Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 52 (1977)

Artikel: Ein einfacher Beweis eines Satzes von P. Fatou.

Autor: Meier, Kurt

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40016

Comment. Math. Helvetici **52** (1977) 535–537 Birkhäuser Verlag, Basel

Ein einfacher Beweis eines Satzes von P. Fatou

Kurt Meier

Ist G ein Gebiet der komplexen Ebene, welches von einer rektifizierbaren Jordankurve berandet wird, und f eine in G holomorphe und beschränkte Funktion, so besitzt f in fast allen Randpunkten von G einen Winkelgrenzwert.

Dies ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von *P. Fatou.* Der Originalbeweis beschränkt sich auf den Fall, dass das Gebiet G eine Kreisscheibe ist.

Die Uebertragung des Satzes von einer Kreisscheibe auf ein allgemeines Jordangebiet mit rektifizierbarem Rand erfordert Hilfsmittel, deren Beweis mit verhältnismässig grossem Aufwand verbunden ist. Zum Beispiel den Riemannschen Abbildungssatz und die folgenden Eigenschaften der Abbildungsfunktion:

Sind G_1 und G_2 Jordangebiete, $\bar{G}_1$ und $\bar{G}_2$ ihre Abschliessungen, und vermittelt die Funktion φ eine konforme Abbildung von G_1 auf G_2, so gibt es eine Fortsetzung $\bar{\varphi}$ von φ, welche $\bar{G}_1$ topologisch auf $\bar{G}_2$ abbildet.

Besitzen die Jordangebiete G_1 und G_2 rektifizierbare Ränder, so führt $\bar{\varphi}$ jede Punktmenge vom Mass 0 auf dem Rand von G_1 in eine Punktmenge vom Mass 0 auf dem Rand von G_2 über.

S. Lojasiewicz hat gezeigt, wie man den verallgemeinerten Satz von Fatou ohne Verwendung solcher Hilfsmittel beweisen kann.[(1)]

Sowohl der klassische Beweis, der uns aus den Lehrbüchern bekannt ist[(2)], wie auch der Beweis von *Lojasiewicz* stützen sich auf den folgenden *Satz von Lebesgue*: Ist u eine reellwertige Funktion der reellen Variablen x, und ist für alle x_1, x_2 aus einem Intervall (a, b) die Bedingung $|u(x_2)-u(x_1)| \leq M\,|x_2-x_1|$ erfüllt, so besitzt u fast überall in (a, b) eine Ableitung.

Auch im folgenden Beweis bildet dieser Satz einen wichtigen Bestandteil. Weitere Hilfsmittel sind das Maximumprinzip und die folgenden einfachen Aussagen über eine in G holomorphe Funktion f:

Ist G einfach zusammenhängend, so gibt es eine in G holomorphe Funktion F, welche für alle z aus G die Eigenschaft $F'(z)=f(z)$ besitzt.

---

[1]Vgl. [1], S. 241–244.

[2]Vgl. [2], S. 43–46.

Ist z_0 ein Punkt von G, so ist die durch $\phi(z)=[f(z)-f(z_0)]/(z-z_0)$ für $z\neq z_0$ und $\phi(z_0)=f'(z_0)$ definierte Funktion in G holomorph.

Wir beschränken uns darauf, die folgende einfache Form des *Satzes von Fatou* zu beweisen:

Ist G die Halbebene $\{z=x+iy/y>0\}$, J ein endliches Intervall der reellen Achse und f eine in G holomorphe und beschränkte Funktion, so hat f in fast jedem Punkt von J einen Winkelgrenzwert.

Diese Beschränkung ist gerechtfertigt, denn der eingangs formulierte verallgemeinerte Satz von *Fatou* lässt sich ohne Schwierigkeiten auf dem gleichen Weg beweisen. Bei der Uebertragung des Beweises ist zu beachten, dass die rektifizierbare Randkurve von G aufgrund des oben erwähnten Satzes von Lebesgue in fast jedem ihrer Punkte eine Tangente besitzt.

Beweis

a) Es sei F eine Funktion, welche in G die Eigenschaft $F'(z)=f(z)$ besitzt. Da f in G beschränkt ist, gibt es eine Schranke M derart, dass für alle z', z'' aus G die Bedingung

$$|F(z'')-F(z')|\leq M\,|z''-z'| \tag{1}$$

erfüllt ist. Daraus folgt für jeden Punkt ζ von J, dass die Funktion F für $z\rightarrow\zeta$, $z\in G$ gegen einen Grenzwert strebt. Definieren wir $F(\zeta)$ durch diesen Grenzwert, so wird F zu einer auf $G\cup J$ stetigen Funktion. Auch die Randfunktion $F^*=F/J$ erfüllt jetzt die Bedingung (1) und besitzt daher aufgrund des Satzes von Lebesgue in fast allen Punkten von J eine Ableitung.

Bis zu dieser Stelle folgte der Beweis dem üblichen Weg.

Es sei nun ζ_0 ein Punkt von J, in welchem die Ableitung der Randfunktion F^* existiert, R_0 eine positive Zahl mit der Eigenschaft $[\zeta_0-R_0,\ \zeta_0+R_0]\subset J$, D_0 die offene Halbkreisfläche $|z|<R_0$, $z\in G$, $\bar{D}_0$ ihre abgeschlossene Hülle und $\dot{D}_0$ ihr Rand. Setzen wir $a_0=F(\zeta_0)$ und $b_0=F^{*\prime}(\zeta_0)$, so ist die Funktion $G(z)=F(\zeta_0+z)-a_0-b_0z$ in D_0 holomorph und auf $\bar{D}_0$ stetig. Sie erfüllt ferner die Bedingungen $G(0)=0$ und $G(z)/z\rightarrow 0$ für $z\rightarrow 0$, $z\in J$. Folglich ist $H(z)=G(z)/z$ eine Punktes $z=0$ auf $\bar{D}_0$ stetig ist und für $z\rightarrow 0$, $z\in\dot{D}_0$ gegen 0 strebt. Ergänzen wir die Definition von H durch $H(0)=0$, so ist jetzt H auf $\dot{D}_0$ stetig.

b) Ist ε eine vorgegebene positive Zahl, so gibt es eine Zahl δ, $0<\delta<R_0$ derart, dass für $z\in\bar{D}_0$, $|z|<\delta$ die Ungleichung $|H(z)|<\varepsilon$ gilt. Wählen wir nun eine hinreichend grosse natürliche Zahl N, so wird $|H(z)/(i+Nz)|<\varepsilon$ für $z\in\dot{D}_0$, $|z|\geq\delta$. Unter der Bedingung $z\in\dot{D}_0$, $|z|<\delta$ ist wegen $|H(z)|<\varepsilon$ und $|i+Nz|\geq 1$

ebenfalls $|H(z)/(i+Nz)|<\varepsilon$. Die Funktion $J(z)=H(z)/(i+Nz)$ besitzt somit auf $\dot{D}_0$ die Eigenschaft $|J(z)|<\varepsilon$.

Es sei nun z_0 ein Punkt von $\bar{D}_0$ und η_0 eine positive Zahl, für welche $|G(z_0)/z_0-G(z_0)/(z_0+i\eta_0)|<\varepsilon|i+Nz_0|$ ist. Setzen wir $J_0(z)=G(z)/[(z_0+i\eta_0)(i+Nz)]$, so gilt $|J(z_0)-J_0(z_0)|<\varepsilon$.

Die Funktion J_0 erfüllt für $z\in\dot{D}_0$, $z\neq 0$ wegen $|z+i\eta_0|>|z|$ die Bedingung $|J_0(z)|<|J(z)|$. Berücksichtigen wir, dass $J_0(0)=J(0)=0$ ist, so steht damit die Ungleichung $|J_0(z)|\leq|J(z)|$ für alle Punkte z von $\dot{D}_0$ fest. Da die Funktion J_0 in D_0 holomorph und auf $\bar{D}_0$ stetig ist, schliessen wir nach dem Maximumprinzip $|J_0(z_0)|\leq\varepsilon$. Wegen $|J(z_0)-J_0(z_0)|<\varepsilon$ folgt daraus $|J(z_0)|<2\varepsilon$, also $|H(z_0)|<2\varepsilon|i+Nz_0|$. Diese Ungleichung ist für alle Punkte z_0 von $\bar{D}_0$ erfüllt. Daraus folgt

$$H(z)\to 0 \quad \text{für} \quad z\to 0, \qquad z\in\bar{D}_0. \tag{2}$$

Nun sei $z^*=x^*+iy^*$, $x^*\in J$, ein Punkt von G und K^* die offene Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt z^* und dem Radius y^*. Die durch $H^*(z)=[G(z)-G(z^*)]/(z-z^*)$ für $z\neq z^*$ und $H^*(z^*)=G'(z^*)$ definierte Funktion H^* ist in K^* holomorph und auf $\bar{K}^*$ stetig. Nach dem Maximumprinzip gibt es daher auf der Kreislinie $\dot{K}^*$ einen Punkt ζ^* derart, dass $|G'(z^*)|\leq|G(\zeta^*)-G(z^*)|/y^*$ ist. Wegen $G(z)=zH(z)$, $|z^*|\leq|x^*|+y^*$ und $|\zeta^*|\leq|z^*|+y^*\leq|x^*|+2y^*$ folgt daraus $|G'(z^*)|\leq|\zeta^*H(\zeta^*)|/y^*+|z^*H(z^*)|y^*\leq|x^*|\{|H(\zeta^*)|+|H(z^*)|\}/y^*+2|H(\zeta^*)|+|H(z^*)|$ und mit Hilfe dieser Abschätzung lässt sich jetzt der Beweis folgendermassen vollenden:

Ist α eine Zahl des Intervalls $(0,\pi/2)$ und W_α der Winkelraum $\{z\mid\alpha<\arg z<\pi-\alpha\}$, so gilt $|x^*|/y^*<\operatorname{ctg}\alpha$ für $z^*\in W_\alpha$. Beim Grezübergang $z^*\to 0$, $z^*\in W_\alpha$ bleibt somit $|x^*|/y^*$ beschränkt. Da mit z^* auch ζ^* gegen 0 strebt, folgt jetzt aufgrund von (2) aus der obigen Abschätzung $G'(z^*)\to 0$ für $z^*\to 0$, $z^*\in W_\alpha$. Wegen $G(z)=F(\zeta_0+z)-a_0-b_0z$, $G'(z)=F'(\zeta_0+z)-b_0=f(\zeta_0+z)-b_0$ steht damit fest, dass die Funktion f im Punkt ζ_0 den Winkelgrenzwert b_0 besitzt.

Demnach hat die Funktion f einen Winkelgrenzwert in jedem Punkt von J, in welchem die Ableitung $F^{*\prime}$ existiert. Dies trifft aber für fast alle Punkte von J zu.

LITERATUR

[1] Lojasiewicz, S. Une démonstration du théorème de Fatou, Ann. Soc. Polon. Math. *22* (1950).
[2] Priwalow, I. Randeigenschaften analytischer Funktionen. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1956.

E.T.H. 8006 Zürich

Eingegangen den 5. Januar 1977