

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 52 (1977)

**Artikel:** Schlichte Funktionen und analytische Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation.  
**Autor:** Pommerenke, Ch.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-40022>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Schlichte Funktionen und analytische Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation

CH. POMMERENKE

Herrn Professor A. Pfluger zum 70. Geburtstag

## 1. Einleitung

Sei BMOA der Banachraum der in  $\mathbb{D} = \{z \mid |z| < 1\}$  analytischen Funktionen  $f$  mit der Norm

$$\|f\|_* = |f(0)| + \sup_{|\zeta| < 1} \|f_\zeta\|_2 < \infty, \quad (1.1)$$

wobei für  $|\zeta| < 1$  gesetzt ist

$$f_\zeta(z) = f\left(\frac{z + \zeta}{1 + \bar{\zeta}z}\right) - f(\zeta) \quad (z \in \mathbb{D}), \quad (1.2)$$

$$\|f_\zeta\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} |f_\zeta(z)|^2 |dz| = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} |f(z) - f(\zeta)|^2 \frac{1 - |\zeta|^2}{|z - \zeta|^2} |dz|. \quad (1.3)$$

Das sind gerade die Funktionen in  $H^1$ , deren Randwerte zu BMO ( $\partial\mathbb{D}$ ) (“beschränkte mittlere Oszillation,” [12][17]) gehören. Fefferman und Stein [9] haben gezeigt, daß BMOA der Dualraum von  $H^1$  ist. Weiter sei VMOA (“verschwindende mittlere Oszillation,” Sarason [18]) der Raum der  $f \in \text{BMOA}$  mit

$$\|f_\zeta\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad |\zeta| \rightarrow 1 - 0; \quad (1.4)$$

diese Bedingung ist äquivalent zu

$$\|f(z) - f(rz)\|_* \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad r \rightarrow 1 - 0. \quad (1.5)$$

Sei  $\mathcal{B}$  der Banachraum der Blochfunktionen [3][15], d.h. der in  $\mathbb{D}$  analytischen Funktionen  $f$  mit

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = |f(0)| + \sup_{|z|<1} (1-|z|^2) |f'(z)| < \infty, \quad (1.6)$$

und sei  $\mathcal{B}_0$  der Raum der  $f \in \mathcal{B}$  mit

$$(1-|z|^2) |f'(z)| \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad |z| \rightarrow 1-0. \quad (1.7)$$

Nach (1.2) und (1.3) ist  $(1-|\zeta|^2)|f'(\zeta)| = |f'_\zeta(0)| \leq \|f'_\zeta\|_2$ , also  $\|f\|_{\mathcal{B}} \leq \|f\|_*$ . Somit gilt (neben  $\text{BMOA} \subset H^p$  für  $p < \infty$ )

$$\text{BMOA} \subset \mathcal{B}, \quad \text{VMOA} \subset \mathcal{B}_0. \quad (1.8)$$

Wir werden zeigen (Satz 1), daß für *schlichte* Funktionen umgekehrt

$$f \in \mathcal{B} \Rightarrow f \in \text{BMOA}, \quad f \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow f \in \text{VMOA}$$

gilt. Hieraus folgt u.a. der Satz von Baernstein, daß  $\log g \in \text{BMOA}$  ist, wenn  $g(z) \neq 0$  in  $\mathbb{D}$  schlicht ist. Die Bedingungen  $f \in \mathcal{B}$  und  $f \in \mathcal{B}_0$  besagen, daß die in  $f(\mathbb{D})$  enthaltenen Kreisscheiben beschränkte Räden haben bzw. daß die Räden dieser Kreisscheiben  $\rightarrow 0$  streben, wenn die Mittelpunkte  $\rightarrow \infty$  gehen [15].

Das Hauptergebnis (Satz 3) ist die folgende Darstellung von BMOA durch die *Ableitung schlichter Funktionen*: Eine Funktion gehört genau dann zu BMOA, wenn sie die Form

$$f(z) = b \log g'(z) \quad (z \in \mathbb{D})$$

hat, wo  $b$  eine Konstante und  $g$  eine in  $\mathbb{D}$  schlichte Funktion ist, deren Bildgebiet durch eine rektifizierbare Jordankurve berandet wird, die

$$(\text{Bogenlänge zwischen } w_1 \text{ und } w_2) \leq c |w_1 - w_2| \quad (1.9)$$

erfüllt. Die Bedingung (1.9) spielt in der Theorie der konformen Abbildung eine wichtige Rolle [10][13][19][20][21].

Herrn D. Gaier und Herrn H. M. Reimann möchte ich für die Gespräche danken, die ich mit ihnen über diesen Themenkreis geführt habe.

## 2. Schlichte Blochfunktionen

Zuerst betrachten wir Funktionen, für welche die Anzahl  $n(f, w)$  der  $w$ -Stellen in  $\mathbb{D}$  einer gewissen Beschränkung unterliegt; diese Bedingung ist insbesondere für schlichte Funktionen erfüllt.

**SATZ 1.** *Sei  $f$  analytisch in  $\mathbb{D}$  und sei*

$$\iint_{|w-w_0| \leq 1} n(f, w) d\Omega \leq A < \infty \quad (w_0 \in \mathbb{C}) \quad (2.1)$$

(mit  $d\Omega = du dv$ ). Dann gilt

$$f \in \text{BMOA} \Leftrightarrow f \in \mathcal{B}, \quad f \in \text{VMOA} \Leftrightarrow f \in \mathcal{B}_0.$$

*Beweis.* Die eine Richtung ist trivial nach (1.8). Sei umgekehrt  $f \in \mathcal{B}$ . Nach (1.2) und (1.6) gilt für  $\zeta \in \mathbb{D}$ ,  $0 \leq r < 1$

$$M_\zeta(r) = \max_{|z|=r} |f_\zeta(z)| \leq \frac{1}{2} \|f_\zeta\|_{\mathcal{B}} \log \frac{1+r}{1-r} \leq \frac{1}{2} \|f_\zeta\|_{\mathcal{B}} \log \frac{1+r}{1-r}. \quad (2.2)$$

Da die Bedingung (2.1) translationsinvariant ist, gilt

$$\iint_{|w-w_0| \leq 1} n(f_\zeta, w) d\Omega \leq A \quad (\zeta \in \mathbb{D}, w_0 \in \mathbb{C}).$$

Man kann  $\{|w| \leq M\}$  durch  $4[M+1]^2$  Kreisscheiben vom Radius 1 bedecken. Also folgt aus (2.2) für alle  $\zeta \in \mathbb{D}$

$$\iint_{|z| < r} |f'_\zeta(z)|^2 d\Omega \leq \iint_{|w| \leq M_\zeta(r)} n(f_\zeta, w) d\Omega \leq 4A[M_\zeta(r)+1]^2 \leq \text{const} \cdot \left(1 + \log \frac{1}{1-r}\right)^2. \quad (2.3)$$

Für  $0 < R < 1$  ist nach einer Identität von Hardy [16, S.126]

$$\|f_\zeta\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_\zeta(\operatorname{Re}^{i\theta})|^2 d\theta + \frac{2}{\pi} \int_R^1 \left( \iint_{|z|<r} |f'_\zeta(z)|^2 d\Omega \right) \frac{dr}{r}. \quad (2.4)$$

Speziell mit  $R = 1/2$  ergibt sich wegen  $f \in \mathcal{B}$  aus (2.3) und (1.1) also  $f \in \text{BMOA}$ .

Sei nun  $f \in \mathcal{B}_0$ . Nach (2.4) und (2.3) kann man  $R < 1$  so wählen, daß

$$\|f_\zeta\|_2^2 < M_\zeta(R)^2 + \varepsilon \quad (|\zeta| < 1)$$

ist. Für  $f \in \mathcal{B}_0$  gilt  $f_\zeta(z) \rightarrow 0$  ( $|\zeta| \rightarrow 1 - 0$ ) lokal gleichmäßig in  $z \in \mathbb{D}$ . Also ist  $M_\zeta(R) \rightarrow 0$  für  $|\zeta| \rightarrow 1 - 0$  und daher auch  $\|f_\zeta\|_2 \rightarrow 0$ . Nach (1.4) ist daher  $f \in \text{VMOA}$ .

**FOLGERUNG 1.** *Sei  $g(z) \neq 0$  schlicht in  $\mathbb{D}$  und für  $w \in g(\mathbb{D})$  sei  $d(w) = \operatorname{dist}(w, \partial g(\mathbb{D}))$ . Dann ist  $\log g \in \text{BMOA}$ , und weiter gilt*

$$\log g \in \text{VMOA} \Leftrightarrow \frac{d(w)}{|w|} \rightarrow 0 \quad (|w| \rightarrow 0, \infty). \quad (2.5)$$

Die erste Behauptung ist ein Ergebnis von Baernstein [4]; ein anderer Beweis wurde von Cima und Schober [7] gegeben. Die Relation (2.5) ist ein gemeinsames Ergebnis mit J. M. Anderson.

**Beweis.** Die Funktion  $f = \log g$  ist schlicht in  $\mathbb{D}$ . Aus dem Koebeschen Verzerrungssatz ergibt sich [16, S.22] für  $w = g(z)$

$$\frac{d(w)}{|w|} \leqq (1 - |z|^2) |f'(z)| = \frac{(1 - |z|^2) |g'(z)|}{|g(z)|} \leqq \frac{4d(w)}{|w|}.$$

Wegen  $g(z) \neq 0$  ist  $d(w) \leqq |w|$ , also  $\log g \in \mathcal{B}$  und daher  $\in \text{BMOA}$  nach Satz 1. Weiter strebt immer  $d(w) \rightarrow 0$ , wenn  $w$  sich einem endlichen Randpunkt nähert. Somit ist

$$(1 - |z|^2) |f'(z)| \rightarrow 0 \quad (|z| \rightarrow 1 - 0) \Leftrightarrow \frac{d(w)}{|w|} \rightarrow 0 \quad (|w| \rightarrow 0, \infty).$$

Nach (1.7) und Satz 1 gilt also (2.5).

### 3. Exponentiation von BMOA-Funktionen

Zuerst betrachten wir einen Operator in  $H^2$ .

LEMMA 1. Für  $f \in \text{BMOA}$ ,  $g \in H^2$  sei

$$h(z) = \int_0^z f'(s)g(s) \, ds \quad (z \in \mathbb{D}). \quad (3.1)$$

Mit einer absoluten Konstanten  $K$  gilt dann

$$\|h\|_2 \leq K \|f\|_* \|g\|_2. \quad (3.2)$$

Beweis. Nach der Identität von Hardy [16, S.126] und nach (1.1) ist

$$\|h\|_2^2 = \frac{2}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} |h'|^2 \log \frac{1}{|z|} \, d\Omega, \quad \|f_\zeta\|_2^2 = \frac{2}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} |f'|^2 \log \left| \frac{1 - \bar{\zeta}z}{z - \zeta} \right| \, d\Omega. \quad (3.3)$$

Hieraus kann man leicht folgern, daß (Fefferman und Stein [9])

$$\iint_{|z - \zeta| < 2(1 - |\zeta|)} |f'(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} \, d\Omega \leq K_1 \|f\|_*^2$$

gilt. Nach dem Satz von Carleson [6][8, S.157] und nach (3.3), (3.1) ist daher

$$\|h\|_2^2 = \frac{2}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} |g(z)|^2 |f'(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} \, d\Omega \leq K_2 \|f\|_*^2 \|g\|_2^2.$$

Der durch (3.1) definierte lineare Operator ist also beschränkt. Seine Norm ist  $\geq K_2 \|f\|_*$ , falls  $f(0) = 0$  ist; zum Beweise setze man  $g(z) = (1 - \bar{\zeta}z)^{-1}$  in (3.1) und benutze (3.3).

SATZ 2. Folgende Bedingungen sind äquivalent:

- (i) Es ist  $f \in \text{BMOA}$ .
- (ii) Es gibt  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $M$ , so daß  $e^{af}$  eine äußere Funktion in  $H^2$  ist und

$$\|e^{af}\|_2 \leq M \quad (|\zeta| < 1).$$

(iii) Es ist  $f \in \mathcal{B}$ , und es gibt  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $M$ , so daß  $u(z) = \operatorname{Re}[af(z)] (z \in \mathbb{D})$  sich als Poissonintegral seiner Randwerte darstellen läßt und

$$\frac{1}{1-|\zeta|} \int_{I(\zeta)} e^{u(z)} |dz| \leq M e^{u(\zeta)} \quad (\zeta \in \mathbb{D})$$

gilt, wobei  $I(\zeta) = \{z \in \partial\mathbb{D} : |\arg z - \arg \zeta| \leq \pi(1 - |\zeta|)\}$  ist.

Eine Funktion  $g \in H^p$  heißt äußere Funktion, wenn  $g(z) \neq 0$  und

$$\log |g(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-|z|^2}{|s-z|^2} \log |g(s)| |ds| \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Dies gilt insbesondere, wenn  $\log g \in H^1$  ist.

Die Aussage (i)  $\Rightarrow$  (ii) stammt von John und Nirenberg [12, S.415]; hieraus folgt u.a. (Cima und Schober [7])

$$f \in \mathbf{BMOA} \Rightarrow e^f \in H^p \quad \text{für ein } p > 0. \quad (3.4)$$

Unser Beweis wird zeigen, daß man in (ii) immer  $M = 2$  und jedes  $a \in \mathbb{C}$  mit  $|a| \leq 1/(2K \|f\|_*)$  wählen kann, wo  $K$  die Konstante aus Lemma 1 ist. Unter Benutzung der Zerlegung  $f(z) = f(rz) + (f(z) - f(rz))$  ( $1-r$  klein) folgt daraus nach (1.5)

$$f \in \mathbf{VMOA} \Rightarrow e^f \in H^p \quad \text{für jedes } p < \infty. \quad (3.5)$$

*Bemerkung.* Diese Relation kann man auch dann nicht umkehren, wenn  $|e^{f(z)}| > 1$  ist, wie das folgende (nur angedeutete) Beispiel zeigt. Die schlichte Funktion  $f$  bilde  $\mathbb{D}$  auf das Gebiet

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\{|w - 2^n| < n\} \cup \{2^n < \operatorname{Re} w < 2^{n+1}, |\operatorname{Im} w| < \delta_n\})$$

ab. Wenn  $\delta_n$  genügend schnell  $\rightarrow +0$  konvergiert, so kann man

$$\int_0^1 \exp(p \max_{|z|=r} |f(z)|) dr < \infty \quad \text{für jedes } p < \infty$$

zeigen, woraus man unter Benutzung von Standardmethoden für schlichte Funktionen [16, Abschn. 5.1]  $e^f \in H^p$  folgern kann. Da  $G$  beliebig große Kreisscheiben enthält, ist  $f \notin \mathcal{B}$ , also  $f \notin \text{BMOA}$ .

*Beweis von (i)  $\Rightarrow$  (ii).* Sei  $f \in \text{BMOA}$  und  $0 < |a| \leq 1/(2K \|f\|_*)$ . Für  $|\zeta| < 1$  setzen wir  $g(z) = \exp [af_\zeta(z)]$  und erhalten in (3.1)

$$ah(z) = a \int_0^z f'_\zeta(s) \exp [af_\zeta(s)] ds = \exp [af_\zeta(z)] - 1 = g(z) - 1.$$

Nach (3.2) ist also wegen  $\|f_\zeta\|_* \leq \|f\|_*$

$$\|g - 1\|_2 \leq |a| K \|f\|_* \|g\|_2 \leq \frac{1}{2} \|g\|_2$$

und daher  $\|\exp af_\zeta\|_2 = \|g\|_2 \leq 2$ .

*Beweis von (ii)  $\Rightarrow$  (iii).* Nach (1.2) ist  $\exp [af_\zeta(z)] = 1 + a(1 - |\zeta|^2)f'(\zeta)z + \dots$ , nach der Parsevalschen Formel also  $|a|^2(1 - |\zeta|^2)^2 |f'(\zeta)|^2 \leq \|\exp af_\zeta\|_2^2 \leq M^2$  für  $|\zeta| < 1$ . Somit ist  $f \in \mathcal{B}$ .

Mit der Substitution  $s = (z + \zeta)/(1 + \bar{\zeta}z)$  ergibt sich aus (ii)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} |e^{af(s)}|^2 \frac{1 - |\zeta|^2}{|1 - \bar{\zeta}s|^2} |ds| \leq M^2 |e^{af(\zeta)}|^2.$$

Für  $s \in I(\zeta)$  ist  $|1 - \bar{\zeta}s| = |s - \zeta| \leq (\pi + 1)(1 - |\zeta|)$ . Daher folgt (iii) mit  $2a$  statt  $a$  und mit  $(\pi + 1)^2 M^2$  statt  $M$ .

*Beweis von (iii)  $\Rightarrow$  (i).* Wir setzen  $\rho = |\zeta|$  und  $m = [\log 1/(1 - \rho)]$ . Sei  $\zeta_k$  ( $k = 0, \dots, m + 1$ ) definiert durch

$$\arg \zeta_k = \arg \zeta, \quad 1 - |\zeta_k| = e^k(1 - \rho) \quad (k = 0, \dots, m), \quad \zeta_{m+1} = 0$$

und sei  $I_k = I(\zeta_k)$ . Wegen  $f \in \mathcal{B}$  ist nach (1.6)

$$|u(\zeta_k) - u(\zeta)| \leq |a| \int_\zeta^{\zeta_k} |f'(z)| |dz| \leq M_1 \log \frac{1 - |\zeta_k|}{1 - \rho} \leq k e M_1; \quad (3.6)$$

die Konstanten  $M_1, \dots$  hängen nur von  $a$  und  $f$  ab. Für  $z \in I_{k-1}$  ist  $|z - \zeta| \geq M_2^{-1}(1 - |\zeta_{k-1}|) = M_2^{-1}e^{k-1}(1 - \rho)$ , also nach (3.6)

$$\int_{I_k \setminus I_{k-1}} (u(z) - u(\zeta))^+ \frac{1 - \rho^2}{|z - \zeta|^2} |dz| \leq \frac{M_3 e^{-2k}}{1 - \rho} \int_{I_k} [(u(z) - u(\zeta_k))^+ + k] |dz|.$$

Wegen  $l(I_k) = 2\pi(1 - |\zeta_k|) \leq 2\pi e^k (1 - \rho)$  ist dies nach der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel

$$\leq M_4 e^{-k} \log \left( \frac{1}{l(I_k)} \int_{I_k} e^{u(z) - u(\zeta_k)} |dz| \right) + M_4 k e^{-k} \leq M_5 (k + 1) e^{-k};$$

die letzte Ungleichung folgt aus (iii). Eine ähnliche Abschätzung erhält man für das Integral über  $I_0 = I(\zeta)$ . Wegen  $I_{m+1} = \partial\mathbb{D}$  folgt somit durch Addition der obigen Abschätzungen

$$\int_{\partial\mathbb{D}} |u(z) - u(\zeta)| \frac{1 - \rho^2}{|z - \zeta|^2} |dz| = 2 \int_{\partial\mathbb{D}} (u(z) - u(\zeta))^+ \frac{1 - \rho^2}{|z - \zeta|^2} |dz| \leq M_6;$$

die erste Identität ergibt sich aus der Poissonschen Integralformel.

Wenn  $u_\zeta$  den Mittelwert über  $I(\zeta)$  bezeichnet, so folgt

$$\frac{1}{l(I(\zeta))} \int_{I(\zeta)} |u(z) - u_\zeta| |dz| \leq \frac{2}{l(I(\zeta))} \int_{I(\zeta)} |u(z) - u(\zeta)| |dz| \leq M_7,$$

d.h. definitionsgemäß gehört  $u(\zeta)$  ( $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ ) zu  $\text{BMO}(\partial\mathbb{D})$ . Nach Voraussetzung kann  $\operatorname{Re}[af(z)] = u(z)$  ( $z \in \mathbb{D}$ ) als Poissonintegral von  $u(\zeta)$  ( $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ ) dargestellt werden. Da auch die konjugierte Funktion zu  $\text{BMO}(\partial\mathbb{D})$  gehört, gilt  $f \in \text{BMOA}$ .

#### 4. Die Ableitung schlichter Funktionen

Nun soll  $\text{BMOA}$  mittels der Ableitung schlichter Funktionen charakterisiert werden.

**SATZ 3.** *Genau dann ist  $f \in \text{BMOA}$ , wenn*

$$f(z) = b \log g'(z) \quad (z \in \mathbb{D}) \tag{4.1}$$

für eine Konstante  $b \in \mathbb{C}$  gilt, wobei  $g$  in  $\mathbb{D}$  schlicht und  $C = \partial g(\mathbb{D})$  eine rektifizierbare Jordankurve ist, die

$$l(C(w_1, w_2)) \leq \gamma |w_1 - w_2| \quad (w_1, w_2 \in C) \quad (4.2)$$

für eine Konstante  $\gamma$  erfüllt; hierbei ist  $C(w_1, w_2)$  der (kürzere) Bogen von  $C$  zwischen  $w_1$  und  $w_2$ .

Die Bedingung (4.2) für schlichte Funktionen wurde zuerst von Lavrent'ev [13, Th.8] untersucht. Er zeigte u.a., daß  $g(\mathbb{D})$  die Smirnov-Bedingung erfüllt, d.h. daß  $\log |g'|$  sich als Poissonintegral darstellen läßt; dieses Ergebnis werden wir beim Beweis benutzen. Aus Satz 3 ergibt sich eine Verschärfung der Ergebnisse von Lavrent'ev.

**FOLGERUNG 2.** *Die schlichte Funktion  $g$  erfülle die Bedingung (4.2). Dann ist  $\log g' \in H^1$  und es existieren  $M$  und  $\alpha > 0$ , so daß gilt*

$$\operatorname{mes} \{z \in \partial\mathbb{D} : |\log g'(z)| > \lambda\} < M e^{-\alpha\lambda} \quad (\lambda > 0). \quad (4.3)$$

Diese Abschätzung ergibt sich unmittelbar aus Satz 3 und der entsprechenden Abschätzung von John und Nirenberg [12][17, S.31] für BMO-Funktionen. Aus (4.3) oder (3.4) folgt u.a.

$$\int_{\partial\mathbb{D}} |g'(z)|^{-p} |dz| < \infty \quad \text{für ein } p > 0,$$

falls (4.2) gilt (Warschawski und Schober [21]).

Das entsprechende Resultat für Blochfunktionen ist bekannt. Genau dann ist  $f \in \mathcal{B}$ , wenn die Darstellung (4.1) gilt, wobei nun  $C$  aber nur die schwächere Bedingung

$$\operatorname{diam} C(w_1, w_2) \leq \beta |w_1 - w_2| \quad (w_1, w_2 \in C) \quad (4.4)$$

zu erfüllen braucht. Diese Bedingung ("beschränkte Schwenkung") ist gerade die geometrische Charakterisierung der quasikonformen Kurven von Ahlfors [1][16, Abschn. 9.4]. Es gibt nicht-rektifizierbare Kurven, die (4.4) erfüllen, sogar solche, die nirgends eine Tangente besitzen [16, S.304].

Wenn  $f \in \mathcal{B}$  und  $|b| > \|f\|_{\mathcal{B}}$  ist, so ist mit (4.1)

$$\sup_{|z| < 1} (1 - |z|^2) \left| \frac{g''(z)}{g'(z)} \right| = \frac{1}{|b|} \sup_{|z| < 1} (1 - |z|^2) |f'(z)| < 1.$$

Nach einem Satz von Ahlfors und Weill [2] und von Becker [5] ist daher  $g$  schlicht und  $C$  erfüllt (4.4). Die Umkehrung folgt allein aus der Schlichtheit [15].

Der Beweis von Satz 3 beruht auf dem folgenden Hilfssatz. Für  $|\zeta| < 1$  sei wieder  $I(\zeta) = \{z \in \partial\mathbb{D} : |\arg z - \arg \zeta| \leq \pi(1 - |\zeta|)\}$ .

**LEMMA 2.** *Sei  $g$  schlicht in  $\mathbb{D}$  und  $C = \partial g(\mathbb{D})$  eine rektifizierbare Jordankurve. Wenn (4.4) und*

$$\int_{I(\zeta)} |g'(z)| |dz| \leq \alpha(1 - |\zeta|^2) |g'(\zeta)| \quad (\zeta \in \mathbb{D}) \quad (4.5)$$

*gelten, so gilt (4.2) für ein  $\gamma$ . Wenn umgekehrt (4.2) erfüllt ist, so gilt (4.5) für eine Konstante  $\alpha$ .*

**Beweis.** (a) Sei  $w_j = g(z_j)$ ,  $z_j \in \partial\mathbb{D}$  ( $j = 1, 2$ ). Wir wählen  $\zeta \in \mathbb{D}$  so, daß  $z_1$  und  $z_2$  die Endpunkte von  $I(\zeta)$  sind. Aus (4.5) erhalten wir dann

$$l(C(w_1, w_2)) \leq \int_{I(\zeta)} |g'(z)| |dz| \leq \alpha(1 - |\zeta|^2) |g'(\zeta)|. \quad (4.6)$$

Wenn  $A(\zeta)$  die nichteuklidische Strecke zwischen  $\zeta$  und  $z_1$  bezeichnet, so folgt nach einem Analogon [14, S.136] des Satzes von Gehring und Hayman [11] aus (4.4)

$$\text{diam } g(A(\zeta)) \leq K_1 \text{diam } C(w_1, w_2) \leq K_1 \beta |w_1 - w_2|,$$

wo  $K_1$  eine absolute Konstante ist. Daher ist

$$(1 - |\zeta|^2) |g'(\zeta)| \leq 4 \text{dist}(g(\zeta), C) \leq 4K_1\beta |w_1 - w_2|.$$

Somit ergibt sich (4.2) (mit  $\gamma = 4K_1\alpha\beta$ ) aus (4.6).

(b) Umgekehrt gelte (4.2). Seien  $I_j$  ( $j = 1, 2$ ) die an  $I(\zeta)$  anschließenden Teilbogen von  $\partial\mathbb{D}$  der Länge  $1 - |\zeta|$ . Dann existieren [16, S.314] Jordanbögen  $A_j$ , die  $\zeta$  mit einem Punkt  $z_j \in I_j$  verbinden, so daß

$$|g(\zeta) - g(z_j)| \leq l(g(A_j)) \leq K_2(1 - |\zeta|^2) |g'(\zeta)| \quad (j = 1, 2)$$

ist. Aus (4.2) mit  $w_j = f(z_j)$  folgt daher

$$l(C(w_1, w_2)) \leq \gamma |w_1 - w_2| \leq 2K_2\gamma(1 - |\zeta|^2) |g'(\zeta)|. \quad (4.7)$$

Aus  $(1 - |\zeta|^2) |g'(\zeta)| \rightarrow 0$  ( $|\zeta| \rightarrow 1 - 0$ ) kann man leicht die Existenz eines  $\rho < 1$  folgern, so daß  $g(I(\zeta)) \subset C(w_1, w_2)$  für  $|\zeta| > \rho$  ist. Also folgt (4.5) für  $|\zeta| > \rho$  aus (4.7). Für  $|\zeta| \leq \rho$  ist (4.5) trivial.

*Beweis von Satz 3.* (a) Sei  $f \in \text{BMOA}$ . Wir wählen  $b \in \mathbb{C}$  mit  $|b| \geq 2K \|f\|_*$ , wo  $K \geq 1$  die Konstante aus Lemma 1 ist. Wegen  $|b| > \|f\|_*$  ist dann die durch (4.1) definierte Funktion  $g$  schlicht und erfüllt die Bedingung (4.4). Nach Satz 2 (iii) (mit  $a = 1/b$ ) gilt (4.5). Aus Lemma 2 erhalten wir also die Gültigkeit von (4.2).

(b) Umgekehrt seien (4.1) und (4.2) erfüllt. Aus der Schlichtheit von  $g$  folgt  $f \in \mathcal{B}$ . Weiter gilt (4.5) nach Lemma 2. Nach dem Ergebnis von Lavrent'ev ist also die Bedingung (iii) von Satz 2 (mit  $a = 1/b$ ) erfüllt und es folgt  $f \in \text{BMOA}$ .

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] AHLFORS, L. V., *Quasiconformal reflections*, Acta Math. 109 (1963), 291–301.
- [2] AHLFORS, L. V. und WEILL, G., *A uniqueness theorem for Beltrami equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 975–978.
- [3] ANDERSON, J. M., CLUNIE, J. und POMMERENKE, Ch., *On Bloch functions and normal functions*, J. Reine Angew. Math. 270 (1974), 12–37.
- [4] BAERNSTEIN, A. II, *Univalent functions and the class BMO*, to appear in Michigan Math. J.
- [5] BECKER, J., *Löwner'sche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen*, J. Reine Angew. Math. 255 (1972), 23–43.
- [6] CARLESON, L., *Interpolations by bounded analytic functions and the Corona problem*, Ann. of Math. 76 (1962), 547–559.
- [7] CIMA, J. A. und SCHOBER, G., *Analytic functions with bounded mean oscillation and logarithms of  $H^p$ -functions*, Math. Z. 151 (1976), 295–300.
- [8] DUREN, P. L., *Theory of  $H^p$  spaces*, Academic Press, New York 1970.
- [9] FEFFERMAN, C. und STEIN, E. M.,  *$H^p$  spaces of several variables*, Acta Math. 129 (1972), 137–193.
- [10] GAIER, D., *Integralgleichungen erster Art und konforme Abbildung*, Math. Z. 147 (1976), 113–129.
- [11] GEHRING, F. W. und HAYMAN, W. K., *An inequality in the theory of conformal mapping*, J. Math. Pures Appl. (9) 41 (1962), 353–361.
- [12] JOHN, F. und NIRENBERG, L., *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 415–426.
- [13] LAVRENT'EV, M., *Boundary problems in the theory of univalent functions* (Russian); Mat. Sb. (N.S.) 1 (1936), 815–844; Amer. Math. Soc. Translations Ser. 2, 32, 1–35.
- [14] POMMERENKE, Ch., *Linear-invariante Familien analytischer Funktionen*, I. Math. Ann. 155 (1964), 108–154.
- [15] POMMERENKE, Ch., *On Bloch functions*, J. London Math. Soc. (2) 2 (1970), 689–695.
- [16] POMMERENKE, Ch., *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1975.
- [17] REIMANN, H. M. und RYCHENER, T., *Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation*, Lecture Notes Math. Bd. 487, Springer-Verlag 1975.
- [18] SARASON, D., *Functions of vanishing mean oscillation*, Trans. Amer. Math. Soc. 207 (1975), 391–405.

- [19] WARSCHAWSKI, S. E., *On the differentiability at the boundary in conformal mapping*, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 614–620.
- [20] WARSCHAWSKI, S. E., *On Hölder continuity at the boundary in conformal maps*, J. Math. Mech. 18 (1968/69), 423–427.
- [21] WARSCHAWSKI, S. E. und SCHOBER, G. E., *On conformal mapping of certain classes of Jordan domains*, Arch. Rational Mech. Anal. 22 (1966), 201–209.

Technische Universität Berlin  
Fachbereich Mathematik  
D-1000 Berlin 12

Eingegangen den 14. März 1977