

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 52 (1977)

Artikel: Un théorème de Hurewicz homologique.
Autor: Vogel, Pierre
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-40006>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 20.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Un théorème de Hurewicz homologique

PIERRE VOGEL

§1. Introduction

Les outils essentiels de la chirurgie sont le théorème de Hurewicz, la classification des immersions et le théorème de plongement de Whitney. Si l'on veut cependant obtenir, par chirurgie, des équivalences d'homologie, ces moyens sont parfois insuffisants. Ainsi, dans [4], si $f: V \rightarrow X$ est une application normale de degré 1 d'une variété V dans un espace X à dualité de Poincaré homologique, on peut déterminer l'obstruction $\sigma(f)$ pour trouver une équivalence d'homologie normalement cobortante à f , mais la méthode utilisée ne marche que si X est à squelettes finis, du moins jusqu'en dimension moitié.

On se propose ici de montrer une généralisation du théorème de Hurewicz permettant de faire la chirurgie homologique dans des conditions plus larges. En fait, on montre que, sous certaines conditions, tout élément du premier groupe d'homologie non nul $H_n(X, A)$ d'une paire d'espaces non nécessairement simplement connexes est obtenu par une application $f: (W, V) \rightarrow (X, A)$, où (W, V) est une paire de variétés différentiables stablement parallélisées homologiquement équivalente à (B^n, S^{n-1}) .

Plus précisément, on a ce résultat (Théorème 1.2) pour $n \geq 6$ (pour $n \leq 5$, W n'est plus nécessairement une variété) et si $\pi_1(X)$ et $\pi_1(A)$ sont localement Λ -parfaits au sens suivant:

DEFINITION 1.1. Soient Λ un anneau et G un groupe. On dira que G est localement Λ -parfait si tout élément de G est contenu dans un sous-groupe G' de G de type fini Λ -parfait (i.e. tel que $H_1(G', \Lambda) = 0$) ou, ce qui est équivalent, si tout sous-groupe de type fini de G est contenu dans un sous-groupe de G de type fini Λ -parfait.

THEOREME 1.2. Soient (X, A) une paire d'espaces topologiques connexes, Λ un sous-anneau unitaire de \mathbf{Q} et n un entier ≥ 2 , tels que tous les groupes

Ce travail de recherche a été subventionné en partie par le programme de Recherche Topologie S.E.G.E.R.P. 59 de l'Université de Nantes.

$H_i(X, A; \Lambda)$ soient nuls pour $i < n$ et tels que $\pi_1(X)$ (resp. $\pi_1(X)$ et $\pi_1(A)$ si $n \geq 3$) soit localement Λ -parfait.

Alors, pour tout $x \in H_n(X, A; \Lambda)$ il existe un CW-complexe fini W Λ -acyclique de dimension n , un sous-complexe V de W de dimension $n-1$ ayant le type de Λ -homologie de S^{n-1} , et une application continue $f: (W, V) \rightarrow (X, A)$, telle que x soit l'image par f_* d'un générateur de $H_n(W, V; \Lambda)$, et où l'on a de plus:

a) W est une variété différentiable stablement parallélisée de bord V dans les cas suivants:

- i) $n \geq 6$
- ii) $n = 2$, l'image de l'application: $\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(X)$ est Λ -parfaite et l'application $H_2(\pi_1(A); \Lambda) \rightarrow H_2(\pi_1(X); \Lambda)$ est surjective
- iii) $n = 3$ et x donne zéro par l'application composée:

$$H_3(X, A; \Lambda) \rightarrow H_2(A; \Lambda) \rightarrow H_2(\pi_1(A); \Lambda)$$

b) si $n = 4$, W est l'union d'une variété différentiable de dimension 4 stablement parallélisée de bord V et de cellules de dimension 3

c) si $n = 5$, V est l'union d'une variété différentiable de dimension 4 stablement parallélisée et de cellules de dimension 3; et il existe un plongement de (W, V) dans une paire (W', V') de variétés différentiables parallélisées avec:

$$V' \subset \partial W' \quad \dim W' = 8 \quad \dim V' = 7.$$

Remarque 1.3. Si $n = 4$ ou 5, la paire (W, V) n'est a priori pas une paire de variétés, mais il est possible que l'on puisse toujours choisir (W, V) comme paire de variétés différentiables stablement parallélisées dans ce cas. Ceci est une question ouverte qui se ramène au cas $n = 4$. On peut en effet facilement montrer que si cette question avait une réponse affirmative dans le cas $n = 4$, il en serait de même dans le cas $n = 5$.

Du Théorème 1.2, on peut tirer un certain nombre de conséquences.

Par exemple, comme il est dit plus haut, on peut effectuer des chirurgies sur une application normale d'une variété dans un complexe non nécessairement fini. Plus précisément, on a:

THEOREME 1.4. Soient Λ un sous-anneau unitaire de \mathbf{Q} , n un entier ≥ 5 , X un espace topologique, N un sous-groupe normal de $\pi_1(X)$ localement Λ -parfait et $w: \pi_1(X)/N \rightarrow \pm 1$ une classe de Stiefel-Whitney sur X . Supposons que X possède

une dualité en $\Lambda[\pi_1(X)/N]$ -homologie définie par un élément $[X] \in H_n^w(X; \Lambda)$ et que $\pi_1(X)/N$ est de présentation finie.

Soient, d'autre part, V une variété différentiable, PL ou Top de dimension n , ξ un (micro-) fibré (stable) sur X et f une application fibrée du fibré normal de V dans ξ de degré 1.

Alors f est normalement cobordante à une équivalence en $\Lambda[\pi_1(X)/N]$ -homologie si et seulement si deux invariants, $\sigma_0(X) \in \tilde{K}_0(\Lambda[\pi_n(X)/N])$ et $\sigma_1(f)$, défini lorsque $\sigma_0(X) = 0$ dans $L_n^h(\Lambda[\pi_1(X)/N], w)$, s'annulent.

Dans une autre direction on montre également le théorème suivant:

THEOREME 1.5. Soit K un complexe fini acyclique de dimension k et n un entier $\geq 2k + 2$. Soit $C_n(K)$ le groupe de Hausmann [5] des sphères d'homologie PL orientées contenant K et ayant même groupe fondamental que K . Alors l'application canonique de $C_n(K)$ dans $\pi_n(B\pi_1(K)^+)$ est un isomorphisme.

D'autres conséquences du Théorème 1.2 ont été démontrées dans [7]. En fait la technique de chirurgie homologique utilisée ii) généralise celle de [6] et les résultats de [6] peuvent être déduits du Théorème 1.2.

Le Théorème 1.2 sera montré au §3 en considérant dans l'ordre les cas ii), $n = 2$, iii), $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, et par récurrence le cas $n \geq 6$. On aura besoin pour cela de certains résultats de chirurgie démontrés au §2.

Les Théorèmes 1.4 et 1.5 sont démontrés au §4 et le §5 est consacré à une étude des groupes localement Λ -parfaits.

§2. Chirurgie homologique

Soit Λ un sous-anneau unitaire de \mathbf{Q} . On appellera Λ -anse d'indice k et de dimension n toute paire (H, h) de variétés différentiables compactes stablement parallélisées telles que:

- $h \subset \partial H$
- $\dim H = n \quad \dim h = n - 1$
- $\tilde{H}_*(H; \Lambda) = 0$
- $H_*(h; \Lambda) \approx H_*(S^{k-1}; \Lambda)$
- h se collapse sur un complexe de dimension $k - 1$.

Par exemple si V est une variété différentiable compacte stablement parallélisée de dimension n et Λ -acyclique, $(V \times B^p, \partial V \times B^p)$ est une Λ -anse d'indice n et de dimension $n + p$.

THEOREME 2.1. Soient $f: M \rightarrow X$ une application continue d'une variété différentiable, PL ou Top de dimension m dans un espace topologique, n un entier ≥ 2 , $\alpha: \pi_1(X) \rightarrow G$ un épimorphisme de groupe tel que $\text{Ker } \alpha$ soit localement Λ -parfait, ainsi que $\text{Ker } (\pi_1 M \rightarrow G)$ si $n \geq 3$. On suppose que $H_i(X, M; \Lambda[G])$ est nul pour tout $i < n$.

Soient d'autre part un fibré vectoriel, PL ou Top ξ sur X tel que $w(\xi)$ soit trivial sur $\text{Ker } \alpha$ et une application fibrée φ du fibré normal stable de M dans ξ qui revêt f .

Alors on a les deux propriétés suivantes:

a) si $m = 2(n - 1)$, le $\Lambda[G]$ -module $H_n(X, M; \Lambda[G])$ est muni d'une forme quadratique q à valeur dans $\Lambda[G]/\{t + (-1)^n \bar{t}\}$ associée à la forme bilinéaire à valeur dans $\Lambda[G]$ déduite, via le bord: $H_n(X, M; \Lambda[G]) \rightarrow H_{n-1}(M; \Lambda[G])$, de la forme intersection sur $H_{n-1}(M; \Lambda[G])$

b) soit $x \in H_n(X, M; \Lambda[G])$. Alors, dans les cas $m > 2(n - 1)$ ou $m = 2(n - 1) \geq 6$ et $q(x) = 0$ il existe une Λ -anse (H, h) d'indice n et de dimension $m + 1$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 h & \hookrightarrow & H \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M & \xrightarrow{f} & X
 \end{array} \tag{1}$$

revêtu par un diagramme fibré:

$$\begin{array}{ccc}
 \nu_h & \longrightarrow & \nu_H \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \nu_M & \xrightarrow{\varphi} & \xi
 \end{array}$$

tel que l'application $h \rightarrow M$ soit un plongement, que l'application $\nu_h \rightarrow \nu_M$ soit l'application fibrée induite par ce plongement, que $\pi_1(H)$ s'annule dans G et que (1) induise $\lambda x \in H_n(X, M; \Lambda[G])$, λ étant une unité de Λ .

Le Théorème 2.1 est l'outil essentiel de la chirurgie homologique utilisée dans cet article. La démonstration est enchevêtrée avec la démonstration du Théorème 1.2. On procèdera donc avec précaution.

2.2. Démonstration de 2.1 a)

Cette démonstration est directe et n'utilise pas 1.2.

Soit B l'espace BO , BPL ou $B\text{Top}$ suivant les cas. Le fibré ξ induit une application $g: X \rightarrow B$. Soit $X \xrightarrow{g'} B' \rightarrow B$ un scindage de cette application, B'

étant un espace dont le groupe fondamental est G et tel que g' induise α sur les π_1 . On peut par exemple construire B' en ajoutant des cellules de dimension 2 à X .

Soient X' et M' les fibres homotopiques de $g': X \rightarrow B'$ et de $g' \circ f: M \rightarrow B'$. On vérifie les formules suivantes:

$$H_i(X, M; \Lambda[G]) = H_i(X', M'; \Lambda) = \pi_i^S(X', M') \otimes \Lambda \quad \text{pour tout } i \leq n.$$

Si x' est un élément de $\pi_n^S(X', M')$ représenté par un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \partial W & \hookrightarrow & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ M' & \longrightarrow & X' \end{array}$$

où W est une variété différentiable compacte stablement parallélisée de dimension n , l'application $\partial W \rightarrow M'$ induit une application $\partial W \rightarrow M$ dont la composée $\partial W \rightarrow B$ est canoniquement homotope à zéro. Cette application $\partial W \rightarrow M$ est donc revêtue par une application fibrée et définit une classe d'homotopie régulière d'immersion dont le nombre de points doubles évalué dans $\mathbf{Z}[\pi_1(B')]/\{t + (-1)^n \bar{t}\}$ sera noté $q'(x')$. L'application q' ainsi construite est une forme quadratique associée à la forme intersection sur $\pi_{n-1}^S(M)$ et induit, après tensorisation par Λ , la forme quadratique cherchée.

On vérifie aisément que cette forme quadratique est indépendante du choix de B' .

2.3. Démonstration de 2.1 b)

Pour démontrer 2.1 b) pour un n donné, on utilisera le Théorème 1.2 pour ce même n . Cela ne créera pas de problème logique puisque au §3, pour démontrer le Théorème 1.2 pour un n donné, on n'utilisera 2.1 que pour des n strictement inférieurs.

Procédons comme plus haut, en construisant B' de la façon suivante:

Soient \tilde{X} (resp. \tilde{B}) le revêtement de X (resp. B) de groupe fondamental $\text{Ker } \alpha$ (resp. 0), \tilde{X}_Λ (resp. \tilde{B}_Λ) le Λ -localisé au sens de [3] de \tilde{X} (resp. \tilde{B}) et X_Λ (resp. B_Λ) le quotient de \tilde{X}_Λ (resp. \tilde{B}_Λ) par l'action rendue libre de G (resp. $\mathbf{Z}/2$). Comme toutes ces constructions sont fonctorielles on obtient le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_\Lambda & \xrightarrow{g_\Lambda} & B_\Lambda \end{array}$$

Soit alors B' le produit fibré homotopique de B et de X_Λ au dessus de B_Λ . L'application g se factorise à travers B' et $\pi_1(B')$ est égal à G .

On construit, comme plus haut, les espaces M' et X' , et l'on vérifie que X' est Λ -acyclique, que $\pi_1(X')$ est une extension centrale de $\text{Ker } \alpha$ et que $\pi_1(M')$ est une extension centrale de $\text{Ker } (\pi_1(M) \rightarrow G)$.

On en déduit (5.5) que $\pi_1(X')$ (resp. $\pi_1(M')$ si $n \geq 3$) est localement Λ -parfait. La paire (X', M') vérifie donc les hypothèses du Théorème 1.2. Il existe alors une paire (W, V) de CW-complexes finis et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V & \hookrightarrow & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ M' & \longrightarrow & X' \end{array} \quad (2)$$

induisant $\lambda x \in H_n(X', M'; \Lambda) \simeq \dot{H}_n(X, M; \Lambda[G])$, λ étant une unité de Λ .

1) *Le cas $m > 2(n-1)$*

Comme W est un complexe fini de dimension $n \leq (m+1)/2$, on peut épaissir la paire (W, V) en une Λ -anse (H, h) de dimension $m+1$ et d'indice n .

Le diagramme (2) induit alors un diagramme:

$$\begin{array}{ccc} h & \hookrightarrow & H \\ \downarrow & & \downarrow \\ M' & \longrightarrow & X' \end{array} \quad (2')$$

revêtu par des applications fibrées. L'application $h \rightarrow M'$ définit alors une classe d'homotopie régulière d'immersion qui contient un plongement car h se collapse en V de dimension strictement inférieure à $n/2$. On en déduit alors 2.1 b).

2) *Le cas $m = 2(n-1) \geq 6$*

Dans ce cas, n est supérieur ou égal à 4 et V est une variété différentiable stablement parallélisée pour $n \neq 5$. Si n est égal à 5, V est l'union d'une variété différentiable stablement parallélisée V' et de cellule de dimension 3. Lorsque n est différent de 5 on posera $V' = V$.

Comme plus haut l'application de V dans M' induit par restriction une classe d'homotopie régulière d'immersion de V' dans M dont le nombre de point double est un élément a du groupe

$$\Gamma = \mathbf{Z}[\pi_1(V') \setminus \pi_1(M)/\pi_1(V')]/\{t + (-1)^n \bar{t}\}$$

qui donne $q(\lambda x) = 0$ dans $\Lambda[G]/\{t + (-1)^n \bar{t}\}$.

Comme la torsion de Γ n'a que des éléments d'ordre 2, on peut, quitte à remplacer W par la somme connexe de W et de W sur le "bord" de façon à ce que le diagramme (2) induise $2\lambda x$ si $\frac{1}{2}$ appartient à Λ , supposer que a donne zéro dans le groupe $\mathbf{Z}[G]/\{t+(-1)^n \bar{t}\}$, et par conséquent dans un groupe $\mathbf{Z}[G'\backslash\pi_1(M)/G']/\{t+(-1)^n \bar{t}\}$ où G' est un sous-groupe de $\text{Ker}(\pi_n(M) \rightarrow G)$ de type fini contenant l'image de $\pi_1(V')$.

Soit G'' un sous-groupe de $\pi_1(M')$ de type fini qui se surjecte sur G' . Comme $\pi_1(M')$ est localement Λ -parfait, quitte à augmenter G'' , on peut supposer que G'' est Λ -parfait.

Soient x_1, \dots, x_p des générateurs de G'' . Comme G'' est Λ -parfait, il existe un entier λ inversible dans Λ tel que x_i^λ s'exprime en produits de commutateurs c_i en les x . Soit alors G''' le groupe de présentation $\{x_i \mid x_i^\lambda = c_i\}$. Le groupe G''' est le groupe fondamental d'un complexe fini Λ -acyclique K de dimension 2 et se surjecte sur G'' .

Après épaississement de K , on obtient une variété différentiable compacte K' stablement parallélisée et Λ acyclique de dimension $n \geq 4$ qui s'envoie par une application α dans M' .

Soient alors W_1 la somme connexe de W et de K' (Cette somme connexe sera effectuée sur l'intérieur de V' dans V lorsque n est égal à 5).

Lorsque n est égal à 5, V_1 est l'union de $V'_1 = V' \# \partial K'$ et de cellules de dimension 3.

Le diagramme (2) et l'application α induisent un diagramme:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \hookrightarrow & W_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ M' & \longrightarrow & X' \end{array}$$

et l'application $V_1 \rightarrow M'$ induit une classe d'homotopie régulière d'immersion de V_1 dans M (resp. V'_1 dans M si $n = 5$) dont le nombre de point double est nul par construction.

Si l'on épaissit maintenant (W_1, V_1) en une Λ -anse d'indice n et de dimension $m + 1$, ce qui est possible vu les propriétés de (W, V) , on obtient un diagramme:

$$\begin{array}{ccc} h & \hookrightarrow & H \\ \downarrow & & \downarrow \\ M' & \longrightarrow & X' \end{array}$$

revêtu par des applications fibrées. L'application $h \rightarrow M'$ induit une classe d'homotopie régulière d'immersion de h dans M qui par construction contient un plongement pour $n \neq 5$. Si n est égal à 5 l'immersion de h dans M est

régulièrement homotope à une immersion injective sur V'_1 , et par position générale, cette immersion est régulièrement homotope à un plongement; ce qui achève de démontrer le théorème.

§3. Démonstration du Théorème 1.2

3.1. Le cas ii)

On suppose ici que n est égal à 2, que l'image de l'application: $\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(X)$ est Λ -parfaite et que l'application $H_2(\pi_1(A); \Lambda) \rightarrow H_2(\pi_1(X); \Lambda)$ est surjective.

LEMME 3.1. *Soit X un espace topologique de groupe fondamental π . Alors $H_1(X; \Lambda)$ est égal à $H_1(\pi; \Lambda)$ et on a la suite exacte:*

$$\pi_2(X) \otimes \Lambda \rightarrow H_2(X; \Lambda) \rightarrow H_2(\pi; \Lambda) \rightarrow 0.$$

Ce lemme, qui se démontre aisément en considérant la suite spectrale d'homologie du fibré $X \rightarrow K(\pi, 1)$, permet d'obtenir le diagramme suivant, où G est l'image de: $\pi_1(A) \rightarrow \pi_1 X$:

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_2(A) & \rightarrow & \pi_2(X) & \rightarrow & \pi_2(X, A) & \rightarrow & \pi_1(A) & \rightarrow & G \rightarrow 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_2(A; \Lambda) & \rightarrow & H_2(X; \Lambda) & \rightarrow & H_2(X, A; \Lambda) & \rightarrow & H_1(A; \Lambda) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & & & \\ H_2(\pi_1(A); \Lambda) & \rightarrow & H_2(\pi_1(X); \Lambda) & & & & & & \end{array}$$

Comme l'application $\pi_1(A) \rightarrow H_1(A; \mathbf{Z})$ est surjective et que G est Λ -parfait, on vérifie que, pour x appartenant à $H_2(X, A; \Lambda)$, il existe un entier λ inversible dans Λ et un élément y de $\pi_2(X, A)$ tel que y donne λx dans $H_2(X, A; \Lambda)/H_2(X; \Lambda)$.

Il suffit alors de considérer le diagramme suivant, où les lignes sont exactes, ainsi que les colonnes après tensorisation par Λ :

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_2(A) & \rightarrow & \pi_2(X) & \rightarrow & \pi_2(X, A) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H_2(A; \Lambda) & \rightarrow & H_2(X; \Lambda) & \rightarrow & H_2(X, A; \Lambda) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H_2(\pi_1(A); \Lambda) & \rightarrow & H_2(\pi_1(X); \Lambda) & \rightarrow & 0 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

pour trouver un entier λ' inversible dans Λ et un élément z de $\pi_2(X, A)$ dont l'image dans $H_2(X, A; \Lambda)$ est égale à $\lambda\lambda'x$; ce qui démontre le Théorème 1.2 dans le cas ii).

3.2. Construction de la paire (X', A')

Pour démontrer 1.2 dans les autres cas, on aura besoin d'une autre paire d'espace (X', A') que l'on va construire de la façon suivante:

Soit X_Λ le Λ -localisé de X au sens de [3]. On désignera alors par X' (resp. A') la fibre homotopique de l'application $X \rightarrow X_\Lambda$ (resp. $A \rightarrow X_\Lambda$). La paire (X', A') ainsi construite s'envoie par une application φ dans (X, A) , et l'on a:

LEMME 3.2. *L'application φ induit un isomorphisme de $H_i(X', A'; \Lambda)$ sur $H_i(X, A; \Lambda)$ pour tout $i \leq n$. De plus X' est Λ -acyclique et $\pi_1(X')$ (resp. $\pi_1(A')$ si $n \geq 3$) est localement Λ -parfait.*

Démonstration. Les deux premiers résultats se déduisent des suites spectrales d'homologie des deux fibrés $(X, A) \rightarrow X_\Lambda$ et $X \rightarrow X_\Lambda$.

Pour montrer que $\pi_1(X')$ (ou $\pi_1(A')$) est localement Λ -parfait, il suffit de remarquer que $\pi_1(X')$ (resp. $\pi_1(A')$) est extension centrale de $\pi_1(X)$ (resp. $\pi_1(A)$) et d'utiliser (5.5).

3.3. Le cas $n = 2$

On suppose maintenant que n est égal à 2, sans hypothèse supplémentaire.

L'élément $x \in H_2(X, A; \Lambda)$ se relève en $x' \in H_2(X', A'; \Lambda)$ qui induit un élément $y \in H_1(A'; \Lambda)$.

Soit V le cercle S^1 et $f': V \rightarrow A'$ une application telle que y soit l'image par f_* d'un générateur de $H_1(V; \Lambda)$.

Comme $\pi_1(X')$ est localement Λ -parfait, on peut ajouter à V des cellules de dimension 1 et obtenir un bouquet de cercles W' et une application $f'_1: W' \rightarrow X'$ qui prolonge f' et telle que l'image de $\pi_1(W')$ soit Λ -parfaite.

Or X' est Λ -acyclique et $H_2(\pi_1(X'); \Lambda)$ est nul. On peut alors utiliser le Théorème 1.2 cas ii) à la paire (X', W') et rajouter à W' des cellules de dimension 2 pour obtenir un complexe fini Λ -acyclique W et un prolongement f'_2 de f'_1 . L'application $g \circ f'_2: (W, V) \rightarrow (X, A)$ répond à la question et le théorème est démontré dans le cas $n = 2$.

3.4. Le cas iii)

On suppose ici que n est égal à 3 et que x donne zéro dans $H_2(\pi_1(A); \Lambda)$.

Comme $H_3(X, A; \Lambda)$ est égal à $\pi_3^S(X, A) \otimes \Lambda$, il existe une variété

différentiable compacte connexe stablement parallélisée W' et une application $f': (W', \partial W') \rightarrow (X, A)$ telle que x soit l'image par f' d'un générateur de $H_3(W', \partial W'; \Lambda)$. De plus, comme le bord de x appartient à $\pi_2(A) \otimes \Lambda$, on peut, quitte à changer de variété W' , supposer que $\partial W'$ est la sphère S^2 .

De plus, l'application $f': W' \rightarrow X$ vérifie toutes les hypothèses du Théorème 2.1 pour $n = 2$ avec $G = 0$ et l'application $H_2(X, W'; \Lambda) \rightarrow H_1(W'; \Lambda)$ est surjective.

Comme le Théorème 2.1 est démontré pour $n = 2$, on peut faire les chirurgies homologiques avec des Λ -anses de dimension 4 et d'indice 2 pour tuer n'importe quel élément de $H_1(W'; \Lambda)$. On calque alors la démonstration de [8], [1] qui marche dans ces dimensions, et l'on obtient, après chirurgie, une variété différentiable compacte Λ -acyclique et stablement parallélisée W de bord $V = S^2$ et une application $f: (W, V) \rightarrow (X, A)$ telle que x soit l'image par f_* d'un générateur de $H_3(W, V; \Lambda)$; et le Théorème 1.2 est démontré dans le cas iii).

3.5. Le cas $n = 3$

L'élément $x \in H_3(X, A; \Lambda)$ se relève en $x' \in H_3(X', A'; \Lambda)$ qui induit un élément $y \in H_2(A'; \Lambda)$.

Soient V' une surface orientée compacte connexe sans bord et $f': V' \rightarrow A'$ une application telle que y soit l'image par f'_* d'un générateur de $H_2(V'; \Lambda)$. La paire (A', V') vérifie les hypothèses du Théorème 1.2 pour $n = 2$ et l'application: $H_2(A', V'; \Lambda) \rightarrow H_1(V'; \Lambda)$ est surjective. Il existe donc des complexes finis W_i de dimension 2 et des sous-complexes V_i de dimension 1 ainsi que des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} V_i & \hookrightarrow & W_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ V' & \longrightarrow & A' \end{array}$$

tels que (W_i, V_i) ait le type de Λ -homologie de (B^2, S^1) et que les V_i induisent une base de $H_1(V'; \Lambda)$. Soit alors V la variété V' à laquelle on a ajouté les "cellules" W_i le long des V_i . Le complexe V est un complexe fini de dimension 2 qui a le type de Λ -homologie de S^2 , et V s'envoie par une application f'' dans A' de façon que y soit l'image par f''_* d'un générateur de $H_2(V; \Lambda)$.

LEMME 3.5. Soit $\alpha: G \rightarrow \Gamma$ un morphisme d'un groupe de présentation finie G dans un groupe localement Λ -parfait Γ avec: $H_2(\Gamma; \Lambda) = 0$.

Alors α se factorise à travers un groupe de présentation finie G' tel que: $H_1(G'; \Lambda) = H_2(G'; \Lambda) = 0$.

Ce lemme sera démontré plus loin et va permettre de terminer la démonstration du cas $n=3$.

En effet, comme X' est Λ -acyclique, d'après le Lemme 3.1, $H_2(\pi_1(X'); \Lambda)$ est nul. On en déduit, d'après le lemme ci-dessus, l'existence d'un groupe de présentation finie G' dont les deux premiers groupes de Λ -homologie sont nuls et d'un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} & G' & \\ \nearrow & & \searrow \\ \pi_1(V) & \xrightarrow{f'_*} & \pi_1(X') \end{array}$$

On attache alors des cellules de dimension 1 et 2 à V de façon à obtenir un complexe fini W' de dimension 2 dont le groupe fondamental est G' et une extension $f''' : W' \rightarrow X'$ de f'' .

Comme le groupe $H_3(X', W'; \Lambda) = H_2(W'; \Lambda)$ est un Λ -module libre de type fini, on peut utiliser le Théorème 1.2, cas iii) pour attacher à W' des 3-boules d'homologie sur leur bord, et l'on obtient un complexe fini W de dimension 3 Λ -acyclique contenant V et une application $f : (W, V) \rightarrow (X', A')$ qui prolonge f''' , ce qui démontre le Théorème 1.2 dans le cas $n=3$.

Démonstration du Lemme 3.5. Comme G est de présentation finie, $H_2(G; \Lambda)$ est un Λ -module de type fini, et comme $H_2(\Gamma; \Lambda)$ est nul, il existe un sous-groupe de type fini G'' de Γ contenant $\alpha(G)$ et tel que $H_2(G; \Lambda)$ s'annule dans $H_2(G''; \Lambda)$.

Comme de plus Γ est localement Λ -parfait on peut supposer que G'' est Λ -parfait.

Soit $\{x_1, \dots, x_p \mid r_1 = \dots = r_q = 1\}$ une présentation de G . En rajoutant des générateurs et des relations à G , on obtient une présentation $\{x_1, \dots, x_p, \dots, x_n \mid r_1 = \dots = r_q = r_{q+1} = \dots = 1\}$ de G'' , et l'application standard entre ces présentations est l'application α .

Comme $H_2(G; \Lambda)$ est de type fini et s'annule dans $H_2(G''; \Lambda)$ il existe un entier $m \geq q$ tel que $H_2(G; \Lambda)$ s'annule dans $H_2(G'''; \Lambda)$, G''' étant le groupe de présentation $\{x_1, \dots, x_n \mid r_1 = \dots = r_m = 1\}$. Comme de plus $H_1(G''; \Lambda)$ est nul, on peut choisir m assez grand pour que $H_1(G'''; \Lambda)$ soit également nul.

Soit \tilde{G}''' l'extension centrale universelle de G''' par $H_2(G'''; \Lambda)$ définie par l'identité de $\text{Hom}(H_2(G'''; \Lambda); H_2(G'''; \Lambda)) = H^2(G''', H_2(G'''; \Lambda))$. Comme $H_2(G; \Lambda)$ s'annule dans $H_2(G'''; \Lambda)$, il existe un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{G}''' & & \\ & \nearrow s & \downarrow & & \\ G & \rightarrow & G''' & \rightarrow & \Gamma \\ & \searrow \alpha & & & \end{array}$$

Soit G' un sous-groupe de \tilde{G}''' de type fini qui contient $s(G)$ et qui se surjecte sur G''' . Comme G''' est de présentation finie et que l'extension $G' \rightarrow G'''$ est centrale, G' est de présentation finie. On vérifie de plus que les groupes $H_1(G'; \Lambda)$ et $H_2(G'; \Lambda)$ sont nuls et le lemme est démontré.

3.6. Le cas $n = 4$

Soient x un élément de $H_4(X, A; \Lambda)$ et x' un relevé de x dans $H_4(X', A'; \Lambda) \simeq \pi_4^S(X', A') \otimes \Lambda$. Il existe une variété différentiable compacte W' stablement parallélisée de dimension 4 et une application $f': (W', \partial W') \rightarrow (X', A')$ qui induise $\lambda x'$, λ étant une unité de Λ .

On effectue alors des chirurgies d'indice 1 sur $\partial W'$ pour rendre $\partial W'$ connexe. On utilise ensuite le Théorème 2.1 (démontré dans ce cas) pour faire des chirurgies sur $\partial W'$ avec des Λ -anses de dimension 4 et d'indice 2 de façon à tuer tout $H_1(\partial W'; \Lambda)$.

On peut donc, quitte à faire ces chirurgies, supposer que $\partial W'$ (que l'on écrira V) a le type de Λ -homologie de S^3 . On peut également, quitte à faire sur W' des chirurgies d'indice 1, supposer que W' est connexe.

D'autre part, d'après le Lemme 3.5 il existe un groupe de présentation finie G tel que $H_1(G; \Lambda) = H_2(G; \Lambda) = 0$ et une factorisation de l'application: $\pi_1(W') \rightarrow \pi_1(X')$ à travers G . On effectue alors sur W' des chirurgies d'indice 1 et 2 et l'on obtient une variété différentiable compacte W'' stablement parallélisée de bord V et de groupe fondamental G et un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} V & \hookrightarrow & W'' \\ f' \downarrow & & \downarrow f'' \\ A' & \longrightarrow & X' \end{array}$$

On utilise le Théorème 1.2 cas iii) pour la paire (X', W'') , et l'on obtient des variétés différentiables compactes W_i stablement parallélisées et Λ -acycliques et des applications $(f_i, g_i): (W_i, \partial W_i) \rightarrow (X', W'')$ représentant une base de $H_3(X', W''; \Lambda) = H_2(W''; \Lambda)$ qui, par dualité de Poincaré, est un Λ -module libre.

Choisissons, pour tout i , une boule B_i de dimension 2 dans ∂W_i , et soit N_i un voisinage régulier de B_i dans W_i . On désignera par W'_i l'adhérence de $W_i - N_i$. La variété W'_i est la somme connexe sur le bord de N_i et de W'_i .

Quitte à déformer les applications (f_i, g_i) , on supposera que les restrictions de g_i à $W'_i \cap \partial W_i$ sont des plongements à images disjointes dans l'intérieur de W'' .

On effectue alors des "chirurgies" sur W'' à l'aide des boules homologues W'_i de la façon suivante:

On épaissit (f_i, g_i) en $(f'_i, g'_i): (W_i \times B^2, \partial W_i \times B^2) \rightarrow (X', W')$ de façon que les

restrictions de g'_i à $(W'_i \cap \partial W_i) \times B^2$ soient des plongements à images disjointes, et l'on pose:

$$W''' = (W'' - \bigcup_i g'_i[(W'_i \cap \partial W_i) \times B^2]) \bigcup_{g'_i} (\partial(W'_i \times B^2) - (W'_i \cap \partial W_i) \times B^2).$$

Cette variété W''' est stablement parallélisée de bord V et s'envoie dans X' par une application f''' qui prolonge f' . De plus $H_1(W'''; \Lambda)$ est nul et les applications (f_i, g_i) induisent des diagrammes:

$$\begin{array}{ccc} \partial N_i \hookrightarrow & N_i & \\ \downarrow & & \downarrow \\ W''' \xrightarrow{f'''} & X' & \end{array}$$

donnant une base de $H_3(X', W'''; \Lambda) \cong H_2(W'''; \Lambda)$.

Le complexe W cherché est alors l'union de W''' et des cellules N_i .

3.7. Le cas $n = 5$

Soit x' un relevé de $x \in H_5(X, A; \Lambda)$ dans $H_5(X', A'; \Lambda) \cong \pi_5^S(X', A') \otimes \Lambda$. Le bord de x' appartenant à $\pi_4^S(A')$ est défini, à une unité de Λ près, par une application $f': V' \rightarrow A'$ où V' est une variété différentiable compacte sans bord stablement parallélisée de dimension 4.

On procède alors comme dans 3.6 et l'on obtient une variété différentiable stablement parallélisée V''' et une application $f''': V''' \rightarrow A'$ telles que:

- 1) $\tilde{H}_0(V'''; \Lambda) = H_1(V'''; \Lambda) = 0$
- 2) (V''', f''') est cobordante à (V', f')
- 3) l'application $\pi_3(A', V''') \otimes \Lambda \rightarrow H_3(A', V'''; \Lambda)$ est surjective.

On choisit des applications $(\alpha_i, \beta_i): (B^3, S^2) \rightarrow (A', V''')$ induisant une base de $H_3(A', V'''; \Lambda) = H_2(V'''; \Lambda)$ et l'on désigne par V l'union de V''' et des cellules attachées par β_i . Le complexe V est ainsi construit et s'envoie par g dans A' .

Pour construire W , on va procéder ainsi:

Comme $\pi_4^S(X') \otimes \Lambda = \pi_4^S \otimes \Lambda$ est nul, V''' est le bord d'une variété différentiable W' stablement parallélisée et l'on a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} V''' \hookrightarrow & W' & \\ f''' \downarrow & & \downarrow g' \\ A' \longrightarrow & X' & \end{array}$$

On effectue alors des chirurgies d'indice 1 pour rendre W' connexe puis on utilise le Théorème 2.1 avec $n = 2$ et $n = 3$ pour faire des chirurgies avec des

Λ -anses d'indice 2 et 3 de façon à tuer $H_1(W', \Lambda)$ et $H_2(W', \partial W'; \Lambda)$ par la méthode de [8]. On vérifie, après ces chirurgies, que $H_4(W', \Lambda)$ et $H_5(W'; \Lambda)$ sont nuls et que $H_3(W'; \Lambda)$ est un Λ -module libre. On en déduit que le complexe $W''' = V \cup_{V''} W'$ a le type de Λ -homologie d'un bouquet de sphères de dimension 3.

On utilise alors le Théorème 1.2 pour $n=4$ pour trouver des paires de complexes finis (W_i, V_i) ayant le type de Λ -homologie de (B^4, S^3) et telles que W_i est de dimension 4 et V_i est une variété différentiable stablement parallélisée, et des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} V_i & \hookrightarrow & W_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ W'' & \longrightarrow & X' \end{array}$$

induisant une base de $H_4(X', W''; \Lambda) = H_3(W''; \Lambda)$.

Le complexe W cherché sera alors l'union de W'' et des complexes W_i . Pour montrer le théorème dans le cas $n=5$ il reste à montrer que (W, V) se plonge dans une paire de variétés différentiables parallélisées de dimension respectivement 8 et 7, ce qui est clair, d'après la construction de W .

3.8. Le cas $n \geq 6$

Le Théorème 1.2 se montre maintenant aisément par récurrence dans le cas $n \geq 6$.

En effet, l'élément $x \in H_n(X, A; \Lambda) \simeq \pi_n^S(X', A') \otimes \Lambda$ est représenté, à une unité près, par une application $f' : (W', \partial W') \rightarrow (X', A')$, W' étant une variété différentiable stablement parallélisée.

On utilise alors le Théorème 2.2 pour tuer les groupes $\tilde{H}_i(\partial W'; \Lambda)$ [1]. Si $n-1$ est impair, il n'y a pas d'obstruction. Si $n-1$ est divisible par 4, la forme quadratique de $\partial W'$ est hyperbolique et si $n+1$ est divisible par 4, l'invariant de Arf de $\partial W'$ est nul. En effet $\partial W'$ borde une variété stablement parallélisée.

Dans tous les cas, après chirurgie, $\partial W'$ a le type de Λ -homologie de S^{n-1} .

Soit \bar{W}' la variété W' munie d'une trivialisation opposée. On désigne par W'' la somme connexe sur le bord de W' et de \bar{W}' et par f'' l'application de $(W'', \partial W'')$ dans (X', A') égale à f' sur W' et constante sur \bar{W}' .

L'application f'' représente λx , λ étant une unité de Λ , $V = \partial W''$ a le type de Λ -homologie de S^{n-1} , et, si n est pair, la forme quadratique est hyperbolique ou l'invariant de Arf est nul. On utilise alors le Théorème 2.1 et l'on tue par chirurgie toute l'homologie de W'' , ce qui termine la démonstration du Théorème 1.2 ainsi que celle du Théorème 2.1.

§4. Démonstration des Théorèmes 1.4 et 1.5

4.1. Démonstration du Théorème 1.4

Soient \tilde{X} le revêtement de X de groupe fondamental N , et G le groupe $\pi_1(X)/N$. Le complexe singulier $C_*(\tilde{X}) \otimes \Lambda$ est un $\Lambda[G]$ -module différentiel gradué libre.

LEMME 4.1. *Le complexe $C_*(\tilde{X}) \otimes \Lambda$ a le type d'homotopie d'un complexe:*

$$0 \leftarrow C_0 \leftarrow C_1 \leftarrow \cdots \leftarrow C_n \leftarrow 0.$$

où les C_i sont des $\Lambda[G]$ -modules projectifs de type fini.

Démonstration. Soit $\prod_{\alpha} \Lambda[G]$ un produit d'exemplaires de $\Lambda[G]$. On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_i(X; \prod_{\alpha} \Lambda[G]) & \xrightarrow{\lambda} & \prod_{\alpha} H_i(X; \Lambda[G]) \\ \downarrow D & & \downarrow D' \\ H_w^{n-1}(X; \prod_{\alpha} \Lambda[G]) & \xrightarrow{\mu} & \prod_{\alpha} H_w^{n-1}(X; \Lambda[G]). \end{array}$$

Comme D , D' et μ sont des isomorphismes, λ est un isomorphisme et par suite [2], $C_*(\tilde{X}) \otimes \Lambda$ a le type de Λ -homologie d'un complexe:

$$0 \leftarrow C'_1 \leftarrow C'_2 \leftarrow \cdots$$

où les C'_i sont des $\Lambda[G]$ -modules libres de type fini.

D'autre part $H^i(X; M)$ est nul pour tout $\Lambda[G]$ -module M et pour tout $i > n$. On en déduit que C'_n/C'_{n+1} est projectif et que $C_*(\tilde{X}) \otimes \Lambda$ a le type d'homotopie du complexe:

$$0 \leftarrow C'_0 \leftarrow \cdots \leftarrow C'_{n-1} \leftarrow C'_n/C'_{n+1} \leftarrow 0.$$

Le lemme est donc démontré.

On posera alors:

$$\sigma_0(X) = \sum (-1)^i [C_i] \in \tilde{K}_0(\Lambda[G]).$$

Il est clair que $\sigma_0(X)$ est bien défini et doit être nul si f est normalement cobordante à une équivalence de $\Lambda[G]$ -homologie.

On suppose maintenant que $\sigma_0(X)$ est nul.

Quitte à faire sur V des chirurgies d'indice 1, on peut supposer que V est connexe et que l'application $\pi_1(V) \rightarrow G$ est surjective.

Le noyau de l'application: $\pi_1(V) \rightarrow G$ est l'enveloppe normale d'un groupe de type fini quotient d'un groupe libre de type fini L . Comme N est localement Λ -parfait, l'application de L dans N se factorise par un groupe de présentation finie Γ Λ -parfait.

Soit π la somme amalgamée $\Gamma *_L \pi_1 V$. L'application de $\pi_1(V)$ dans $\pi_1(X)$ se factorise par π . De plus π est de présentation finie et l'enveloppe normale de Γ dans π est le noyau de $\pi \rightarrow G$. Ce noyau est donc localement Λ -parfait.

On fait ensuite sur V des chirurgies d'indice 1 et 2 pour que $\pi_1(V)$ devienne égal à π .

Ensuite on procède comme dans [9] en remplaçant les chirurgies par des chirurgies homologiques avec des Λ -anses, ce qui est possible d'après le Théorème 2.1. Le seul problème est de vérifier qu'après chaque chirurgie homologique le noyau de l'application $\pi_1(V) \rightarrow G$ reste localement Λ -parfait ce qui résulte du lemme:

LEMME. Soit un diagramme de groupes de présentation finie:

$$\begin{array}{ccc} \pi & \longrightarrow & \pi' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi'' & \xrightarrow{1} & G \end{array}$$

tel que π'' soit Λ -parfait et le noyau de $\pi' \rightarrow G$ localement Λ -parfait.

Alors le noyau de $\pi' *_\pi \pi'' \rightarrow G$ est localement Λ -parfait.

Démonstration. Comme le noyau de $\pi' \rightarrow G$ est localement Λ -parfait et enveloppe normale d'un groupe de type fini, il existe un sous-groupe de type fini Λ -parfait Γ de π' dont l'enveloppe normale est le noyau de l'application $\pi' \rightarrow G$ et qui contient l'image de π .

Le groupe $\Gamma *_\pi \pi''$ est un groupe de type fini Λ -parfait dont l'enveloppe normale dans $\pi' *_\pi \pi''$ est le noyau de $\pi' *_\pi \pi'' \rightarrow G$.

Ce noyau est donc localement Λ -parfait.

On applique alors les méthodes de [9] pour tuer $H_i(X, V; \Lambda[G])$ par des chirurgies homologiques. En dimension paire il n'y a aucun problème et $\sigma_1(f)$ est défini par la forme intersection dans $\Lambda[G]$ et la forme quadratique construite en 2.1 a).

Si n est égal à $2k+1$ il faut juste “plonger” la boule B^n dans X au sens des espaces à dualité de Poincaré, ce qui résulte du lemme ci-dessous, et $\sigma(f)$ est définie par une isométrie de l'espace hyperbolique standard comme dans [9].

LEMME. *Si n est égal à $2k+1$, si le noyau de l'application $\pi_1 V \rightarrow G$ est localement Λ -parfait et si $H_i(X, V; \Lambda[G])$ est nul pour $i \leq k$, l'application $f: V \rightarrow X$ se factorise à travers un complexe fini K de dimension n , n'ayant qu'une cellule de dimension n et ayant même $\Lambda[G]$ -homologie que X .*

Démonstration. Par dualité de Poincaré, $H_i(X, V; \Lambda[G])$ est nul pour $i \neq k+1, k+2$. On attache alors à V des cellules homologues données par le Théorème 1.2, en dimension $k+1$ et $k+2$, et l'on obtient un complexe K qui vérifie le lemme.

4.2. Démonstration du Théorème 1.5

Ce théorème est démontré par Hausmann lorsque $\pi_1(K)$ est de type (\overline{FP}) en utilisant les résultats de [6].

Le groupe $C_n(K)$ est l'ensemble des variétés PL orientées V de dimension n contenant K avec même groupe fondamental et ayant le type d'homologie de S^n , modulo H_* -cobordisme induisant des isomorphismes sur les groupes fondamentaux et contenant $K \times I$; $C_n(K)$ est un groupe pour la somme connexe sur un voisinage de K .

L'application canonique $\varphi: C_n(K) \rightarrow \pi_n(B(\pi_1(K))^+)$ est définie de la façon suivante:

Soit $V \supset K$ une variété de $C_n(K)$. L'application: $\pi_1(V) \xrightarrow{\cong} \pi_1(K)$ induit une application de V dans $B(\pi_1(K)) = K(\pi_1(K), 1)$. En appliquant l'opération $+$ de Quillen on déduit une application de S^n dans $B(\pi_1(K))^+$ d'où un élément de $\pi_n(B(\pi_1(K))^+)$.

a) *Surjectivité de φ .* Désignons par π le groupe $\pi_1(K)$, et soit x un élément de $\pi_n(B\pi^+)$ représenté par une application de S^n dans $B\pi^+$. Désignons par X le produit fibré homotopique de S^n et de $B\pi$ au dessus de $B\pi^+$. Comme $[K, B\pi^+]$ est nul par obstruction, l'application $K \rightarrow B\pi$ se factorise à travers X par une application g . Il suffit alors de factoriser g à travers une variété PL V de façon que l'on ait:

$$H_*(V) \simeq H_*(X)$$

$$\pi_1(V) \xrightarrow{\cong} \pi = \pi_1(X)$$

Désignons par V_0 une variété contenant K et représentant l'élément neutre de $C_n(K)$; V_0 est le bord d'une variété W_0 qui a le type d'homotopie de K . On a donc une application f_0 de V_0 dans X induisant un isomorphisme sur les π_1 .

D'autre part, si CX est le cône de X , la paire (CX, X) vérifie les hypothèses du Théorème 1.2 pour $n+1$ (≥ 7) avec $\Lambda = \mathbf{Z}$, il existe donc une variété acyclique W et une application f de $(W, \partial W)$ dans (CX, X) telle que $f_*[W]$ est le générateur canonique de $H_{n+1}(CX, X) = H_n(X)$.

On définit alors V' comme la somme connexe de V_0 et ∂W ; V' est une variété stablement parallélisée ayant le type d'homologie de S^n , qui s'envoie par f' dans X et $f'[V']$ est le générateur canonique de $H_n(X)$.

De plus $\pi_1(V') \rightarrow \pi$ est surjectif, car V' contient K .

Comme π est de présentation finie, le noyau de $\pi_1(V') \rightarrow \pi$ est engendré par un nombre fini d'éléments. On peut alors faire des chirurgies d'indice 2 sur V' et obtenir une variété V'' stablement parallélisée qui contient K , tel que: $\pi_1(V'') \simeq \pi$, et qui s'envoie dans X .

D'autre part, on a la suite exacte:

$$H_3(X, V''; \mathbf{Z}[\pi]) \rightarrow H_3(X, V'') \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathbf{Z}[\pi]}(H_2(X, V''; \mathbf{Z}[\pi]), \mathbf{Z}) \rightarrow 0.$$

Comme $H_2(X, V''; \mathbf{Z}[\pi]) = \pi_2(X, V'')$ est un quotient de $\pi_2(X) = H_3(\pi)$ sur lequel agit π trivialement, $\text{Tor}_1^{\mathbf{Z}[\pi]}(\pi_2(X, V''), \mathbf{Z}) = H_1(\pi; \pi_2(X, V'')) = 0$.

On en déduit que $\pi_3(X, V'') \rightarrow H_3(X, V'')$ est surjectif, et, comme $H_3(X, V'')$ est libre, on peut faire des chirurgies d'indice 3 sur V'' pour tuer $H_2(V'')$. On obtient alors une variété V ayant le type d'homologie de S^n qui factorise l'application $g: K \rightarrow X$, telle que l'image de $[V]$ soit le générateur canonique de $H_n(X)$ et telle que: $\pi_1(K) = \pi_1(V) = \pi$.

On vérifie alors aisément que cette variété donne $x \in \pi_n(B\pi^+)$ par l'application φ , laquelle est surjective.

b) *Injectivité de φ .* Soit V une variété PL orientée ayant le type d'homologie de S^n contenant K et représentant un élément de $C_n(K)$ annulé par φ .

Si l'on désigne par F la fibre homotopique de $B\pi \rightarrow B\pi^+$, l'application $V \rightarrow B\pi$ est homotope à zéro dans $B\pi^+$, et se factorise par $f: V \rightarrow F$.

Comme V est bord d'une variété acyclique, V possède une structure de variété différentiable stablement parallélisée et définit un élément de $\pi_n^S(F)$. Comme $\pi_n^S(F)$ est égal à π_n^S , V est bord d'une variété différentiable stablement parallélisée W qui s'envoie dans F .

On fait ensuite sur W des chirurgies d'indice 2 pour tuer le noyau de $\pi_1(W) \rightarrow \pi$. On utilise ensuite le Théorème 2.1 pour tuer toute homologie de (F, W) par des chirurgies homologiques, quitte à faire la somme connexe sur le

bord, de W et d'une variété stablement parallélisée dont le bord est une sphère d'homotopie, si la signature ou l'invariant de Arf de W n'est pas nul. On obtient alors une variété acyclique stablement parallélisée W' , de bord V et une application $g: W' \rightarrow F$ qui prolonge f .

On procède alors comme au a) et l'on tue le noyau de $\pi_1(W') \rightarrow \pi$ par des chirurgies d'indices 2 et 3 (à ceci près qu'il faut remplacer X et V' par F et W'). On obtient alors une variété W'' acyclique de bord V tel que $\pi_1(K) = \pi_1(V)$ soit isomorphe à $\pi_1(W'')$. Il en résulte que V est trivial dans $C_n(K)$ et φ est injective.

§5. Sur les groupes localement Λ -parfaits

Soit G un groupe. On désignera par $P_\Lambda(G)$ l'union des sous-groupes de type fini de G Λ -parfaits. On a le lemme suivant:

LEMME 5.1. *$P_\Lambda(G)$ est un sous-groupe de G stable par tout automorphisme. De plus $P_\Lambda(G)$ est le plus grand sous-groupe localement Λ -parfait de G .*

La démonstration est évidente.

COROLLAIRE 5.2. *Un groupe G est localement Λ -parfait si et seulement si: $G = P_\Lambda G$.*

Vérifier si un groupe est localement Λ -parfait n'est pas toujours facile. Voici trois critères pour étudier ce problème:

PROPOSITION 5.3. *Soit N un sous-groupe de G , enveloppe normale d'un nombre fini d'éléments. Alors N est localement Λ -parfait si et seulement si N est l'enveloppe normale d'un groupe de type fini Λ -parfait.*

Démonstration. Le groupe N est l'enveloppe normale d'éléments x_i de G .

Si N est localement Λ -parfait, les x_i sont contenus dans un sous-groupe Γ de type fini de N , Λ -parfait, et N est l'enveloppe normale de Γ .

Si N est l'enveloppe normale d'un sous-groupe Γ de type fini de G et Λ -parfait, on a:

$$\Gamma \subset P_\Lambda(N) \Rightarrow N = P_\Lambda(N)$$

et N est localement Λ -parfait.

PROPOSITION 5.4. Soit

$$1 \rightarrow G' \rightarrow G'' \rightarrow G \rightarrow 1$$

une extension de groupes. Alors si G et G' sont localement Λ -parfaits, G'' est localement Λ -parfait.

Démonstration. Soit $x_0 \in G''$. Comme G est localement Λ -parfait, il existe $x_1 \cdots x_n \in G''$ tels que le sous-groupe Γ'' de G'' engendré par les x_i se projette sur un sous-groupe de type fini de G Λ -parfait.

Il existe alors des éléments $c_0, \dots, c_n \in [\Gamma'', \Gamma'']$ et une unité λ de Λ tels que $x_i^\lambda c_i^{-1}$ appartienne à G' pour tout i .

Comme G' est localement Λ -parfait, les éléments $x_i^\lambda c_i^{-1}$ de G' sont contenus dans un sous-groupe Γ' de G' de type fini et Λ -parfait, et le groupe engendré par Γ' et les x_i est de type fini et Λ -parfait. On en déduit que $P_\Lambda(G'')$ contient x_0 et par conséquent est égal à G'' , ce qui signifie que G'' est localement Λ -parfait.

PROPOSITION 5.5. Soit

$$0 \rightarrow M \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow 1$$

une extension centrale de groupes.

Alors si G' est Λ -parfait et G localement Λ -parfait, G' est localement Λ -parfait.

Démonstration. Soit Γ un sous-groupe Λ -parfait de type fini de G . Choisissons un sous-groupe Γ' de type fini de G' qui se surjecte sur Γ , et désignons par Γ'' le noyau de l'application: $\Gamma' \rightarrow H_1(\Gamma'; \Lambda)$.

On vérifie que Γ'' se surjecte sur Γ et l'on choisit un sous-groupe Γ''' de type fini de Γ'' qui se surjecte sur Γ . On désigne par M' (resp. M'' , M''') les groupes $M \cap \Gamma'$ (resp. $M \cap \Gamma''$, $M \cap \Gamma'''$).

Le groupe $M'' \otimes \Lambda$ est l'image de $H_2(\Gamma; \Lambda)$ dans $M' \otimes \Lambda$ et par suite $M''' \otimes \Lambda$ est égal à $M'' \otimes \Lambda$. On en déduit que l'application $H_2(\Gamma; \Lambda) \rightarrow M''' \otimes \Lambda$ est surjective et Γ''' est Λ -parfait. Comme Γ''' est de type fini, Γ''' est contenu dans $P_\Lambda(G')$. Il en résulte que l'image de $P_\Lambda(G')$ dans G' contient Γ , et comme cela a lieu pour tout Γ , $P_\Lambda(G')$ se surjecte sur G .

On en déduit que $G'/P_\Lambda(G')$ est un quotient de M et est commutatif. Comme G' est Λ -parfait, $G'/P_\Lambda(G')$ est Λ -parfait et comme $G'/P_\Lambda(G')$ est commutatif, $G'/P_\Lambda(G')$ est localement Λ -parfait.

D'après la Proposition 5.4, G' est localement Λ -parfait et la proposition est démontrée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARGE, J., LANNES, J., LATOUR, F. et VOGEL, P., *Λ -sphères*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4ème série, 4 (1974), p. 463–506.
- [2] BIERI, R. et ECKMANN, B., *Finiteness properties of duality groups*, Comm. Math. Helv., 49 (1974), p. 74–83.
- [3] BOUSFIELD, A. K. et KAN, D. M., *Homotopy limits, completions and localizations*, Lecture Notes in Math., 304, Springer-Verlag, (1972).
- [4] CAPPELL, S. et SHANESON, J., *The codimension two placement problem and homology equivalent manifold*, Ann. of Math., 99 (1974), p. 277–348.
- [5] HAUSMANN, J. C., *Classification of integral homology spheres*, (à paraître).
- [6] ———, *Homological surgery*, Ann. of Math., 104 (1976), p. 573–584.
- [7] ———, VOGEL, P., *Plus construction and lifting maps from manifolds*, (à paraître).
- [8] KERVAIRE, M. et MILNOR, J., *Groups of homotopy spheres*, Ann. of Math., 77 (1963), p. 397–537.
- [9] WALL, C. T. C., *Surgery on compact manifolds*, Academic Press, (1970).

Université de Nantes,
U.E.R. de Mathématiques,
38, blvd Michelet,
F-44 Nantes B.P. 1044

Reçu Décembre 1975/November 1976

