{2n}. Elle s'écrit donc:

$$\omega_t^k = ((\gamma_t^k)^{-1})^* \Omega = \sum_{i<j} a_{ij}^t \, dx_i \wedge dx_j; \quad a_{ij}^t = \text{constantes}.$$

D'autre part, comme les formes ω_t^k et Ω sont cohomologues, elles ont les mêmes périodes. Il en résulte que tous les coefficients sont égaux à 1. Donc $\omega_t^k = \Omega$, c.à.d. que $\gamma_t^k \in G_\Omega(T^{2n})$. D'autre part, puisque h_t^k est dans $\mathrm{Ker}\, S(T^{2n})$ pour tout t, on a:

$$O = S(h_t^k) = S(\rho_{(\beta_t^k - \alpha)}) - S(\nu_t^k) + S(\rho_\alpha) + S(\nu_t^k) = S(\rho_{\beta_t^k}) = J(\beta_t^k).$$

Il résulte du lemme III. 6.1, que $\beta_t^k = 0$. Donc $h_t^k = \rho_\alpha^{-1} \cdot (\nu_t^k)^{-1} \cdot \rho_\alpha \cdot \nu_t^k$ est un commutateur dans $G_\Omega(T^{2n})$. Par conséquent $\varphi_t = h_t^m, \ldots, h_t^1$ est dans $[\widetilde{G_\Omega}(T^{2n}), \widetilde{G_\Omega}(T^{2n})]$. Ceci montre que $\widetilde{\mathrm{Ker}\, S}(T^{2n}) \subset [\widetilde{G_\Omega}(T^{2n}), \widetilde{G_\Omega}(T^{2n})]$. L'autre

inclusion étant évidente, on a:

$$\widetilde{\operatorname{Ker} S}(T^{2n}) = [\widetilde{G_\Omega}(T^{2n}), \widetilde{G_\Omega}(T^{2n})].$$

Si on pose:

$$b_t^k = JS(\gamma_t^k); \quad u = \alpha + b_t^k$$
$$\bar{\nu}_t^k = \rho_{b_t^k} \cdot \gamma_t^k \quad \text{et} \quad \gamma_t^k = (\rho_{b_t^k})^{-1} \cdot (\gamma_t^k)^{-1}.$$

On a:

$$h_t^k = \rho_u^{-1} \cdot \bar{\gamma}_t^k \cdot \rho_u \cdot \hat{\gamma}_t^k.$$

Il est immédiat de voir que $\bar{\gamma}_t^k \in \operatorname{Ker} S(T^{2n})$. D'après le lemme de fragmentation, il existe des isotopies symplectiques $\gamma_t^{k,j}$ à support dans des boules U_j telles que $\bar{\gamma}_t^k = \gamma_t^{k,1} \cdot \gamma_t^{k,2}, \ldots, \gamma_t^{k,N}$. Or aura:

$$h_t^k = \left(\prod_{i=1}^N \rho_u^{-1} \cdot \gamma_t^{k,i} \cdot \rho_u\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^N \rho_{b_t^k}^{-1} \cdot (\gamma_t^{k,N+1-i})^{-1} \cdot \rho_{b_t^k}\right).$$

Comme ρ_i et $\rho_{b_t^k}$ sont des difféomorphismes proches de l'identité, il existe des boules B_j et B_j' telles que:

$$U_j \cup \rho_u^{-1}(U_j) \subset B_j \quad \text{et} \quad U_j \cup \rho_{b_t^k}^{-1}(U_j) \subset B_j'.$$

Considérons des boules D_j et D_j' telles que $\bar{B}_j \subset D_j$ et $\bar{B}_j' \subset D_j'$. Il existe des isotopies symplectiques $f_{j,k}^t$ et $g_{j,k}^t$ telles que $f_{j,k}^t$ (respectivement $g_{j,k}^t$) ait son support dans D_j (respectivement dans D_j') et soit égal à ρ_u sur B_j (resp. égal à $\rho_{b_t^k}$ sur B_j'). Pour trouver ces isotopies, on reprend par exemple le raisonnement du début de la démonstration de la proposition III.3.1). Donc supp $(\rho_u^{-1}\gamma_t^{k,i}\rho_u)$ et supp $(f_{j,k}^t)^{-1} \cdot \gamma_t^{k,i} \cdot f_{j,k}^t)$ sont contenus dans $\rho_u^{-1}(U_i) = (f_{j,k}^t)^{-1}(U_i)$ et sur cet ensemble, $\rho_u^{-1} \cdot \rho_t^{k,i} \cdot \rho_u = (f_{j,k}^t)^{-1} \cdot \gamma_t^{k,i} \cdot f_{i,k}^t$. Il en résulte que l'isotopie h_t^k s'écrit:

$$h_t^k = \left(\prod_{i=1}^N (f_{k,i}^t)^{-1} \cdot \gamma_t^{k,i} \cdot f_{k,i}^t\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^N (g_{k,N-i+1}^t)^{-1} \cdot (\gamma_t^{k,N-i+1})^{-1} \cdot g_{k,N-i+1}^t\right).$$

Toutes les isotopies qui interviennent dans cette formule sont dans $\operatorname{Ker} S(T^{2n})$. Les $f_{k,i}^t$ et $g_{k,i}^t$ sont dans $\operatorname{Ker} S(T^{2n})$ parce qu'elles ont leur support dans des boules.

Si dans la formule ci-dessus, on change l'ordre des termes, l'isotopie ainsi obtenue est l'identité. Ceci signifie que l'image de h_t^k dans $H_1(\widetilde{\operatorname{Ker} S}(T^{2n}))$ par l'application canonique de $\widetilde{\operatorname{Ker} S}(T^{2n})$ dans $\widetilde{\operatorname{Ker} S}(T^{2n})/[\widetilde{\operatorname{Ker} S}(T^{2n}), \widetilde{\operatorname{Ker} S}(T^{2n})]$ est nulle. Il en résulte que $H_1(\widetilde{\operatorname{Ker} S}(T^{2n}))=0$. Comme $H_1(\overline{\operatorname{BKer} S(T^{2n})}, \mathbf{Z}) = H_1(\widetilde{\operatorname{Ker} S}(T^{2n})$ le théorème est démontré.

7. Fin des démonstrations

Soit (M, Ω) une variété symplectique close et connexe de dimension $2n$. D'après le théorème III.5.1, on a:

$$H_1(\overline{\operatorname{BKer} S(M)}, \mathbf{Z}) \cong H_1(\overline{\operatorname{BKer} R_U}, \mathbf{Z}) \cong H_1(\overline{\operatorname{BKer} S}(T^{2n}), \mathbf{Z}).$$

Mais s'après le théorème III.6.2,

$$H_1(\overline{\operatorname{BKer} S(T^{2n})}, \mathbf{Z}) = 0.$$

Donc $H_1(\overline{\operatorname{BKer} S(M)}, \mathbf{Z}) = 0$, ce qui signifie que $\widetilde{\operatorname{Ker} S}(M) = \operatorname{Ker} \tilde{S}(M)$ est un groupe parfait. On a:

$$[\widetilde{G_\Omega}(M), \widetilde{G_\Omega}(M)] \subset \operatorname{Ker} \tilde{S}(M) = [\operatorname{Ker} \tilde{S}(M), \operatorname{Ker} \tilde{S}(M)] \subset [\widetilde{G_\Omega}(M), \widetilde{G_\Omega}(M)]$$

c.à.d.

$$\operatorname{Ker} \tilde{S}(M) = [\widetilde{G_\Omega}(M), \widetilde{G_\Omega}(M)].$$

L'affirmation (i) du théorème II.6.1 est démontrée.

On voit de même que $\operatorname{Ker} S(M) = [G_\Omega(M), G_\Omega(M)]$.

Pour montrer que $\operatorname{Ker} S(M)$ est un groupe simple, il suffit de montrer que si φ est un élément de $\operatorname{Ker} S(M)$ différent de l'identité et si $N(\varphi)$ est le sous-groupe normal engendré (dans $\operatorname{Ker} S(M)$ ou $G_\Omega(M)$) par φ, alors $N(\varphi) = \operatorname{Ker} S(M)$. Il suffira de démontrer l'inclusion $\operatorname{Ker} S(M) \subset N(\varphi)$.

Soit $h \in \operatorname{Ker} S(M)$. S'après le lemme de fragmentation, $h = \prod_i h_i$ où les h_i sont des éléments de $\operatorname{Ker} S(M)$ dont les supports sont dans des boules U_i, $h_i \in \operatorname{Ker} R_{U_i}$; de plus ces boules sont telles qu'il existe des difféomorphismes symplectiques $H_i \in \operatorname{Ker} S(M)$ tel que $H_i(U_i) \subset U$, où U est une boule telle que $U \cap \varphi U = \varnothing$. Donc $\tilde{h}_i = H_i \cdot h_i \cdot H_i^{-1} \in \operatorname{Ker} R_U$; or la nullité de $H_1(\overline{\operatorname{BKer} R_U}, Z)$ implique que $\operatorname{Ker} R_U$ est parfait. Donc $\tilde{h}_i = \prod_k [a_{ik}, b_{ik}]$ avec $a_{ik}, b_{ik} \in \operatorname{Ker} R_U$.

Montrons que si $u, v \in \operatorname{Ker} R_U$, alors $[u, v] \in N(\varphi)$. En effet, soit $g \in \operatorname{Ker} S(M)$ tel que $g =$ identité sur U, et $U \cap g\varphi U = \varnothing$. Si $\varphi_1 = g \cdot \varphi \cdot g^{-1}$, on a: $[u, v] = [[u, \varphi], [v, \varphi_1]]$. Comme $[u, \varphi]$ et $[v, \varphi_1]$ sont dans $N(\varphi)$, $[u, v] \in N(\varphi)$.

Il en résulte donc que $\tilde{h}_i \in N(\varphi)$. Alors $h_i = (H_i)^{-1} \cdot \tilde{h}_i \cdot H_i \in N(\varphi)$. On a donc montré que $h = \prod_i h_i \in N(\varphi)$. Donc $\operatorname{Ker} S(M)$ est simple. Le théorème II.6.1 est démontré.

Remarque. L'argument ci-dessus est dû à Thurston (voir [4]). Il l'employait notamment pour montrer que si M est une variété différentiable de dimension n, alors la perfection du groupe des difféomorphismes à support compact de $\mathbf{R}^n$ implique la simplicité de $\operatorname{Diff}^\infty(M)_0$. Cet argument rend les mêmes services que le théorème d'Epstein [7].

Démonstration du théorème II.6.2. Supposons que M est non compacte et soit $h \in \operatorname{Ker} R$. D'après le lemme de fragmentation (qui est toujours valable aussi dans le cas où M est non compacte), alors $h = h_1 \cdot h_2, \ldots, h_r$, où $\operatorname{supp}(h_i) \subset$ boule U_i, et $h_i \in \operatorname{Ker} R_{U_i}$. On répète l'argument de Thurston ci-dessus. D'où le théorème.

Démonstration du théorème II.6.3. Soit M une variété différentiable de dimension $2n \geqslant 4$ munie d'une forme symplectique exacte Ω. On a les homomorphismes surjectifs:

$$S : G_\Omega(M) \to H^1_c(M, \mathbf{R}) \quad \text{(le groupe } \Gamma \text{ est trivial)}$$

$$R : \operatorname{Ker} S(M) \to \mathbf{R} \quad \text{(le groupe } \Lambda \text{ est trivial)}$$

$$\mu : G_\Omega(M) \to \mathbf{R}$$

et μ coincide avec R sur $\operatorname{Ker} S(M)$.

On a donc l'homomorphisme $\sum = S \oplus \mu : G_\Omega(M) \to H^1_c(M, \mathbf{R}) \oplus \mathbf{R}$ dont le noyau $\operatorname{Ker} \sum$ est exactement $\operatorname{Ker} R$. Comme $\operatorname{Ker} R$ est simple et que $\operatorname{Ker} \sum$ contient $[G_\Omega(M), G_\Omega(M)]$ comme sous-groupe normal, on a: $\operatorname{Ker} \sum = [G_\Omega(M), G_\Omega(M)]$. D'où le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Arnold V. I., *One dimensional cohomology of the Lie algebra of non divergent vector fields and rotation number of dynamic systems*, Funct. Analis. Priloz. Vol 13 No 4, Oct, déc. 1969 pp 77–78.

[2] Banyaga, A., *Sur le groupe des difféomorphismes symplectiques*, Springer Lecture Notes No 484, pp 50–56.

[3] ——, *On the group of diffeomorphisms preserving an exact symplectic form*, A paraitre dans les comptes rendus du C.I.M.E., Août 1976, Varenna, Italie.

[4] ——, *Sur la structure du groupe des difféomorphismes*, A paraitre.
[5] BOOTHBY, W. M., *Transitivity of automorphisms of certain geometric structures*, Trans. Amer. Math. Soc. *137* (1969) 93–100.
[6] CALABI, E., *On the group of automorphisms of a symplectic manifold*, Problems in Analysis (symposium in honour of S. Bochner), Princeton University Press (1970) 1–26.
[7] EPSTEIN, D. B. A., *The simplicity of certain groups of homeomorphisms*, Composition Mathematica Vol. 22 Fasc. 2 (1970), 165–173.
[8] HERMAN, M. R., *Sur le groupe des difféomorphismes du tore*, Ann, Inst. Fourier, *23–2* (1974) 75–86.
[9] KOBAYASHI, S. et NOMIZU, K., *Foundation of differential geometry*, Tome I, Interscience Publishers, 1963.
[10] MARTINET, J., *Sur les singularités des formes différentielles*, Ann. Inst. Fourier, *20* (1970) 95–178.
[11] MATHER, J. N., *Commutators of diffeomorphisms I et II*, Comment. Math. Helv. *49* (1974), 512–528 et *50* (1975) 33–40.
[12] MOSER, J., *On the volume-element on manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. *120* (1965), 280–296.
[13] ROUSSEAU, G., *Difféomorphismes d'une variété symplectique non compacte*, A paraitre.
[14] SCHWARTZ, L., *Séminaire 1953–1954: Produits tensoriels d'espaces vectoriels topologiques*, Faculté des Sciences, Paris, (1954).
[15] SERGERAERT, F., *Un théorème des fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications*, Ann. Scient. Ec. Nor. Sup. 4 ème série, *5* (1972) 599–660.
[16] THURSTON, W., *On the structure of volume preserving diffeomorphisms*, A paraitre.
[17] ——, *Foliations and group of diffeomorphisms*, Bull. Amer. Math. Soc. V. *80* (1974), 304–307.
[18] TREVES, F., *Topological vector space, distributions and kernels*, Academic Press, New York, 1967.
[19] WEIL, A., *Variétés kählériennes*, Hermann, Paris, 1958.
[20] WEINSTEIN, A., *Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds*, Advances in Math. *6* (1971), 329–345.

Section de Mathématiques
Université de Genève
2–4, Rue du Lièvre
CH 1211 Genève 24, SUISSE

Received January 30, 1976.