

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 52 (1977)

Artikel: Applications Harmoniques de Variétés Produits.
Autor: Lemaire, Luc
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-39984>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Applications Harmoniques de Variétés Produits

LUC LEMAIRE*

a. Théorème d'Existence

Soient M , g et M' , g' des variétés riemanniennes sans bord, connexes, compactes, de classe C^∞ et de dimensions n et n' . A toute application $U \in C^\infty(M, M')$ on associe son énergie

$$E(U) = \int_M e(U) v_g$$

où $e(U) = \frac{1}{2} |dU|^2$ est la densité d'énergie de U en un point. Dans des systèmes de coordonnées locales $\{x^i\}$ et $\{u^\lambda\}$ sur M et M' , on a $e(U) = \frac{1}{2} g^{ij} U_i^\lambda U_j^\mu g'_{\lambda\mu}(U)$ où $U_i^\lambda = \partial U^\lambda / \partial x^i$.

Par définition [3], une application $U \in C^\infty(M, M')$ est harmonique ssi elle est point critique de la fonction E .

Dans des systèmes de coordonnées locales, notons Γ et Γ' les composantes des connexions sur M et M' , $U_{ij}^\lambda = (\partial^2 U^\lambda / \partial x^i \partial x^j) - \Gamma_{ij}^k U_k^\lambda$ la dérivée covariante seconde de U^λ , et $\Delta U^\lambda = g^{ij} U_{ij}^\lambda$ son laplacien. On montre [3] qu'une application U est harmonique ssi elle vérifie les équations d'Euler-Lagrange

$$\tau(U)^\lambda = \Delta U^\lambda + g^{ij} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(U) U_i^\mu U_j^\nu = 0.$$

$\tau(U)$ est appelée la tension de U .

Une question classique du calcul global des variations concerne l'existence d'un représentant harmonique dans les classes d'homotopie d'applications entre variétés compactes. Elle s'est posée lorsque J. Eells et J. Sampson ont démontré que si la courbure sectionnelle de M' est négative ou nulle, toute classe d'homotopie contient un tel représentant [3]. Pour cela, ils ont établi pour toute condition initiale $U_0: M \rightarrow M'$ que la solution $U(x, t) \equiv U_t(x)$ de l'équation de la

* Aspirant au Fonds National Belge de la Recherche Scientifique, Université Libre de Bruxelles–University of Warwick.

chaleur $\partial U/\partial t = \tau(U)$ existe pour tout t positif et qu'une suite U_{t_k} ($t_k \rightarrow \infty$) converge uniformément vers une application harmonique.

Sans cette condition sur la courbure de M' , des théorèmes d'existence n'ont pu être obtenus que pour certaines classes de variétés (p. ex. [10], [7]), et un contreexemple a montré qu'il n'y a pas toujours existence [4].

Dans le présent article, nous obtenons des théorèmes d'existence (pour des applications harmoniques ou pour la solution de l'équation de la chaleur) en supposant que M et M' sont des produits de variétés. Cela nous permet en particulier d'étendre à des variétés de dimension plus grande des résultats connus lorsque la dimension de M est 1 ou 2. Nous obtenons principalement le résultat suivant.

Soient $M = N \times K$ et $M' = N' \times K'$ des produits différentiables de variétés riemanniennes compactes. Nous notons ${}_N g$, ${}_N \Gamma$ et ${}_N R$ les composantes de la métrique, de la connexion et de la courbure sur N , et nous employons des notations similaires sur K , N' et K' .

Choisissons sur M des systèmes de coordonnées locales $(x^1, \dots, x^r; x^{r+1}, \dots, x^n) = (x^i; x^a)$ tels que les r premières variables constituent des systèmes de coordonnées sur N , et les suivantes sur K . De même, sur $N' \times K'$, nous considérons des coordonnées $(u^1, \dots, u^{r'}; u^{r'+1}, \dots, u^{n'}) = (u^\alpha; u^A)$.

Sur M , nous définissons la métrique

$$g = \begin{pmatrix} {}_N g_{ij}(x^k) & 0 \\ 0 & \varphi(x^i)_K g_{ab}(x^c) \end{pmatrix}$$

où φ est une fonction positive de classe C^∞ sur N .

Sur M' , la métrique g' est définie par:

$$g' = \begin{pmatrix} {}_{N'} g_{\alpha\beta}(u^\gamma) & 0 \\ 0 & \psi(u^\alpha)_{K'} g_{AB}(u^C) \end{pmatrix},$$

ψ étant positive et C^∞ sur N' .

THÉORÈME 1. *Supposons qu'il existe une application harmonique $\mathcal{F}: K \rightarrow K'$ de densité d'énergie constante, c'est-à-dire une application vérifiant*

$$\tau(\mathcal{F}) = 0$$

$$e(\mathcal{F}) = \text{constante}.$$

(i) *Soit $N =$ le cercle S^1 . Pour toute classe d'homotopie d'applications de S^1*

dans N' , il existe une application harmonique U de $S^1 \times K$ dans $N' \times K'$ de la forme

$$U: (x^1; x^2, \dots, x^n) \rightarrow (f^\alpha(x^1); \mathcal{F}^A(x^2, \dots, x^n))$$

telle que f soit dans la classe d'homotopie donnée.

(ii) Si N est une surface et si le deuxième groupe d'homotopie de N' est nul, alors pour toute classe d'homotopie d'applications de N dans N' , il existe une application harmonique de $N \times K$ dans $N' \times K'$ de la forme

$$U: (x^1, \dots, x^n) \rightarrow (f^\alpha(x^1, x^2); \mathcal{F}^A(x^3, \dots, x^n))$$

telle que f soit dans la classe d'homotopie donnée.

(iii) Si la courbure sectionnelle de N' est négative ou nulle, la solution de l'équation de la chaleur

$$\tau(U) = \frac{\partial U}{\partial t} \tag{1}$$

existe pour tout temps t pour une condition initiale de la forme

$$U_0 = (x^1, \dots, x^n) \rightarrow (f_0^\alpha(x^1, \dots, x^r); \mathcal{F}^A(x^{r+1}, \dots, x^n)). \tag{2}$$

Ce théorème est démontré dans les paragraphes *b* et *c*.

Au paragraphe *d*, nous présentons quelques exemples d'applications harmoniques de densité d'énergie constante, et au paragraphe *e* nous donnons une expression explicite des applications harmoniques obtenues lorsque N , K , N' et K' sont de dimension 1. Finalement, nous rappelons un théorème de non-existence de R. T. Smith qui contraste avec ces résultats (§f).

Une partie de cet article est extraite de la thèse [6], préparée avec l'aide de Monsieur James Eells. C'est un plaisir de lui adresser ici tous mes remerciements.

b. Applications Harmoniques

Considérons la situation du théorème 1. L'énergie de U est donnée par:

$$\begin{aligned} e(U) &= e(f) + \frac{\psi(f)}{\varphi} e(\mathcal{F}) \\ E(U) &= \int_N \int_K e(U) v_{N^s} \cdot v_{K^s} \varphi^{(n-r)/2} \\ &= V(K) \int_N e(f) \varphi^{(n-r)/2} \cdot v_{N^s} + E(\mathcal{F}) \int_N \psi(f) \varphi^{(n-r)/2-1} v_{N^s}. \end{aligned} \tag{3}$$

Un calcul direct en coordonnées locales donne les coefficients des connexions sur M et M' , ce qui permet d'expliciter la tension de U en fonction de f et \mathcal{F} :

$$\begin{aligned}\tau(U)^\alpha &= \tau_N(f)^\alpha + \frac{n-r}{2} {}_N g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{1}{\varphi} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^k} - e(\mathcal{F})_{N'} g^{\alpha\beta} \cdot \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \psi}{\partial u^\beta}(f) \\ \tau(U)^A &= \frac{1}{\varphi} \tau_K(\mathcal{F})^A.\end{aligned}\tag{4}$$

Comme $\tau(\mathcal{F})=0$ et $e(\mathcal{F})=C$, $\tau(U)^A=0$ et $\tau(U)^\alpha$ ne dépend que des coordonnées (x^1, \dots, x^r) sur N et de leurs images par f . Comme le montre le lemme suivant, ceci ramène l'étude de l'énergie de U à un problème variationnel en f .

LEMME 2. *Supposons toujours que $\tau(\mathcal{F})=0$ et $e(\mathcal{F})=C$. Toute application de M dans M' extrémant l'énergie parmi les applications de la forme:*

$$(x^1, \dots, x^n) \rightarrow (f^\alpha(x^1, \dots, x^r); \mathcal{F}^A(x^{r+1}, \dots, x^n))\tag{5}$$

est harmonique.

Démonstration. Pour un tel point critique U et pour tout champ de vecteurs le long de U de la forme

$$v^\alpha = v^\alpha(x^1, \dots, x^r), \quad v^A = 0$$

nous avons

$$-\langle \tau(U), v \rangle = D_v E(U) = 0$$

c'est-à-dire

$$\int_N \int_K g'_{\alpha\beta}(f) v^\alpha(x^1, \dots, x^r) \tau(U)^\beta v_\beta = 0$$

Comme $\tau(U)^\beta$ ne dépend pas des variables (x^{r+1}, \dots, x^n) , ceci implique:

$$\int_N \varphi^{(n-r)/2} g'_{\alpha\beta}(f) v^\alpha(x^1, \dots, x^r) \tau(U)^\beta v_{N^s} = 0 \quad \text{et} \quad \tau(U)^\beta = 0.$$

D'autre part, $\tau(U)^A = (1/\varphi) \tau(\mathcal{F})^A = 0$.

c.q.f.d.

La recherche des applications harmoniques de la forme (5) se ramène donc à l'étude du problème variationnel en $f: \Sigma(f) = E(U)$ défini par l'expression (3).

Pour démontrer les points (i) et (ii) du théorème 1, nous utilisons une méthode directe du calcul des variations. L'espace de Sobolev $L_1^2(N, N')$ utilisé ci-dessous est par exemple défini dans [9] ou [5, II].

Considérons une suite minimisante pour Σ dans une classe d'homotopie donnée. Par la forme (3) de $\Sigma(f)$, c'est un ensemble borné de L_1^2 . En vertu de [2; (12, 15, 10)], il contient une sous-suite (f_s) convergeant faiblement vers une application $f \in L_1^2$. De [2; (12, 15, 8)] et de l'existence d'une sous-suite convergeant fortement dans L^2 (lemme de Rellich), on déduit que $\Sigma(f) \leq \liminf \Sigma(f_s)$.

Pour démontrer le théorème, il reste à établir que f est de classe C^∞ et est dans la même classe d'homotopie que les (f_s) . f réalisera alors le minimum absolu de Σ dans la classe.

Démonstration de (i). Supposons $N = S^1$ et N' quelconque. Par le théorème de plongement de Sobolev et le lemme de Rellich, nous avons une inclusion compacte $L_1^2(S^1, N') \hookrightarrow C^0(S^1, N')$. La suite (f_s) contient donc une sous-suite (f_σ) convergeant uniformément vers une application continue. La convergence étant uniforme, la limite f est dans la même classe d'homotopie que les (f_s) .

Pour démontrer que f est C^∞ , il suffit d'observer que lorsque $N = S^1$, (3) définit un problème à une dimension vérifiant les conditions (1.7.1) et (1.10.1) de [9]. La différentiabilité découle alors du théorème 1.10.1 de ce même ouvrage.
c.q.f.d.

Démonstration de (ii). Supposons que N est une surface et que le deuxième groupe d'homotopie de N' est nul. De la démonstration du théorème 8.1.11 de [11], on déduit que les classes d'homotopie d'applications de N dans N' sont paramétrisées par les classes de conjugaison d'homomorphismes de $\Pi_1(N)$ dans $\Pi_1(N')$. On voit dès lors que la démonstration du théorème (7.1) de [7] s'applique à ce cas: la limite f de la suite (f_s) minimise Σ dans tout disque suffisamment petit de N et sera dans la même classe d'homotopie que les (f_s) si on peut établir qu'elle est continue.

Il reste donc à montrer qu'une application $f \in L_1^2$ minimisant Σ dans un disque est de classe C^∞ .

Pour cela, il suffit de montrer qu'elle est de classe C_λ^0 (c'est-à-dire Hölder—continue d'exposant λ). En effet, l'intégrande (3) vérifie en dimension 2 les hypothèses du théorème 1.10.4 (iii) de [9], ce qui garantit la régularité de toute extrémale de classe C_λ^0 .

Pour montrer que le minimum $f \in L_1^2$ est Hölder-continu, nous utilisons une méthode due à C. Morrey ([8] et [9]). Par commodité de notation, nous nous

référons à l'exposé de cette méthode du §12 de [7] et nous n'indiquons que les modifications à apporter à cette démonstration.

Soit D un disque de rayon r de N . Nous notons B son image inverse par l'exponentielle et pour tout $h: D \rightarrow N'$ nous posons $\tilde{h} = h \circ \exp: B \rightarrow N'$. Si (x, y) et (r, θ) désignent des coordonnées euclidiennes et polaires sur B , nous posons $\tilde{H}(r, \theta) = \tilde{h}(x, y)$. Enfin, $E'(h)$ et $\Sigma'(h)$ désignent les "énergies" de h dans ce disque de rayon r , et $E'(\tilde{h})$ et $\Sigma'(\tilde{h})$ les "énergies" de \tilde{h} par rapport à la métrique euclidienne sur B .

Nous reprenons alors la démonstration de la proposition (12.2) de [7]. Soit $f \in L_1^2$ minimisant Σ dans un disque de rayon r , que l'on peut choisir tel que $f|_{\partial D}$ soit absolument continue. On distingue deux cas.

(1) Si $\int_0^{2\pi} |\tilde{F}_\theta|^2 d\theta \leq w'R'^2/4\pi$, le lemme 12.6 de [7] et le fait que φ et ψ soient positives et bornées impliquent l'existence de deux nombres A_1 et A_2 et d'une application $\tilde{h}: B \rightarrow M'$ tels que $\tilde{h}|_{\partial B} = \tilde{f}$ et

$$\Sigma'(\tilde{h}) \leq A_1 \int_{\partial B} |\tilde{F}_\theta|^2 d\theta + A_2 r^2.$$

Comme f minimise Σ dans D , il vient

$$\begin{aligned} E'(\tilde{f}) &\leq W^2 E'(f) \leq W^2 A_3 \Sigma'(f) \\ &\leq W^2 A_3 \Sigma'(h) \leq W^4 A_3 \Sigma'(\tilde{h}) \leq W^4 A_3 \left(A_1 \int_{\partial B} |\tilde{F}_\theta|^2 d\theta + A_2 r^2 \right). \end{aligned}$$

(2) Si $\int_0^{2\pi} |\tilde{F}_\theta|^2 d\theta > w'R'^2/4\pi$, il vient

$$\begin{aligned} E'(\tilde{f}) &\leq W^2 A_3 \Sigma'(f) \leq W^2 A_3 \inf(\Sigma) \\ &\leq W^2 A_3 \inf(\Sigma) \frac{4\pi}{w'R'^2} \int_0^{2\pi} |\tilde{F}_\theta|^2 d\theta. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, nous avons donc

$$E'(\tilde{f}) \leq \frac{1}{2\lambda} \left(\int_0^{2\pi} |\tilde{F}_\theta|^2 d\theta + r^2 \right), \quad \text{où } 0 < \lambda < 1.$$

Posons $\Phi(r) = E'(\tilde{f})$. Il vient

$$r\Phi'(r) = \int_0^{2\pi} \left(|\tilde{F}_r|^2 + \frac{1}{r^2} |\tilde{F}_\theta|^2 \right) r^2 d\theta \geq \int_0^{2\pi} |\tilde{F}_\theta|^2 d\theta \geq 2\lambda \Phi(r) - r^2$$

c'est-à-dire $\Phi'(r) \geq (2\lambda/r)\Phi(r) - r$.

En intégrant cette inégalité de r au rayon fixé R , il vient

$$\begin{aligned}\Phi(r) &\leq \Phi(R) \left(\frac{r}{R}\right)^{2\lambda} + \frac{R^2}{2-2\lambda} \left(\left(\frac{r}{R}\right)^{2\lambda} - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right) \\ &\leq \left(\Phi(R) + \frac{R^2}{2-2\lambda} \right) \left(\frac{r}{R}\right)^{2\lambda}.\end{aligned}$$

En vertu du lemme (12.11) de [7], l'application f est alors de classe C_λ^0 .

c.q.f.d.

c. Equation de la Chaleur

Pour démontrer (iii), nous utilisons la méthode de R. Hamilton [5]. Nous n'indiquons ici que les modifications à apporter à sa démonstration.

Démonstration de (iii). Supposons la courbure sectionnelle de N' négative ou nulle. Nous étudions la solution de (1) pour la condition initiale (2). Comme dans [5, §IV, 5], M' est plongée dans un espace euclidien muni d'une métrique telle que la composée de U et du plongement vérifie également (1). Les espaces $L_k^q(M, M')$ sont définis par ce plongement [5, II].

D'après [5; §IV, 11], toute solution de (1) de classe L_2^q ($q > n+2$) est de classe C^∞ , et pour toute condition initiale, une telle solution existe dans un intervalle de temps non vide.

Soit $U: M \times [0, \omega) \rightarrow M'$ une solution maximale du problème (1), (2). Nous supposons ω fini. Nous allons montrer que toutes les dérivées de U sont bornées dans $M \times [0, \omega)$. Il en découle que U peut être prolongée à $[0, \omega]$, et donc dans un domaine $[0, \omega + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, ce qui contredit le fait que $[0, \omega)$ est maximal. ω doit donc être infini, ce qui établit (iii).

Montrons maintenant que toutes les dérivées de U sont bornées dans $M \times [0, \omega)$. Comme dans [5], nous écrivons les équations en termes de fibrés et non en coordonnées locales. Lorsqu'un vecteur v est présent deux fois comme argument d'un tenseur, il y a contraction sur ces arguments. Par convention, les différentes constantes qui apparaissent dans des inégalités au cours de la démonstration sont représentées par la même lettre C .

La condition initiale du problème est donnée par (2). Comme la tension d'une application de la forme (5) est tangente à N' et ne dépend pas des variables sur K , la solution de (1) est pour tout t de cette même forme. D'autre part, sa densité d'énergie e vérifie ([3] et [5]):

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \Delta e - |\nabla \nabla U|^2 - \langle {}_M \text{Ricci} \nabla_v U, \nabla_v U \rangle + \langle {}_{M'} R(U)(\nabla_v U, \nabla_w U) \nabla_v U, \nabla_w U \rangle. \quad (6)$$

La courbure de Ricci de M étant bornée (puisque M est compacte), nous avons

$$-\langle_M \text{Ricci } \nabla_v U, \nabla_v U \rangle \leq C \cdot e.$$

Pour estimer le dernier terme de (6), nous utilisons les formes particulières de M' et U . On vérifie en coordonnées locales que

$$M' R_{\beta\alpha\beta}^\alpha = N' R_{\beta\alpha\beta}^\alpha \leq 0.$$

Lorsque v et w sont tangents à N' , nous avons donc un terme négatif ou nul. Lorsque v et w sont tangents à K' , le terme introduit est borné puisque \mathcal{F} est donnée, et lorsque v est tangent à N' et w à K' , il est borné par $C \cdot e$.

Au total, (6) implique

$$\frac{\partial e}{\partial t} \leq \Delta e + C_1 e + C_1 - |\nabla \nabla U|^2. \quad (7)$$

Remarque. Lorsque M' est quelconque, (6) implique une inégalité faisant intervenir e^2 , et ce terme quadratique empêche d'établir l'existence de la solution.

Soit $\mathcal{K} = \frac{1}{2} |\partial U / \partial t|^2$ la densité d'énergie cinétique de U . Notons H son intégrale sur M . U étant solution de (1), \mathcal{K} vérifie [5]

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} = \Delta \mathcal{K} - \left| \nabla \frac{\partial U}{\partial t} \right|^2 + \left\langle_{M'} R \left(\nabla_v U, \frac{\partial U}{\partial t} \right) \nabla_v U, \frac{\partial U}{\partial t} \right\rangle. \quad (8)$$

Comme $\partial U / \partial t$ est tangent à N' , le raisonnement utilisé pour la fonction e montre que (8) implique

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} \leq \Delta \mathcal{K} - \left| \nabla \frac{\partial U}{\partial t} \right|^2 + C_2 \mathcal{K}. \quad (9)$$

Posons:

$$\Lambda = e + 1 - \exp(C_1 t)$$

$$\Theta = \mathcal{K} \exp(-C_2 t).$$

En remplaçant e par sa valeur en fonction de Λ dans (7), il vient

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t} \leq \Delta \Lambda + C_1 \Lambda - |\nabla \nabla U|^2. \quad (10)$$

De même, (9) donne

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} \leq \Delta \Theta - \exp(-C_2 t) \cdot \left| \nabla \frac{\partial U}{\partial t} \right|^2. \quad (11)$$

Posons

$$T = \int_M \Theta v_g = H \exp(-C_2 t).$$

En intégrant (11) sur M , il vient

$$\frac{\partial T}{\partial t} \leq - \int_M \exp(-C_2 t) \left| \nabla \frac{\partial U}{\partial t} \right|^2 v_g \leq 0.$$

Donc $T \leq T_0$, c'est-à-dire

$$H \leq H_0 \exp(C_2 t).$$

Comme $dE/dt = -2H$,

$$-\frac{dE}{dt} \leq 2H_0 \exp(C_2 t). \quad (12)$$

Soit δ un nombre (fixé) inférieur à $\omega/4$. Nous montrons que diverses normes de U sont bornées sur $M \times t$ et $M \times [t, t + \delta]$. La norme L_k^q sur $M \times t$ est la norme usuelle et celle sur $M \times [t, t + \delta]$ est la norme “avec poids” définie dans [5, §I, 3 et IV, 7] et pour laquelle chaque dérivée par rapport à t a le même poids que deux dérivées par rapport aux x^i .

Norme L_2^2 . En intégrant (7), il vient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(U) &= \int_{M \times t} \frac{\partial e}{\partial t} v_g \leq \int_{M \times t} (\Delta e + C_1 e + C_1 - |\nabla \nabla U|^2) v_g \\ &\leq C_1 E(U) + C - \int_{M \times t} |\nabla \nabla U|^2 v_g. \end{aligned}$$

E est décroissante, donc bornée et sa dérivée vérifie (12). Il vient donc

$$\int_{M \times t} |\nabla \nabla U|^2 v_g \leq C + 2H_0 \exp(C_2 t).$$

Nous pouvons dès lors calculer les normes L_2^2 de U sur $M \times t$ et $M \times [t, t + \delta]$:

$$\|U\|_{L_2^2(M \times t)}^2 = \int_{M \times t} (|U|^2 + |\nabla U|^2 + |\nabla \nabla U|^2) v_g \leq C \cdot \exp(Ct).$$

$$\|U\|_{L_2^2(M \times [t, t + \delta])}^2 = \int \left(|U|^2 + |\nabla U|^2 + |\nabla \nabla U|^2 + \left| \frac{\partial U}{\partial t} \right|^2 \right) v_g dt \leq C \cdot \exp(Ct).$$

Normes L_2^q . Par (10), Λ vérifie l'inégalité

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t} \leq \Delta \Lambda + C_1 \Lambda.$$

Nous définissons la fonction auxiliaire λ_θ comme étant la solution du problème linéaire

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda_\theta}{\partial t} = \Delta \lambda_\theta + C_1 \lambda_\theta & \text{sur } M \times [\theta - \delta, \theta + \delta] \\ \lambda_\theta = \Lambda & \text{sur } M \times \theta - \delta. \end{cases} \quad (13)$$

Cette solution existe en vertu de [5; §IV, 8]. Le principe du maximum [5; §IV, 2] appliqué à $\Lambda - \lambda_\theta$ montre que $\Lambda \leq \lambda_\theta$.

En utilisant les formes duales du théorème de plongement de Sobolev et du principe du maximum [5; §V, 9], nous obtenons, pour $k \geq n + 2$ [5; §V, 10]

$$\|\lambda_\theta\|_{L_k^q(M \times [\theta - \delta, \theta + \delta])} \leq C \cdot \|\lambda_\theta\|_{L^1(M \times \theta - \delta)}.$$

Or

$$\begin{aligned} \|\lambda_\theta\|_{L^1(M \times \theta - \delta)} &= \|\Lambda\|_{L^1(M \times \theta - \delta)} \\ &\leq \|e\|_{L^1(M \times \theta - \delta)} \\ &= E(U)_{\theta - \delta} \leq C. \end{aligned}$$

Donc $\|\lambda_\theta\|_{L_k^q(M \times [\theta - \delta, \theta + \delta])} \leq C$.

Nous calculons alors la norme L_2^q de U . Notons $\Gamma'(U)(dU)^2$ la différence $\tau(U) - \Delta U$. Par la forme de [5; §III, 18] des inégalités de Gårding et Friedrichs

$$\|U\|_{L_2^2(M \times [\theta, \theta + \delta])} \leq C \cdot (1 + \|\Gamma'(U)(dU)^2\|_{L_0^q(M \times [\theta - \delta/2, \theta + \delta])}).$$

Or les Γ' sont bornés, et

$$\frac{1}{2} |dU|^2 = e = \Lambda + \exp(C_1 t) - 1 \leq \lambda_\theta + \exp(C_1 t) - 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|\Gamma'(U)(dU)^2\|_{L_0^q} &\leq C \|\lambda_\theta + \exp(C_1 t) - 1\|_{L_0^q} \\ &\leq C \sum_s \binom{q}{s} \|\lambda_\theta\|_{L_0^q} \cdot (\exp(C_1 t) - 1)^{q-s}. \end{aligned}$$

Comme λ_θ est solution de (13), une application répétée de l'inégalité de Gårding montre que

$$\|\lambda_\theta\|_{L^s_0(M \times [\theta-\delta/2, \theta+\delta])} \leq C(1 + \|\lambda_\theta\|_{L^s_k(M \times [\theta-\delta, \theta+\delta])}) \leq C.$$

Donc $\|U\|_{L^q_2} \leq C \cdot \exp(Ct)$.

Normes L^q_k . Pour montrer que toutes les normes L^q_k de U sont bornées, nous procédons par induction sur des valeurs réelles de k , chacune étant inférieure à la précédente plus un.

Supposons que pour tout s , il existe un C tel que $\|U\|_{L^s_m} \leq C \cdot \exp(Ct)$, et considérons un nombre $k < m + 1$. Par l'inégalité de Gårding,

$$\|U\|_{L^q_k(M \times [t, t+\delta])} \leq C \cdot (1 + \|F'(U)(dU)^2\|_{L^{q/2}_{k-2}(M \times [t-\varepsilon, t+\delta])}).$$

Par les propriétés des opérateurs différentiels polynomiaux [5; §IV, 6]

$$\|F'(U)(dU)^2\|_{L^{q/2}_{k-2}} \leq C \cdot (1 + \|U\|_{L^s_m})^{s/q}$$

lorsque $k - 1 < m$ et $k \cdot q < m \cdot s$.

Cette dernière condition est vérifiée lorsque s est assez grand, et nous avons

$$\|U\|_{L^q_k} \leq C \cdot \exp(Ct) \quad \text{dès que} \quad k < m + 1.$$

Toutes les normes L^q_k de U sont donc bornées dans le domaine d'existence $[0, \omega)$.

Par le théorème de plongement de Sobolev, toutes les dérivées $(\partial/\partial t)^r \nabla^s U$ sont également bornées, ce qu'il fallait établir.

d. Applications Harmoniques de Densité d'Énergie Constante

Nous donnons quelques exemples d'applications $\mathcal{F}: K \rightarrow K'$ vérifiant $\tau(\mathcal{F}) = 0$ et $e(\mathcal{F}) = C$.

Remarquons d'abord que si $K = K'$, l'application identique vérifie ces conditions, ce qui fournit une famille d'exemples simples. Les immersions riemanniennes harmoniques (c'est-à-dire minimales [3; §I, 2, D]) en fournissent d'autres.

Les propositions suivantes découlent de [10, exemples 1.3 et 3.3] et de calculs directs:

PROPOSITION 3. Soit $P: \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^t \rightarrow \mathbf{R}^p$ une multiplication orthogonale, c'est-à-dire une application bilinéaire telle que $|P(x, y)| = |x| |y|$. P induit une application de $S^{s-1} \times S^{t-1}$ dans S^{p-1} , harmonique et de densité d'énergie constante égale à $\frac{1}{2}[(s-1) + (t-1)]$.

PROPOSITION 4 (Construction de Hopf). Soit $P: \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^s \rightarrow \mathbf{R}^p$ une multiplication orthogonale, et $Q: \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^s \rightarrow \mathbf{R}^{p+1}$ l'application définie par

$$Q(x, y) = (|x|^2 - |y|^2, 2P(x, y)).$$

Q induit une application $\mathcal{F}: S^{2s-1} \rightarrow S^p$, harmonique et de densité d'énergie constante égale à $2s$.

Remarque. Si P est le produit des complexes, des quaternions ou des octaves de Cayley, cette construction mène aux fibrations de Hopf.

e. Expression Explicite en Dimension Deux

Dans la situation du théorème 1, supposons que $\dim M = \dim M' = 2$ et qu'aucune des variétés N , K , N' et K' n'est réduite à un point. M et M' sont alors des tores.

Les applications harmoniques entre surfaces étant préservées par un difféomorphisme conforme de M [3; §I, 4, B], nous pouvons supposer que $M = N \times K$ est le tore plat $\mathbf{R}/a\mathbf{Z} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, muni de coordonnées euclidiennes (x^1, x^2) . Sans perte de généralité, $M' = N' \times K'$ peut être représenté par le tore $\mathbf{R}/a'\mathbf{Z} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, muni dans des coordonnées (u^1, u^2) de la métrique

$$g' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \psi(u^1) \end{pmatrix}.$$

L'application $\mathcal{F}: K \rightarrow K'$ du théorème 1 est alors de la forme $\mathcal{F}(x^2) = \mathcal{D}^* x^2 + b$, où $\mathcal{D}^* \in \mathbf{Z}$. D'autre part, les classes d'homotopie d'applications de N dans N' sont paramétrisées par le degré \mathcal{D} .

En utilisant la méthode de [1; §5], on voit aisément que pour toute application harmonique U d'une surface plate dans une variété, la fonction définie en coordonnées euclidiennes par

$$g'_{\lambda\mu} U_1^\lambda U_1^\mu - g'_{\lambda\mu} U_2^\lambda U_2^\mu - 2ig'_{\lambda\mu} U_1^\lambda U_2^\mu$$

est holomorphe. Si M est un tore, une telle fonction est constante par le théorème de Liouville. La première composante des applications harmoniques de la forme

$$U(x^1, x^2) = (f(x^1); \mathcal{D}^* x^2 + b) \quad (14)$$

vérifie donc l'équation

$$f'^2 = \mathcal{D}^{*2} \psi(f) + c.$$

Si f' ne s'annule pas, ou entre deux zéros de f' , les applications harmoniques de la forme (14) sont données par la relation

$$\int_{f_0}^f \frac{d\nu}{\pm(\mathcal{D}^{*2} \psi(\nu) + c)^{1/2}} = x^1 - x_0^1 \quad (15)$$

où le nombre c dépend de l'application considérée.

Pour chaque classe d'homotopie de f nous pouvons décrire ces applications harmoniques:

Si $\mathcal{D} \neq 0$, f' ne s'annule pas. f est donnée par (15) et enroule $N\mathcal{D}$ fois autour de N' .

Si $\mathcal{D} = 0$ et $\mathcal{D}^* \neq 0$, U peut être une géodésique ou (pour certains a et ψ) osciller entre deux zéros de f' en vérifiant (15) dans l'intervalle. Si $\mathcal{D} = \mathcal{D}^* = 0$, U est constante.

f. Suspensions

Dans le théorème 1(i), posons $N = N' = S^1$, $K = K' = S^{n-1}$ et $\mathcal{F} = \text{identité}$. On peut considérer la construction de l'application harmonique U comme une variante d'une suspension de l'identité sur S^{n-1} (M et M' étant homéomorphes à $S^{n-1} \times S^1$ au lieu de S^n). Le résultat suivant [10, th. 9.3] montre que le théorème d'existence 1(i) n'a pas d'analogue dans le cas d'une suspension proprement dite.

THÉORÈME 5. *Soit $E^n(b) = \{(\bar{x}, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \mid b^2 |\bar{x}|^2 + y^2 = b^2\}$ un ellipsoïde de révolution. Si $n \geq 3$ et si b est suffisamment grand, il n'existe pas d'application harmonique de degré 1 de $S^n = E^n(1)$ dans $E^n(b)$ de la forme*

$$(\bar{x} \cdot \cos \theta, \sin \theta) \rightarrow (\bar{x} \cdot \cos h(\theta), b \cdot \sin h(\theta))$$

où $\bar{x} \in S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. S. CHERN and S. GOLDBERG, *On the volume-decreasing property of a class of real harmonic maps*, Amer. J. Math. 97 (1975), 133–147.
- [2] J. DIEUDONNÉ, *Eléments d'analyse*, Vol. 2, Gauthier-Villars (1969).
- [3] J. EELLS and J. SAMPSON, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. 86 (1964), 109–160.
- [4] J. EELLS and J. WOOD, *Restrictions on harmonic maps of surfaces*, Topology 15 (1976), 263–266.
- [5] R. HAMILTON, *Harmonic maps of manifolds with boundary*, Lecture Notes 471, Springer-Verlag (1975).
- [6] L. LEMAIRE, Thèse, Bruxelles (1975).
- [7] —, *Applications harmoniques de surfaces riemanniennes*, à paraître dans J. Diff. Geom.
- [8] C. MORREY, *The problem of Plateau on a Riemannian manifold*, Annals of Math. 49 (1948), 807–851.
- [9] —, *Multiple integrals in the calculus of variations*, Grundlehren der math. Wiss, Band 130, Springer-Verlag (1966).
- [10] R. T. SMITH, *Harmonic mappings of spheres*, Amer. J. Math. 97 (1975), 364–385.
- [11] E. SPANIER, *Algebraic topology*, McGraw-Hill (1966).

*Dept. of Mathematics,
University of Warwick,
Coventry CV4 7AL,
England.*

Reçu le 8 juin 1976.