

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 52 (1977)

Artikel: Riemannsche Flächen mit Eigenwerten in $(0, \dots)$.
Autor: Buser, Peter
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-39985>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Riemannsche Flächen mit Eigenwerten in $(0, \frac{1}{4})$

PETER BUSER

1. Einleitung

Wir betrachten kompakte Riemannsche Flächen M vom Geschlecht $g \geq 2$. Es gibt auf M genau eine mit der konformen Struktur verträgliche Metrik g_M mit konstanter Krümmung -1 . Zu g_M gehört ein Laplace-Operator Δ und eine Lebesgue-Integration $f \mapsto \int_M f dM$. Durch $f, g \mapsto \int_M fg dM$ wird $C^\infty(M)$ zu einem Prähilbertraum. Das Eigenwertproblem $\Delta u = \lambda u$ liefert ein in diesem Raum vollständiges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen u_0, u_1, u_2, \dots mit den Eigenwerten $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \lambda_n \rightarrow +\infty$.

Seit McKean [6] ist die Frage nach kleinen Eigenwerten interessant. B. Randol [8] hat mit Hilfe der Selbergschen Spurformel gezeigt, dass zu einer beliebig vorgegebenen Fläche für jedes m eine endlichblättrige Ueberlagerungsfläche existiert, für die $\lambda_m < \frac{1}{4}$. Die Blätterzahl ist dabei ganz beträchtlich, und es stellt sich die Frage, ob es nicht schon für kleines Geschlecht Flächen mit Eigenwerten in $(0, \frac{1}{4})$ gibt. Vorallem aber sagt [8] nichts darüber aus, ob z.B. λ_1 beliebig klein werden kann. Mit einer Methode von Frank Löbell [5] konstruieren wir Beispiele, um zu zeigen, dass beides möglich ist:

SATZ 1. *Zu jedem $g \geq 2$ und für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht g mit $\lambda_{2g-3} < \varepsilon$.*

Nun ist zu vermuten, dass sogar bei fest vorgegebenem Geschlecht beliebig viele Eigenwerte in $(0, \frac{1}{4})$ liegen können. Tatsächlich lässt sich dies für jedes Intervall $(0, \frac{1}{4} + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, leicht einsehen: Bedeutet nämlich l_0 die Länge der kürzesten nicht in einen Punkt ausgearteten geschlossenen Geodätschen, so gilt allgemein

SATZ 2. *Für jede Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$ ist*

$$\lambda_m < \frac{1}{4} + \left[\frac{4\pi m}{\log \left(\frac{4\pi(g-1)}{l_0} \right)} \right]^2,$$

und man kann zu jedem Geschlecht beliebig Beispiele mit kleinem l_0 angeben (s.u.). Es ist deshalb umso überraschender, dass die Anzahl der Eigenwerte im Intervall $(0, \frac{1}{4})$ selbst beschränkt bleibt:

SATZ 3. *Für jede Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$ ist*

$$\lambda_{4g-2} > \frac{1}{4}.$$

Wir beweisen dies mit dem Minimaxprinzip von Courant, indem wir die Fläche in $4g-2$ geodätische Dreiecke zerlegen und zeigen, dass auf jedem solchen Dreieck der kleinste positive Eigenwert des Neumannproblems grösser ist als $\frac{1}{4}$.

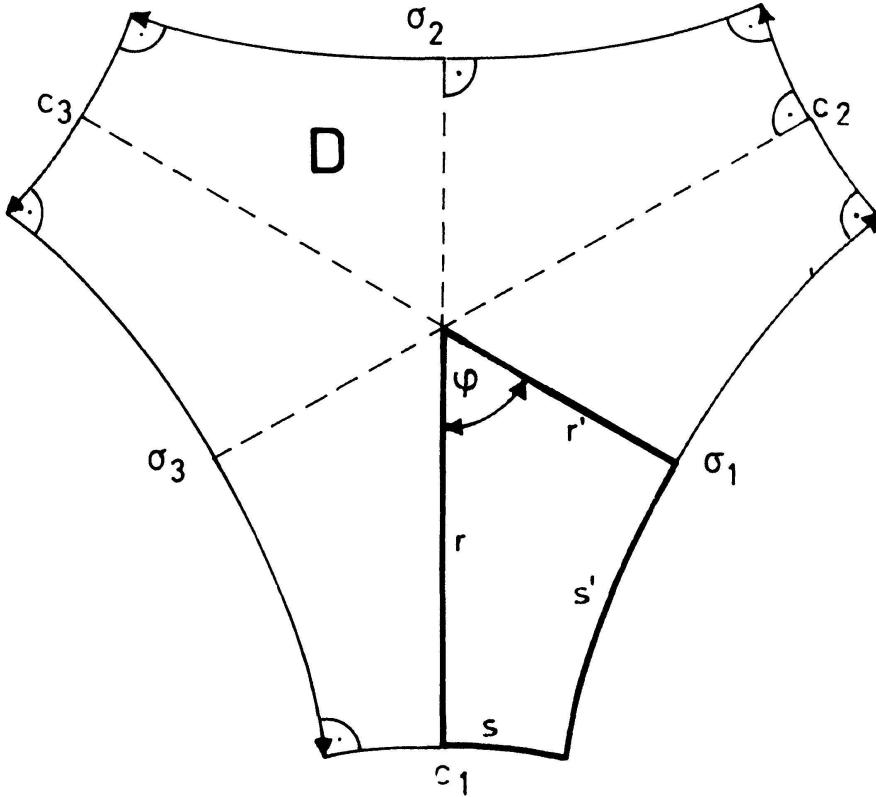
Die Zahl $\frac{1}{4}$ ist somit eine regelrechte Schwelle für das Spektrum des Laplace-Operators, und zwar ergibt sich hier eine Parallele zu einem auf ganz anderem Wege gewonnenen Resultat von H. Huber, der mich auf dieses Thema aufmerksam gemacht hat, und dem ich an dieser Stelle für seine Hilfe meinen Dank aussprechen möchte. Bezeichnet für eine gegebene Fläche $A(x)$ die Anzahl Eigenwerte, die im Intervall $[0, x]$ liegen, gezählt mit ihren Multiplizitäten, so hat H. Huber entdeckt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ das Verhältnis $A(\frac{1}{4})/A(\frac{1}{4} + \varepsilon)$ beliebig klein wird, wenn nur l_0 genügend gross ist, wobei zu bemerken ist, dass es zu noch so grossem l_0 Flächen mit beliebig hohem $A(\frac{1}{4})$ gibt [3]. Das Spektrum kann sich also mit $l_0 \rightarrow \infty$ beliebig stark an der Stelle $\frac{1}{4}$ verdichten. Dieses Phänomen tritt nun auch im Falle $l_0 \rightarrow 0$ auf, sofern noch das Geschlecht festgehalten wird. Aus Satz 2 und 3 folgt nämlich direkt

SATZ 4. *Für jede Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$ gilt*

$$\frac{A(\frac{1}{4} + \varepsilon)}{A(\frac{1}{4})} > \frac{\frac{\sqrt{\varepsilon}}{4\pi} \log \left(\frac{4\pi(g-1)}{l_0} \right) - 1}{4g-1} \quad (\varepsilon > 0).$$

2. Beweis der Sätze 1 und 2

Das folgende Konstruktionsverfahren wurde von Frank Löbell in seiner Dissertation eingeführt. Es sei H die hyperbolische Ebene, g_H der Riemannsche Masstensor auf H mit der konstanten Krümmung -1 . Wir konstruieren zuerst ein sogenanntes Spitzek, das ist ein geodätisches Viereck in H mit drei rechten Winkeln und einem spitzen Winkel φ . r und r' seien die an φ liegenden Seiten, s und s' die gegenüberliegenden (siehe Figur 1). Wir wählen $\varphi = \pi/3$ und betrachten $r \geq 3$ als Parameter. Die übrigen Bestimmungsstücke des Spitzeks sind nun



Figur 1

festgelegt, und zwar gilt nach den Formeln der hyperbolischen Trigonometrie [7] p. 79

$$s = \text{ArTg} \left(\frac{1}{\sqrt{3} \sin r} \right) < \frac{5}{4} e^{-r}, \quad (r \geq 3) \quad (1)$$

$$s' = \text{ArCos} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos r \right) > 1. \quad (2)$$

Durch fortgesetzte Spiegelung des Spitzekts an den Seiten r und r' entsteht ein abgeschlossenes Sechseck D , das von den geodätischen Segmenten $t \mapsto \sigma_i(t)$, $t \mapsto c_i(t)$, $t \in [0, 1]$, $i = 1, 2, 3$, berandet ist. Dabei ist $\sigma_1([0, \frac{1}{2}]) = s'$, $c_1([\frac{1}{2}, 1]) = s$, $c_i(1) = \sigma_i(0)$ und $\sigma_i(1) = c_{i+1}(0)$, Indizes modulo 3. Nach (1) haben die Segmente c_i eine Länge

$$l(c_i) = 2 \text{ ArTg} \left(\frac{1}{\sqrt{3} \sin r} \right) < \frac{5}{2} e^{-r}. \quad (3)$$

Durch Verdoppelung von D in zwei “übereinanderliegende” Exemplare D, D' , und durch anschliessende Identifikation von $\sigma_i(t)$ mit $\sigma'_i(t)$, $t \in [0, 1]$, $i = 1, 2, 3$,

entsteht eine berandete Fläche Y (das Y -Stück) mit den drei Randkurven

$$t \mapsto \gamma_i(t) = \begin{cases} c_i(2t) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ c'_i(2-2t) & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \quad (4)$$

die homöomorph ist zu einem kompakten ebenen Kreisbereich mit zwei Löchern.

Das Y -Stück trägt in natürlicher Weise eine Riemannsche Metrik der konstanten Krümmung -1 : Setzt man

$$Y_i = Y - (\sigma_{i-1} \cup \sigma_{i+1})$$

und

$$\phi_i : Y_i \rightarrow H, \quad \phi_i(p) = \begin{cases} p, & \text{wenn } p \in D \\ S_i(p), & \text{wenn } p \in D', \end{cases}$$

wobei $S_i : H \rightarrow H$ die Spiegelung der hyperbolischen Ebene an der Geodätischen $\sigma_i \subset H$ bedeutet, so bilden die drei Koordinatensysteme $\{Y_i, \phi_i\}$ einen differenzierbaren Atlas für Y . Weil nun jede Ueberlappungsabbildung $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ die Umgebung $\phi_j(Y_i \cap Y_j)$ in H isometrisch auf die Umgebung $\phi_i(Y_i \cap Y_j)$ abbildet, wird durch die Definition $g_Y(A, B) = g_H(\phi_{i*}A, \phi_{i*}B)$ unabhängig von der speziellen Wahl des Koordinatensystems auf Y ein Riemannscher Masstensor g_Y eingeführt (A, B zwei Tangentialvektoren zum selben Aufpunkt $p \in Y_i$, ϕ_* die Differentialabbildung von ϕ). Die Randkurven (4) sind Geodätische bezüglich g_Y mit der Länge

$$l_i = l(\gamma_i) = 2l(c_i) < 5e^{-r}. \quad (5)$$

Das Y -Stück dient nun als Baustein für unser Beispiel: Zuerst stellt man $2(g-1)$ identische Kopien Y^1, \dots, Y^{2g-2} von Y her mit den Rändern γ_i^k $i = 1, 2, 3$, $k = 1, \dots, 2(g-1)$. Diese verheftet man zu einer zusammenhängenden orientierbaren Fläche M vom Geschlecht g , indem man modulo $2g-2$ für $k = 1, \dots, 2g-2$ $\gamma_2^k(t)$ mit $\gamma_3^{k+1}(1-t)$ und $\gamma_1^{2k}(t)$ mit $\gamma_1^{2k+1}(1-t)$ identifiziert. Wie man leicht sieht, gibt es dann auf M genau eine Riemannsche Metrik g_M , welche auf jedem Y -Stück mit g_Y übereinstimmt. g_M besitzt konstante Krümmung -1 .

Für die Abschätzung der Eigenwerte betrachten wir auf Y die drei wegen (2) disjunkten Streifen $L_i = \{p \in Y \mid \text{dist}(p, \gamma_i) \leq 1\}$. Führen wir auf H Fermikoordinaten $p = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ mit der Geodätischen c_i als x -Achse ein, so lauten Masstensor und Volumenelement [4] p. 67

$$g_H = dx^2 \cos y + dy^2, \quad dH = dx dy \cos y, \quad (6)$$

und es gilt $L_i \cap D = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 2s, 0 \leq y \leq 1\}$. Hieraus sehen wir, dass wegen (5) und $r \geq 3$

$$\text{vol}(L_i) = l_i \int_0^1 \cos t dt > 6e^{-r} < \frac{1}{3}. \quad (7)$$

Andererseits besitzt Y nach der Formel von Gauss-Bonnet den Inhalt $\text{vol}(Y) = 2\pi$. Definieren wir deshalb für $p \in Y$

$$\varphi(p) = \begin{cases} \text{dist}(p, \partial Y), & \text{wenn } \text{dist}(p, \partial Y) \leq 1, \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so ist φ stetig auf Y , mit Ausnahme von ∂L_i beliebig oft differenzierbar, und wir erhalten aus (7) die Ungleichung

$$\int_Y \|\text{grad } \varphi\|^2 dY < 4e^{-r} \int_Y \varphi^2 dY. \quad (8)$$

Die $2(g-1)$ auf M stetigen Funktionen $\varphi_k : \varphi_k(p) = \varphi(p)$, wenn $p \in Y^k$ und $\varphi_k(p) = 0$, wenn $p \notin Y^k$, sind linear unabhängig. Also gibt es eine Linearkombination $f = \sum_{k=1}^{2g-2} \alpha_k \varphi_k$ mit $\int_M f u_j dM = 0$ für $j = 0, \dots, 2g-4$, dabei ist $\{u_0, u_1, \dots\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf M .

f ist für das Courantprinzip zugelassen, also gilt auf M wegen (8)

$$\lambda_{2g-3} \leq \frac{\int_M \|\text{grad } f\|^2 dM}{\int_M f^2 dM} = \frac{\sum_{i=1}^{2g-2} \alpha_i^2 \int_Y \|\text{grad } \varphi\|^2 dY}{\sum_{i=1}^{2g-2} \alpha_i^2 \int_Y \varphi^2 dY} < 4e^{-r}.$$

Dabei war $r \geq 3$ beliebig gewählt, womit Satz 1 bewiesen ist. Wir bemerken noch, dass wegen (5) auf der soeben konstruierten Fläche $l_0 < 5e^{-r}$.

Satz 2 ist eine Folgerung aus einem Satz von S. Y. Cheng [1]: Sei $\pi : H \rightarrow M$ längentreue Ueberlagerungsabbildung, γ eine normale geschlossene Geodätische der Länge l_0 und $\tilde{\gamma}$ ein Ueberlagerungsweg von γ . Wir beschreiben H durch Fermikoordinaten $p = (x, y)$ mit $\tilde{\gamma}(t) = (t, 0)$ als x -Achse. Wenn wir zu jedem $p \in M$ denjenigen über p liegenden Punkt \tilde{p} wählen, der am nächsten bei $(0, 0)$ liegt, erhalten wir einen Fundamentalbereich F für M , der in $A = \{(x, y) / -l_0/2 \leq x \leq l_0/2, -d \leq y \leq d\}$ liegt, wobei $d = \sup \{\text{dist}(p, q)/p, q \in M\}$ den Durchmesser von M bedeutet. Mit (6) ist $4\pi(g-1) = \text{vol}(F) \leq 2l_0 \int_0^d \cos t dt$, also,

weil l_0 viel kleiner ist als $4\pi(g-1)$:

$$d \geq \text{ArSin} \left(\frac{2\pi(g-1)}{l_0} \right) > \log \left(\frac{4\pi(g-1)}{l_0} \right) > 0. \quad (9)$$

Da nach Cheng $\lambda_m \leq \frac{1}{4} + (16\pi^2 m^2/d^2)$, ist Satz 2 mit (9) bewiesen.

3. Beweis von Satz 3

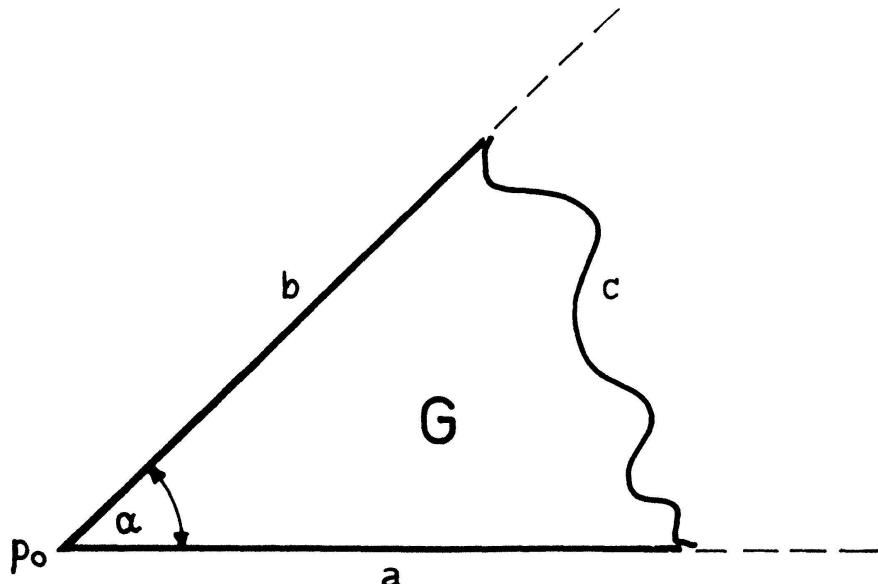
Für den Beginn ist es zweckmässig, auf H geodätische Polarkoordinaten $p = (\rho, y)$, $\rho \in (0, \infty)$, $y \in S^1 = \mathbf{R}/[y \mapsto y + 2\pi]$ mit Zentrum $p_0 \in H$ einzuführen. Massensor und Volumenelement lauten

$$g_H = d\rho^2 + \text{Sin}^2 \rho dy^2, \quad dH = \text{Sin} \rho d\rho dy.$$

Es sei $c : I \rightarrow H$, $c(t) = (\rho(t), y(t))$ mit $y(t) \leq d$ eine stückweise glatte Jordankurve, für die eine der folgenden beiden Eigenschaften zutrifft: 1. $I = [0, 1]$, $c(0) = c(1)$. 2. $I = (0, 1)$, $0 < y(t) < \alpha$ für ein $\alpha \in (0, 2\pi)$ und $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow 1} y(t) = \alpha$. Im ersten Fall berandet c allein, im zweiten Fall c zusammen mit den Geodätischen $t \mapsto a(t) = (t, 0)$, $t \mapsto b(t) = (t, \alpha)$ ein einfachzusammenhängendes Gebiet G (Figur 2).

LEMMA 1. Vor. G ist das oben beschriebene Gebiet, $f \in C^1(G) \cap C(G \cup c)$, $f|_c = 0$. Beh.

$$\int_G \|\text{grad } f\|^2 dH \geq \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4 \text{Sin}^2 d/2} \right) \int_G f^2 dH.$$



Figur 2

Beweis. Wir begnügen uns mit dem Fall, dass G wie in Figur 2 nicht von c allein berandet ist. Wir dürfen annehmen, dass $\int_G f^2 dH = 1$. Definieren wir $A = \{(\rho, y) \in H / 0 < \rho < d, 0 < y < \alpha\} \supseteq G$ und $u(p) = f^2(p)$ für $p \in G$, $u(p) = 0$ für $p \in A - G$, so ist $u \in C^1(A)$, und es folgt nach Cauchy-Schwarz

$$\int_G \|\operatorname{grad} f\|^2 dH \geq \frac{1}{4} \left(\int_G \|\operatorname{grad} u\| dH \right)^2.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \int_G \|\operatorname{grad} u\| dH &= \int_A \|\operatorname{grad} u\| dH \\ &\geq \int_0^\alpha \int_0^d \left| \frac{\partial u}{\partial \rho} \right| \sin \rho d\rho dy \geq \omega \int_0^\alpha \int_0^d u \sin \rho d\rho dy = \omega, \end{aligned}$$

wenn $\omega = \inf \{ \int_0^d |h'| \sin \rho d\rho / \int_0^d h \sin \rho d\rho / h \text{ stückweise glatt auf } (0, d], h \geq 0, h \neq 0, h(d) = 0 \}$. ω ändert seinen Wert nicht, wenn man für die Funktionen h zusätzlich verlangt, dass $h \in C^1[0, d]$, $h(0) = 1$ und $h' < 0$ auf $[0, d]$. In diesem Fall erhält man aber durch Substitution $t = h(\rho)$ und anschliessende partielle Integration wegen der Monotonie von $\sin x / (\cos x - 1)$ in $x > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^d |h'| \sin \rho d\rho &= - \int_0^d h'(\rho) \sin \rho d\rho \\ &= \int_0^1 \sin(h^{-1}(t)) dt \geq \frac{\sin d}{\cos d - 1} \int_0^1 \cos(h^{-1}(t)) - 1 dt \\ &= \frac{-\sin d}{\cos d - 1} \int_0^1 \frac{t \sin(h^{-1}(t))}{h'(h^{-1}(t))} dt \\ &= \frac{\sin d}{\cos d - 1} \int_0^d h(\rho) \sin \rho d\rho. \end{aligned}$$

Folglich ist $\omega \geq \sin d / (\cos d - 1)$, also $\int_G \|\operatorname{grad} f\|^2 dH \geq \frac{1}{4}(1 + 1/(\sin^2 d/2))$ q.e.d.

Für den nächsten Hilfssatz beschreiben wir H in der oberen Halbebene $H = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / y > 0\}$ mit $g_H = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$, $dH = y^{-2} dx dy$, $\Delta = y^2((\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2))$. Für ein in H beschränktes Gebiet B bezeichne $W(B)$ die Menge der auf B stetigen quadratisch integrierbaren Funktionen f mit verallgemeinerten ersten partiellen Ableitungen f_x, f_y . Für $f \in W(B)$ definieren wir $\operatorname{grad} f = y^2(f_x(\partial/\partial x) + f_y(\partial/\partial y))$. Dann ist für $f, g \in W(B)$ das Integral $\int_B g_H(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g) dH = \int_B (f_x g_x + f_y g_y) dx dy$ definiert.

Unter einer Eigenfunktion des Neumannproblems auf B verstehen wir eine nicht identisch verschwindende Funktion $u \in C^\infty(B) \cap W(B)$ mit

$$\begin{aligned} \Delta u = \eta u & \quad \text{für ein } \eta \geq 0 \quad \text{und} \quad \int_B g_H(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} \psi) dH \\ & = \int_B \psi \Delta u dH \quad \text{für alle } \psi \in W(B). \end{aligned} \tag{10}$$

LEMMA 2. Vor. $D \subset H$ abgeschlossenes geodätisches Dreieck mit Durchmesser $d = \sup \{\operatorname{dist}(p, q)/p, q \in D\}$,

$$f \in C^\infty(D) \cap W(\overset{\circ}{D}), \quad \int_D f^2 dH = 1, \quad \int_D f dH = 0.$$

Beh.

$$\int_D \|\operatorname{grad} f\|^2 dH \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \sin^2 d/2}.$$

Beweis. Ist η_1 der kleinste positive Eigenwert des Neumannproblems für D und v mit $\int_D v^2 dH = 1$ eine zugehörige normierte Eigenfunktion, dann gilt bekanntlich

$$\int_D \|\operatorname{grad} f\|^2 dH \geq \int_D \|\operatorname{grad} v\|^2 dH = \eta_1. \tag{11}$$

Da die Koeffizienten des Laplace-Operators Δ analytisch sind, besteht $v^{-1}(0)$ aus stückweise glatten analytischen Jordankurven. Es gibt deshalb ein Gebiet $G \subset D$ so, dass G und v die Voraussetzungen von Lemma 1 erfüllen. Setzen wir nun $\psi = v$ auf G und $\psi = 0$ auf $\overset{\circ}{D} - G$, so ist $\psi \in W(\overset{\circ}{D})$, und wir erhalten aus (10) und Lemma 1:

$$\begin{aligned} \eta_1 \int_G v^2 dH &= \int_G v \Delta v dH = \int_D \psi \Delta v dH = \int_D g_H(\operatorname{grad} \psi, \operatorname{grad} v) dH \\ &= \int_G \|\operatorname{grad} v\|^2 dH \\ &\geq \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4 \sin^2 d/2} \right) \int_G v^2 dH. \end{aligned}$$

Wegen $\int_G v^2 dH \neq 0$ ist Lemma 2 bewiesen, und die Vorbereitungen für den Beweis von Satz 3 sind abgeschlossen.

Nach Fricke-Klein [2] p. 318 betrachten wir eine feste Triangulation der Fläche M in $4g-2$ geodätische Dreiecke D_k . Wir führen folgende Bezeichnungen ein: $d_k = \sup \{\text{dist}(p, q)/p, q \in D_k\}$, $1/(8 \sin^2 d_k/2) := \delta_k$. $\varepsilon_k = \text{vol } D_k/(1+8\delta_k)$, $E_k = \{p \in D_k / \text{dist}(p, \partial D_k) \leq \mu_k\}$, wobei $\mu_k > 0$ so klein gewählt ist, dass $\text{vol } E_k < \varepsilon_k$.

Wir wählen $4g-2$ Funktionen $\varphi_k \in C^\infty(M)$ mit $0 \leq \varphi_k \leq 1$, $\varphi_k = 0$ auf $M - D_k$, $\varphi_k = 1$ auf $D_k - E_k$. Nach dem Minimaxprinzip von Courant ist

$$\lambda_{4g-2} \geq \inf_{f \in \mathcal{F}} \frac{\int_M \|\text{grad } f\|^2 dM}{\int_M f^2 dM}, \quad (12)$$

wo

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in C^\infty(M) / f \not\equiv 0, \quad \int_M f \varphi_k dM = 0, k = 1, \dots, 4g-2 \right\}.$$

Wegen

$$\frac{\int_M \|\text{grad } f\|^2 dM}{\int_M f^2 dM} = \frac{\sum_{k=1}^{4g-2} \int_{D_k} \|\text{grad } f\|^2 dM}{\sum_{k=1}^{4g-2} \int_{D_k} f^2 dM} \quad (13)$$

genügt es zu zeigen, dass

$$\int_{D_k} \|\text{grad } f\|^2 dM \geq (\frac{1}{4} + \delta_k) \int_{D_k} f^2 dM \quad (14)$$

für alle $f \in \mathcal{F}$. Ist nun $f \not\equiv 0$ auf D_k , so o.B.d.A. $\int_{D_k} f^2 dM = 1$, und es gilt wegen $\int_{D_k} f \varphi_k dM = 0$

$$\left| \int_{D_k} f dM \right| = \left| \int_{D_k} f(1 - \varphi_k) dM \right| \leq \int_{E_k} |f| dM \leq \sqrt{\varepsilon_k}.$$

Also gibt es ein α_k mit $|\alpha_k| \leq \sqrt{\varepsilon_k}/\text{vol}(D_k)$, für welches $\int_{D_k} f + \alpha_k dM = 0$. Nach Lemma 2 ist

$$\begin{aligned} \int_{D_k} \|\text{grad } f\|^2 dM &\geq (\frac{1}{4} + 2\delta_k) \int_{D_k} (f^2 + 2\alpha_k f + \alpha_k^2) dM \\ &\geq (\frac{1}{4} + 2\delta_k)(1 - 2|\alpha_k| \sqrt{\varepsilon_k}) > \frac{1}{4} + \delta_k. \end{aligned}$$

Aus (11)–(14) folgt $\lambda_{4g-2} \geq \frac{1}{4} + \min_k \delta_k > \frac{1}{4}$, q.e.d.

LITERATUR

- [1] CHENG, S. Y., *Eigenvalue Comparison Theorems and Its Geometric Applications*, Math. Z. 143 (1975), 289–297.
- [2] FRICKE, R., KLEIN, F., *Vorlesungen über die Theorie der Automorphen Functionen* (Leipzig 1897).
- [3] HUBER, H., *Ueber die Eigenwerte des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen*, Comment. Math. Helv. 51 (1976), 215–231.
- [4] KLINGENBERG, W., *Eine Vorlesung über Differentialgeometrie* (Springer, Berlin etc. 1973).
- [5] LÖBELL, F., *Die überall regulären unbegrenzten Flächen fester Krümmung* (Dissertation, Tübingen 1927).
- [6] McKEAN, H. P., *Selberg's Trace Formula as Applied to a Compact Riemann Surface*, Comm. Pure Appl. Math. 21 (1972), 225–246.
- [7] PERRON, O., *Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene* (Stuttgart 1962).
- [8] RANDOL, B., *Small Eigenvalues of the Laplace Operator on Compact Riemann Surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 996–1000.

Rombachtäli 31 5022 Rombach

Eingegangen den 28. April 1976