

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 52 (1977)  
  
**Artikel:** Sur la théorie classique des invariants.  
**Autor:** Vust, Th.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-39999>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Sur la théorie classique des invariants

TH. VUST

(0.1.1) Le corps de base  $k$  est de caractéristique nulle.

On se donne un espace vectoriel  $N$  de dimension finie et un sous-groupe  $G$  du groupe  $GL(N)$  des automorphismes linéaires de  $N$ . On note  $N'$  le dual de  $N$ . Soit  $p$  et  $q$  deux nombres entiers positifs; on fait opérer  $G$  dans  $\oplus^p(N') \oplus \oplus^q(N)$  par

$$s \cdot (\xi^1, \dots, \xi^p, x^1, \dots, x^q) = ({}^t s^{-1}(\xi^1), \dots, s(x^1), \dots)$$

$s \in G$ ,  $\xi^j \in N'$ ,  $x^j \in N$ . Un problème de la théorie classique des invariants est de décrire, par générateurs et relations, l'algèbre  $k[\oplus^p(N') \oplus \oplus^q(N)]^G$  des fonctions polynomiales sur  $\oplus^p(N') \oplus \oplus^q(N)$  invariantes par  $G$ .

Soit  $r$  un entier avec  $r \geq p$  et  $r \geq q$ ; l'injection

$$\begin{aligned} u: \oplus^p(N') \oplus \oplus^q(N) &\rightarrow \oplus^r(N') \oplus \oplus^r(N) \simeq \oplus^r(N' \oplus N) \\ (\xi^1, \dots, x^1, \dots) &\mapsto (\xi^1, \dots, \xi^p, 0, \dots, 0, x^1, \dots, x^q, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

induit un homomorphisme  $k[u]: k[\oplus^r(N' \oplus N)]^G \rightarrow k[\oplus^p(N') \oplus \oplus^q(N)]^G$ ; puisque  $u$  possède une rétraction qui commute aux opérations de  $G$ ,  $k[u]$  possède une section; par conséquent, quitte à remplacer  $N$  par  $N' \oplus N$ , il suffit théoriquement de résoudre le problème dans le cas où  $p = 0$ . Dans la suite, on ne considèrera donc que le cas de l'opération de  $G$  dans  $\oplus^q(N)$ .

Dans son livre: the classical groups [10], chap. II et VI, H. Weyl traite les cas classiques:  $G = O(N)$ ,  $Sp(N)$ ,  $SL(N)$ , ...; le problème des générateurs de certaines de ces algèbres est aussi étudié dans l'ouvrage [2] de J. Dieudonné et J. Carrel. On trouve d'autres exemples dans l'article [7] de C. Procesi.

Lorsque  $G = O(N)$  est le groupe orthogonal de la forme quadratique usuelle  $\sum (x_i)^2$  sur  $N$ , l'algèbre  $k[\oplus^q N]^{O(N)}$  est engendrée par les produits scalaires  $(x^i, x^j)$ ,  $1 \leq i \leq j \leq q$ , résultat dû à E. Study [8]. Cet exemple, entre autres, suggère à H. Weyl ([10] p. 32 dernier paragraphe) "la possibilité d'associer à  $G$  un nombre fini d'invariants typiques indépendants du nombre  $q$  d'arguments en question. Un tel système devrait être formé d'invariants dépendants d'arguments typiques  $u, v, \dots$ ; il devrait fournir un système de générateurs pour l'algèbre des invariants



d'une quantité arbitraire d'arguments  $x, y, z, \dots$  si on substitue ces vecteurs  $x, y, z, \dots$  dans toutes les combinaisons possibles (répétitions non exclues) aux arguments typiques  $u, v, \dots$ ". Dans le cas de l'exemple, un système d'invariants typiques consiste en le produit scalaire  $(u, v)$ . Plus loin, au chapitre II, théorème (2.5.A), il démontre en utilisant une identité de A. Capelli que

a) si un système d'invariants typiques fournit (par substitution) un système de générateurs de l'algèbre des invariants  $k[\oplus^n(N)]^G$  pour  $n$  arguments ( $n = \dim N$ ), alors il fournit aussi un système de générateurs pour  $k[\oplus^q(N)]^G$ , quel que soit l'entier  $q$ ,  $G$  désignant toujours un sous-groupe quelconque de  $GL(N)$ .

Dans [2] chap. 2 §10, on démontre des renseignements du type a) en utilisant la technique des développements de Young–Deruyts. De plus, au chapitres II (C) et VI §1 de [10] on trouve que

b) il existe un ensemble de relations  $R$  entre les éléments d'un système complet d'invariants typiques (i.e. qui fournit par substitution un système de générateurs  $\Gamma(q)$  de  $k[\oplus^q(N)]^G$  pour tout  $q$ ) tel que les relations entre les éléments de  $\Gamma(q)$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , s'obtiennent aussi par substitution à partir de  $R$ , ceci lorsque  $G$  est l'un des groupes classiques.

Par exemple, l'idéal des relations entre les générateurs  $(x^i, x^j)$  de  $k[\oplus^q(N)]^{O(N)}$  est engendré par les  $\det((x^i, x^j))_{\substack{i \in E_1 \\ j \in E_2}}$ , où  $E_i$  désigne une partie de  $\{1, \dots, q\}$  à  $n+1$  éléments; on prend alors pour  $R$  la relation  $\det((u^i, v^j))_{\substack{i=0, \dots, n \\ j=0, \dots, n}}$ .

De ces résultats se dégage l'idée que  $k[\oplus^n(N)]^G$ ,  $n = \dim N$ , "détermine" entièrement  $k[\oplus^q(N)]^G$  pour tout  $q$ . Le propos de ce travail est de donner forme à cette idée.

(0.1.2) Il faut aborder le problème intrinsèquement: on identifie le  $G$ -module  $\oplus^q N$  avec le  $G$ -module  $\text{Hom}(Q, N)$ , où  $Q$  est un espace vectoriel de dimension  $q$  et  $G$  opère au but. On remarque ensuite que  $GL(Q)$  opère à la source dans  $\text{Hom}(Q, N)$ , que les deux opérations de  $G$  et  $GL(Q)$  commutent et par conséquent que  $GL(Q)$  opère dans  $k[\text{Hom}(Q, N)]^G$ .

Il faut aborder le problème fonctoriellement: on considère la catégorie  $\mathfrak{B}$  des espaces vectoriels de dimension finie et la catégorie  $\mathfrak{Aff}$  des variétés algébriques affines dont l'algèbre des fonctions régulières n'est pas nécessairement de type fini; on note  $\text{Hom}(Q, N)/G^{(1)}$  l'objet de  $\mathfrak{Aff}$  dont l'algèbre des fonctions

---

<sup>1</sup> La variété  $\text{Hom}(Q, N)/G$  est loin d'être le quotient de  $\text{Hom}(Q, N)$  par l'opération de  $G$ ; c'est par analogie avec le cas où  $G$  est réductif qu'on a choisi cette notation: la variété  $\text{Hom}(Q, N)/G$  est alors "l'espace des orbites fermées de  $G$  dans  $\text{Hom}(Q, N)$ " (cf. [6]).

régulières est  $k[\text{Hom}(Q, N)]^G$  et  $\pi(Q): \text{Hom}(Q, N) \rightarrow \text{Hom}(Q, N)/G$  le morphisme induit par l'inclusion des fonctions régulières; alors  $\text{Hom}(\cdot, N)/G$  est un foncteur (contravariant) de  $\mathfrak{B}$  dans  $\mathfrak{Aff}$  et  $\pi$  une transformation naturelle  $\text{Hom}(\cdot, N) \rightarrow \text{Hom}(\cdot, N)/G$ .

(0.1.3) Soit  $F$  un foncteur (contravariant) de  $\mathfrak{B}$  dans  $\mathfrak{Aff}$ . Une présentation de  $F$  est la donnée d'une suite de transformations naturelles entre foncteurs de  $\mathfrak{B}$  dans  $\mathfrak{Aff}$

$$F \xrightarrow{\Gamma} V_1 \xrightarrow{R} V_2$$

en sorte que, pour tout espace vectoriel  $Q$ , on ait une présentation au sens usuel:

- 1)  $V_i(Q)$  est un espace vectoriel de dimension finie,  $i = 1, 2$ ,
- 2)  $\Gamma(Q)$  est une immersion fermée,
- 3)  $\Gamma(Q)$  induit un isomorphisme  $F(Q) \rightarrow R(Q)^{-1}(0)$ ;

autrement dit,

- 2') le comorphisme  $k[\Gamma(Q)]: k[V_1(Q)] \rightarrow k[F(Q)]$  est surjectif,
- 3')  $k[\Gamma(Q)]$  induit un isomorphisme  $k[V_1(Q)]/(k[R(Q)](m_2(Q))) \rightarrow k[F(Q)]$ ,  
où  $m_2(Q)$  désigne l'idéal maximal de 0 dans  $k[V_2(Q)]$ .

(0.1.4) Soit  $I$  un ensemble fini et  $a \in \mathbf{N}^I$ ; on note

$$\otimes^a(Q) = \bigoplus_{i \in I} a^{(i)}(Q)$$

et on considère  $\otimes^a$  comme un foncteur de  $\mathfrak{B}$  dans  $\mathfrak{Aff}$ . Si  $I^*$  est un ensemble fini contenant  $I$  et  $a^* \in \mathbf{N}^{I^*}$ , on écrit  $i(I, I^*)$  pour l'inclusion naturelle  $\otimes^{a^*|_I} \hookrightarrow \otimes^{a^*}$ . Pour tout  $Q$ , on désigne par  $Q'$  le dual de  $Q$ .

Voici le résultat principal de ce travail:

**THÉORÈME.** *Soit  $P$  un espace vectoriel,  $\dim P \geq \dim N$ . On suppose que  $k[\text{Hom}(P, N)]^G$  est une algèbre de type fini; on se donne une présentation*

$$\text{Hom}(P, N)/G \xrightarrow{g} \otimes^a(P)' \xrightarrow{r} \otimes^b(P)' \quad (1)$$

de  $\text{Hom}(P, N)/G$  où  $a \in \mathbf{N}^I$ ,  $b \in \mathbf{N}^J$  et  $g$  et  $r$  sont des morphismes (de  $\mathfrak{Aff}$ )  $GL(P)$ -équivariants. Alors, une telle présentation se prolonge fonctoriellement en

une présentation de  $\text{Hom}(\cdot, N)/G$ . De manière précise, il existe deux transformations naturelles  $\Gamma: \text{Hom}(\cdot, N)/G \rightarrow \otimes^a(\cdot)'$  et  $R^*: \otimes^a(\cdot)' \rightarrow \otimes^{b^*}(\cdot)'$ ,  $b^* \in \mathbf{N}^{J^*}$  telles que

- a)  $\Gamma(P) = g$ ,
- b)  $J^*$  est un ensemble fini contenant  $J$ ,  $b^*|_J = b$  et  $R^*(P) = i(J, J^*)(P) \circ r$ ,
- c) la suite

$$\text{Hom}(\cdot, N)/G \xrightarrow{\Gamma} \otimes^a(\cdot)' \xrightarrow{R^*} \otimes^{b^*}(\cdot)'$$

est une présentation de  $\text{Hom}(\cdot, N)/G$ .

Un tel prolongement n'est pas unique; on peut cependant en construire un qui est canonique.

On donne quelques étapes de la preuve de ce théorème, ce qui permettra de préciser certains points.

(0.2.1) LEMME. Soit  $f: \otimes^c(Q)' \rightarrow \otimes^d(Q)'$  un morphisme polynomial  $GL(Q)$ -équivariant. Il existe alors une transformation naturelle  $\Phi: \otimes^c(\cdot)' \rightarrow \otimes^d(\cdot)'$  telle que  $\Phi(Q) = f$ .

(0.2.2) On part de la présentation (1) et on considère le morphisme

$$g \circ \pi(P): \text{Hom}(P, N) \simeq \otimes^{(1, \dots, 1)}(P)' \rightarrow \otimes^a(P)'.$$

D'après le lemme, il existe  $X: \text{Hom}(\cdot, N) \rightarrow \otimes^a(\cdot)'$  telle que  $X(P) = g \circ \pi(P)$ ; on montre de plus que  $X = X_t$ , où  $t \in [\otimes^a(N)']^G$  et  $X_t$  est la transformation naturelle définie par

$$\begin{aligned} X_t(Q): \text{Hom}(Q, N) &\rightarrow \otimes^a(Q)' \\ u &\mapsto t \circ \otimes^a(u). \end{aligned}$$

Il existe enfin  $\Gamma: \text{Hom}(\cdot, N)/G \rightarrow \otimes^a(\cdot)'$  en sorte que  $\Gamma(P) = g$  et que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}(\cdot, N) & \\ \pi \swarrow & & \searrow X_t \\ \text{Hom}(\cdot, N)/G & \xrightarrow{\Gamma} & \otimes^a(\cdot)' \end{array}$$

est commutatif. On a alors la

**PROPOSITION.** Pour tout  $Q$ ,  $\Gamma(Q)$  est une immersion fermée.

*Remarque.* La forme  $t \in [\otimes^a(N)']^G$  sous-jacente à la définition de  $\Gamma$  est exactement un “système complet d’invariants typiques pour  $n$  arguments” (cf. (0.1.1)). En effet, pour tout  $Q$ , les fonctions polynomiales

$$\begin{aligned} \text{Hom}(Q, N) &\rightarrow k \\ u &\mapsto \langle t \circ \otimes^a(u), x \rangle \end{aligned} \quad x \in \otimes^a(Q)$$

engendrent  $k[\text{Hom}(Q, N)]^G$ ; on a là un formalisme intrinsèque pour le procédé de substitution.

EXEMPLE. On désigne par  $t \in S^2(N)' \subset \otimes^2(N)'$  la  $\mathbf{Q}$ -forme bilinéaire symétrique non dégénérée positive sur  $N$  telle que  $O(N)$  est égal au sous-groupe d’isotropie  $GL(N)_t$ ,  $\Gamma_t$  la factorisation de  $X_t$  à travers  $\pi$  et  $P$  un espace vectoriel de même dimension que  $N$ . On démontre alors (et il est classique) que

$$\text{Hom}(P, N)/O(N) \xrightarrow{\Gamma_t(P)} S^2(P)' \rightarrow 0$$

est une présentation.

(0.2.3) Après les succès précédents, on est tenté par l’affirmation suivante: soit  $R: \otimes^a(.)' \rightarrow \otimes^b(.)'$  une transformation naturelle telle que  $R(P) = r$ ; alors

$$\text{Hom}(., N)/G \xrightarrow{\Gamma} \otimes^a(.)' \xrightarrow{R} \otimes^b(.)'$$

est une présentation. Dans le cas de l’exemple, cela impliquerait que  $\text{Hom}(Q, N)/O(N)$  est isomorphe à  $S^2(Q)'$  pour tout  $Q$ ; or tel n’est pas le cas (cf. (0.1.1)). On voit donc que les idées et techniques de la proposition (0.2.2) sont insuffisantes.

Soit alors  $Q$  un espace vectoriel,  $\dim Q \geq \dim P$ ; on se donne une application linéaire surjective  $v: Q \rightarrow P$ . On a la situation

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}(P, N)/G & \xrightarrow{g=\Gamma(P)} & \otimes^a(P)' & \xrightarrow{p=R(P)} & \otimes^b(P)' \\ \downarrow & & \downarrow \otimes^a(v') & & \downarrow \otimes^b(v') \\ \text{Hom}(Q, N)/G & \xrightarrow{\Gamma(Q)} & \otimes^a(Q)' & \xrightarrow{R(Q)} & \otimes^b(Q)' \\ \nearrow \hat{r}(Q) & & \uparrow & & \nwarrow \hat{R}(Q) \\ & & GL(Q) \cdot \text{Im } \otimes^a(v') & & \end{array}$$

On introduit un nouveau foncteur  $V_{a,p}$  de  $\mathfrak{B}$  dans  $\mathfrak{Aff}$ , sous-foncteur de  $\otimes^a(\cdot)'$ , en posant

$$V_{a,p}(Q) = \begin{cases} \otimes^a(Q)' & \text{si } \dim Q \leq \dim P = p \\ \overline{GL(Q) \cdot \text{Im } \otimes^a(v')} & \text{si } \dim Q \geq \dim P. \end{cases}$$

Avec les notations ci-dessus, on a la

PROPOSITION. *La suite*

$$\text{Hom}(\cdot, N)/G \xrightarrow{\tilde{r}} V_{a,p} \xrightarrow{\tilde{R}} \otimes^b(\cdot)'$$

*est une présentation de  $\text{Hom}(\cdot, N)/G$ .*

EXEMPLE. Lorsque  $G = O(N)$ , cela signifie que  $\text{Hom}(Q, N)/O(N)$  est isomorphe au cône  $C_n(Q) \subset S^2(Q)'$  des formes bilinéaires symétriques sur  $Q$  dont le support est de dimension  $\leq n$ .

(0.2.4) Le théorème (0.1.4) est conséquence immédiate des deux propositions précédentes et de la

PROPOSITION. *Le foncteur  $V_{a,p}$  admet une présentation du type*

$$V_{a,p} \hookrightarrow \otimes^a(\cdot)' \xrightarrow{R_{a,p}} \otimes^{\sigma(a,p)}(\cdot)'$$

où  $\sigma(a, p)$  est un multiindice ne dépendant que de  $a$  et  $p$ .

Sa démonstration est technique et se fait en exhibant  $R_{a,p}$ ; il serait intéressant d'avoir une preuve procédant d'arguments "abstraites."

EXEMPLE. La suite

$$\begin{array}{ccccc} C_n(Q) & \hookrightarrow & S^2(Q)' & \xrightarrow{R_{2,n}^S(Q)} & S^2\left(\bigwedge^{n+1} Q\right)' \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{Hom}(Q, Q') & \xrightarrow{\bigwedge^{n+1}(Q)} & \text{Hom}\left(\bigwedge^{n+1} Q, \bigwedge^{n+1} Q'\right) \end{array}$$

est une présentation de  $C_n(Q)$ . En conclusion, avec les notations de l'exemple, la

suite

$$\mathrm{Hom}(\cdot, N)/O(N) \xrightarrow{\Gamma_t} S^2(\cdot)' \xrightarrow{R_{2,n}^S} S^2\left(\bigwedge^{n+1}(\cdot)\right)'$$

est une présentation de  $\mathrm{Hom}(\cdot, N)/O(N)$ .

Les autres exemples classiques peuvent se traiter selon le même esprit (cf. [9]).

(0.2.5) *Remarque.* Lors des démonstrations, on utilise la théorie des représentations du groupe symétrique; c'est essentiellement pour cela qu'on suppose le corps de base  $k$  de caractéristique nulle.

(0.3.1) Deux points de vue s'offraient pour la rédaction de ce travail: le point de vue algébrique où l'on traite le foncteur  $k[\mathrm{Hom}(\cdot, N)]^G$  et le point de vue géométrique où c'est du foncteur  $\mathrm{Hom}(\cdot, N)/G$  dont il s'agit. Outre des avantages subjectifs, la première façon est directe et élémentaire; la seconde par contre permet des définitions simples (celles des variétés  $V_{a,p}(Q)$  et des morphismes  $X_i(Q)$  par exemple). On a choisi celui-ci pour l'introduction et celui-là pour l'exposé.

Ce travail se compose de deux parties très largement indépendantes, les §§1–3 d'une part, et les §§4–5 de l'autre.

Au §1, on étudie les transformations naturelles entre les foncteurs  $S^*\otimes^a$ ,  $a \in \mathbf{N}^I$ . Au §2, on démontre un "demi théorème de présentabilité" pour un type de foncteurs. Au §3, on applique les résultats du paragraphe précédent au foncteur  $k[\mathrm{Hom}(\cdot, N)]^G$ .

Le §4 est consacré à des rappels et preuves de résultats relatifs à l'algèbre du groupe symétrique. Au §5, on démontre la proposition (0.2.4).

(0.4.1) *Conventions.* Le corps de base  $k$  est de caractéristique nulle.

Lorsqu'on parlera d'espaces vectoriels, sans autre précision, il s'agira toujours d'espaces vectoriels de dimension finie.

(0.4.2) *Notations.*

$\mathfrak{V}$ : la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie.

$\bar{\mathfrak{V}}$ : la catégorie des espaces vectoriels (non nécessairement de dimension finie).

$\mathfrak{A}$ : la catégorie des algèbres commutatives (non nécessairement de type fini).

$Q$ : un espace vectoriel.

$Q'$ : le dual de  $Q$ .

$S^*(Q)$ : l'algèbre symétrique de  $Q$ .

$\otimes^*(Q)$ : l'algèbre tensorielle de  $Q$ .

$S^n(Q)$ : la puissance symétrique  $n^{\text{eme}}$  de  $Q$ .

$\otimes^n(Q)$ : la puissance tensorielle  $n^{\text{eme}}$  de  $Q$ .

$k[Q] = S^*(Q')$ : l'algèbre des fonctions polynomiales sur  $Q$ .

Soit  $\varphi: Q_1 \rightarrow Q_2$  une application polynomiale; on note  $k[\varphi]: k[Q_2] \rightarrow k[Q_1]$  l'homomorphisme induit par  $\varphi$  et défini par  $k[\varphi](p) = p \circ \varphi$ ,  $p \in k[Q_2]$ .

Soit  $\psi: S^*(Q_1) \rightarrow S^*(Q_2)$  un homomorphisme; on note  $\psi_+$  la restriction de  $\psi$  à l'idéal maximal de  $S^*(Q_1)$  engendré par  $Q_1$ .

$I, J, K$ : des ensembles finis.

Soit  $a, b \in \mathbf{N}^I$ ; on désigne par  $ab$  l'élément de  $\mathbf{N}^I$  défini par  $(ab)(i) = a(i)b(i)$ ,  $i \in I$ ; on note  $|a| = \sum_{i \in I} a(i)$ ; on écrit  $a \leq b$  si  $a(i) \leq b(i)$  pour tout  $i \in I$ .

## §1. Transformations naturelles entre les $S^* \otimes^a$

(1.1.0) On considère la catégorie  $\mathfrak{B}$  des espaces vectoriels de dimension finie et la catégorie  $\tilde{\mathfrak{B}}$  des espaces vectoriels non nécessairement de dimension finie. Dans ce paragraphe on s'intéresse aux transformations naturelles (dans  $\tilde{\mathfrak{B}}$ ) entre certains types de foncteurs de  $\mathfrak{B}$  dans  $\tilde{\mathfrak{B}}$ .

(1.1.1) Soit  $Q$  un espace vectoriel et  $A$  un foncteur covariant de  $\mathfrak{B}$  dans  $\tilde{\mathfrak{B}}$ . L'espace vectoriel  $A(Q)$  est muni naturellement d'une structure de  $GL(Q)$ -module:  $s \cdot x = A(s)x$ ,  $s \in GL(Q)$ ,  $x \in A(Q)$ . Lorsqu'on parlera du  $GL(Q)$ -module  $A(Q)$ , il s'agira toujours de cette structure. Lorsque  $A = \otimes^*$  ou  $S^*$ , on a la structure habituelle de  $GL(Q)$ -module sur  $\otimes^*(Q)$  ou  $S^*(Q)$ ; on remarque en passant que ces deux derniers  $GL(Q)$ -modules sont semi-simples (cf. [2] chap. 2).

Soit  $A$  et  $B$  deux foncteurs covariants de  $\mathfrak{B}$  dans  $\tilde{\mathfrak{B}}$ . Pour signifier que  $\nu$  est une transformation naturelle (dans  $\tilde{\mathfrak{B}}$ ) de  $A$  vers  $B$ , on écrira souvent  $\nu: A \rightarrow B$ . Si  $\nu$  est une telle transformation, il est clair que la valeur  $\nu(Q) \in \text{Hom}(A(Q), B(Q))$  de  $\nu$  en l'espace vectoriel  $Q$  est un homomorphisme de  $GL(Q)$ -modules (on parlera aussi d'application linéaire  $GL(Q)$ -équivariante).

(1.1.2) On désigne par  $I$  l'ensemble  $\{1, \dots, r\}$ . Soit  $a \in \mathbf{N}^I$ . Pour tout espace vectoriel  $Q$ , on note

$$\otimes^a(Q) = \bigoplus_{i \in I} \otimes^{a(i)}(Q).$$

On définit ainsi le foncteur  $\otimes^a$ .

(1.1.3) EXEMPLE. Soit  $a \in \mathbf{N}^I$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . Il est bien connu qu'on a un isomorphisme naturel

$$S^n \otimes^a \rightarrow \bigoplus_{\sum d(i)=n} (S^{d(1)} \otimes^{a(1)}) \otimes \dots \otimes (S^{d(r)} \otimes^{a(r)}).$$

L'espace vectoriel  $S^* \otimes^a(Q)$  est muni d'une graduation de type  $\mathbf{N}^I$ , sa composante homogène de degré  $d \in \mathbf{N}^I$ ,  $[S^* \otimes^a(Q)]^d$ , étant isomorphe à  $S^{d(1)} \otimes^{a(1)}(Q) \otimes \dots \otimes S^{d(r)} \otimes^{a(r)}(Q)$ . On note  $\mu_a^d(Q)$  le composé des applications canoniques

$$\bigotimes^{|ad|}(Q) \xrightarrow{\sim} [\bigotimes^{a(1)d(1)}(Q)] \otimes \dots \otimes [\bigotimes^{a(r)d(r)}(Q)] \rightarrow [S^* \otimes^a(Q)]^d \hookrightarrow S^* \otimes^a(Q)$$

et  $\sigma_a^d(Q)$  le composé de

$$\begin{aligned} S^* \otimes^a(Q) &\xrightarrow{pr} [S^* \otimes^a(Q)]^d \rightarrow [S^{d(1)} \otimes^{a(1)}(Q)] \otimes \dots \otimes [S^{d(r)} \otimes^{a(r)}(Q)] \\ &\rightarrow [\bigotimes^{a(1)d(1)}(Q)] \otimes \dots \otimes [\bigotimes^{a(r)d(r)}(Q)] \xrightarrow{\sim} \bigotimes^{|ad|}(Q). \end{aligned}$$

On obtient ainsi deux transformations naturelles  $\mu_a^d$  et  $\sigma_a^d$  telles que  $\mu_a^d \circ \sigma_a^d$  est la projection de  $S^* \otimes^a$  sur sa composante homogène de degré  $d \in \mathbf{N}^I$ .

(1.1.4) Soit  $Q$  et  $V$  deux espaces vectoriels et  $f: V \rightarrow S^* \otimes^a(Q)$  une application linéaire,  $a \in \mathbf{N}^I$ . Pour  $d \in \mathbf{N}^I$ , on pose

$$f^d = \sigma_a^d(Q) \circ f: V \rightarrow \bigotimes^{|ad|}(Q).$$

De cette manière, on a une décomposition canonique de  $f$  en

$$f = \sum_{d \in \mathbf{N}^I} \mu_a^d(Q) \circ f^d.$$

Si  $V$  est un  $GL(Q)$ -module et  $f$  est  $GL(Q)$ -équivariant, alors les  $f^d$  sont aussi  $GL(Q)$ -équivariants.

(1.1.5) EXEMPLE. Soit  $n \in \mathbf{N}$ . On note  $\tau(Q)$  la représentation usuelle de l'algèbre  $k[\mathfrak{S}(n)]$  du groupe  $\mathfrak{S}(n)$  des permutations de  $\{1, \dots, n\}$  dans  $\bigotimes^n(Q)$ . Soit  $x \in k[\mathfrak{S}(n)]$ ; l'application  $\tau(\cdot)(x)$  qui à tout espace vectoriel  $Q$  fait correspondre  $\tau(Q)(x) \in \text{End}(\bigotimes^n(Q))$  est une transformation naturelle de  $\bigotimes^n$  vers  $\bigotimes^n$ .



(1.1.6) A ce propos, on rappelle le résultat fondamental suivant (cf. [1] §67, [2] chap. 2 §2, [10] chap. IV §4): le commutant de  $\text{Im } \tau(Q)$  dans  $\text{End } (\otimes^n(Q))$  est engendré par l'image de la représentation de  $GL(Q)$  dans  $\otimes^n(Q)$ . D'après le théorème de densité ([4] chap. 17 §3) on a donc

$$\text{End}_{GL(Q)}(\otimes^n(Q)) = \tau(Q)(k[\mathfrak{S}(n)]).$$

D'un autre côté on a

$$\text{Hom}_{GL(Q)}(\otimes^n(Q), \otimes^m(Q)) = (0) \quad \text{pour } m \neq n.$$

En effet, si  $\alpha : \otimes^n(Q) \rightarrow \otimes^m(Q)$  est une application linéaire,  $\alpha \neq 0$ , on a, pour l'homothétie  $s \in GL(Q)$  de rapport  $\lambda$

$$\alpha(s \cdot x) = \alpha(\lambda^n x) = \lambda^n \alpha(x)$$

et

$$s \cdot \alpha(x) = \lambda^m \alpha(x);$$

on doit donc avoir  $m = n$  si on veut que  $\alpha$  soit  $GL(Q)$ -équivariant.

(1.1.7) PROPOSITION. Soit  $\nu : \otimes^b \rightarrow S^* \otimes^a$ ,  $a \in \mathbf{N}^I$ ,  $b \in \mathbf{N}^J$ , une transformation naturelle. Alors  $\nu$  est somme de transformations naturelles du type

$$\mu_a^d \circ \tau(\cdot)(x), \quad d \in \mathbf{N}^I, \quad x \in k[\mathfrak{S}(|ad|)].$$

*Preuve.* a) Il suffit de faire la démonstration lorsque  $\text{Card}(J) = 1$ , i.e. lorsque  $\otimes^b = \otimes^n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ .

Soit  $Q$  un espace vectoriel. On considère la décomposition

$$\nu(Q) = \sum_d \mu_a^d(Q) \circ \nu(Q)^d$$

donnée en (1.1.4); de la définition de  $\nu(Q)^d$  résulte que  $\nu(\cdot)^d$  est une transformation naturelle  $\otimes^n \rightarrow \otimes^{|ad|}$ . Une telle transformation n'est différente de 0 que si  $n = |ad|$  (cf. (1.1.6)).

b) Il suffit donc de démontrer que toute transformation naturelle  $\mu : \otimes^n \rightarrow \otimes^n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , est de la forme  $\tau(\cdot)(x)$ ,  $x \in k[\mathfrak{S}(n)]$ . On se donne un espace vectoriel  $P$ ,  $\dim P \geq n$ . On sait que  $\text{End}_{GL(P)}(\otimes^n(P)) = \tau(P)(k[\mathfrak{S}(n)])$  (1.1.6) et que la représentation  $\tau(P)$  est injective (cf. [10] chap. IV). On note  $x$  l'élément de

$k[\mathfrak{S}(n)]$  tel que  $\tau(P)(x) = \mu(P)$ . On vérifie facilement qu'on a alors  $\tau(Q)(x) = \mu(Q)$  lorsque  $\dim Q \leq \dim P$ . Lorsque  $\dim Q > \dim P$ , on prend  $y \in k[\mathfrak{S}(n)]$  tel que  $\tau(Q)(y) = \mu(Q)$ ; on a alors comme avant  $\tau(P)(y) = \mu(P)$ , d'où  $\tau(P)(y) = \tau(P)(x)$  et enfin  $y = x$  par injectivité de  $\tau(P)$ . On a donc  $\mu = \tau(\cdot)(x)$  ce qui achève la démonstration.

(1.2.1) Le cas particulier des transformations naturelles de  $\otimes^a$  vers  $S^* \otimes^b$  lorsque  $b \in \mathbf{N}^J$  est la fonction  $b(j) = 1, j \in J$ , admet un traitement intrinsèque très agréable.

Soit  $a \in \mathbf{N}^I$  et  $N$  un espace vectoriel. A tout élément  $t \in \otimes^a(N)'$  on associe une transformation naturelle  $\chi_t: \otimes^a \rightarrow S^*(\cdot \otimes N')$  de la manière que voici: pour tout espace vectoriel  $Q$ , on pose

$$\begin{aligned} \chi_t(Q): \otimes^a(Q) &\rightarrow S^*(Q \otimes N') \simeq k[\text{Hom}(Q, N)] \\ x &\mapsto [u \mapsto t \circ \otimes^a(u)(x)] \end{aligned}$$

( $u \in \text{Hom}(Q, N)$ ).

On désigne par  $\varepsilon: S^*(N \otimes N') \rightarrow k$  l'homomorphisme qui prolonge l'application

$$\begin{aligned} N \otimes N' &\rightarrow k \\ x \otimes \xi &\mapsto \langle \xi, x \rangle. \end{aligned}$$

Via l'isomorphisme  $S^*(N \otimes N') \simeq k[\text{Hom}(N, N)]$ ,  $\varepsilon$  devient l'homomorphisme d'évaluation au point  $1_N \in \text{Hom}(N, N)$ .

(1.2.2) PROPOSITION. Soit  $\nu: \otimes^a \rightarrow S^*(\cdot \otimes N')$  une transformation naturelle,  $a \in \mathbf{N}^I$ . Il existe alors un unique  $t \in \otimes^a(N)'$  tel que  $\nu = \chi_t$ ; de manière précise,  $t = \varepsilon \circ \nu(N)$ .

*Preuve.* Soit  $Q$  un espace vectoriel et  $x \in \otimes^a(Q)$ . On interprète l'élément  $\nu(Q)(x)$  comme une fonction polynomiale sur  $\text{Hom}(Q, N)$ . Il s'agit de calculer  $[\nu(Q)(x)](u)$  pour tout  $u \in \text{Hom}(Q, N)$ . Puisque  $\nu$  est une transformation naturelle, pour un tel  $u$ , on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \otimes^a(Q) & \xrightarrow{\nu_Q} & S^*(Q \otimes N') \simeq k[\text{Hom}(Q, N)] \\ \downarrow \otimes^a u & & \downarrow S^*(u \otimes 1) \\ \otimes^a(N) & \xrightarrow{\nu_N} & S^*(N \otimes N') \simeq k[\text{Hom}(N, N)]. \end{array}$$

Or

$$\begin{aligned} [\nu(Q)(x)](u) &= [S^*(u \otimes 1)(\nu(Q)(x))](1_N) \\ &= [\varepsilon \circ S^*(u \otimes 1) \circ \nu(Q)](x) \\ &= [\varepsilon \circ \nu(N) \circ \otimes^a(u)](x) = [\chi_{\varepsilon \circ \nu(N)}(Q)(x)](u) \end{aligned}$$

d'où l'affirmation.

(1.3.1) LEMME DE PROLONGEMENT. Soit  $Q$  un espace vectoriel et  $f: \otimes^b(Q) \rightarrow S^* \otimes^a(Q)$  une application linéaire  $GL(Q)$ -équivariante,  $a \in \mathbf{N}^I$ ,  $b \in \mathbf{N}^J$ . Il existe alors une transformation naturelle  $\varphi: \otimes^b \rightarrow S^* \otimes^a$  telle que  $\varphi(Q) = f$ .

*Preuve.* Il suffit de démontrer la proposition lorsque  $\text{Card}(J) = 1$ , i.e. lorsque  $\otimes^b = \otimes^n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . On considère la décomposition

$$f = \sum \mu_a^d(Q) \circ f^d$$

donnée en (1.1.4), où  $f^d: \otimes^n(Q) \rightarrow \otimes^{|ad|}(Q)$  est une application linéaire  $GL(Q)$ -équivariante. Il reste donc à prouver que, pour toute application linéaire  $GL(Q)$ -équivariante  $g: \otimes^n(Q) \rightarrow \otimes^m(Q)$ , il existe une transformation naturelle  $\gamma: \otimes^n \rightarrow \otimes^m$  telle que  $\gamma(Q) = g$ ; cela résulte immédiatement de (1.1.6).

(1.3.2) *Remarque.* Le prolongement  $\varphi$  de  $f$  n'est pas unique. On peut cependant trouver un prolongement canonique de  $f$  de la manière que voici.

On se ramène comme avant au cas d'une application linéaire  $GL(Q)$ -équivariante  $g: \otimes^n(Q) \rightarrow \otimes^n(Q)$ . Le noyau de  $\tau(Q): k[\mathfrak{S}(n)] \rightarrow \text{End}(\otimes^n(Q))$  est un idéal bilatère de l'algèbre semi-simple  $k[\mathfrak{S}(n)]$ ; il admet donc un supplémentaire canonique  $E$ ; on note alors  $x \in E$  l'élément tel que  $\tau(Q)(x) = g$  et on prend  $\tau(\cdot)(x)$  comme prolongement canonique de  $g$ .

(1.4.0) On considère maintenant les foncteurs du type  $S^* \otimes^a$  comme prenant leurs valeurs dans la catégorie  $\mathfrak{A}$  des algèbres commutatives (et non plus seulement dans  $\mathfrak{B}$ ) et on s'intéresse aux transformations naturelles (dans  $\mathfrak{A}$ ) entre ceux-ci.

(1.4.1) La proposition (1.1.7) fournit une description de toutes les transformations naturelles  $S^* \otimes^b \rightarrow S^* \otimes^a$ ; quant à (1.3.1), il donne immédiatement le résultat suivant:

LEMME DE PROLONGEMENT. Soit  $Q$  un espace vectoriel et  $f: S^* \otimes^b(Q) \rightarrow S^* \otimes^a(Q)$  un homomorphisme  $GL(Q)$ -équivariant,  $a \in \mathbf{N}^I$ ,  $b \in \mathbf{N}^J$ . Il existe alors une transformation naturelle (dans  $\mathfrak{A}$ )  $\varphi: S^* \otimes^b \rightarrow S^* \otimes^a$  telle que  $\varphi(Q) = f$ .

(1.4.2) On note encore  $\chi_t(Q)$  le prolongement de  $\chi_t(Q): \otimes^a(Q) \rightarrow S^*(Q \otimes N')$  à  $S^* \otimes^a(Q)$ ,  $t \in \otimes^a(N)'$  (cf. (1.2.1)); on a donc une transformation naturelle (dans  $\mathfrak{A}$ )  $\chi_t: S^* \otimes^a \rightarrow S^*(. \otimes N')$ . La proposition (1.2.2) donne la

**PROPOSITION.** Soit  $\nu: S^* \otimes^a \rightarrow S^*(. \otimes N')$  une transformation naturelle (dans  $\mathfrak{A}$ ),  $a \in \mathbf{N}^I$ . Il existe alors un unique  $t \in \otimes^a(N)'$  tel que  $\nu = \chi_t$ , de manière précise,  $t = \varepsilon \cdot \nu(N)|_{\otimes^a(N)}$ .

## §2. Les foncteurs $A_t$

(2.1.0) On se donne pour tout ce paragraphe un espace vectoriel  $N$ .

Soit  $A$  un sous-foncteur de  $S^*(. \otimes N')$  et  $p \in \mathbf{N}$ . On considère la propriété d'extension  $E(p)$  que voici:

Soit  $P$  un espace vectoriel de dimension  $p$ ; toute transformation naturelle  $\chi: S^* \otimes^a \rightarrow S^*(. \otimes N')$ ,  $a \in \mathbf{N}^I$ , telle que  $\text{Im } \chi(P) \subset A(P)$  a son image dans  $A$ , i.e., pour tout  $Q$ ,  $\text{Im } \chi(Q) \subset A(Q)$ . Autrement dit, notant  $\iota$  "l'inclusion"  $A \rightarrow S^*(. \otimes N')$ , si  $\text{Im } \chi(P) \subset A(P)$ , alors  $\chi$  se factorise à travers  $\iota$  en une transformation naturelle  $\gamma: S^* \otimes^a \rightarrow A$ .

On considère ensuite la condition de finitude  $F(p)$ :

Soit  $P$  un espace vectoriel de dimension  $p$ ; l'algèbre  $A(P)$  est de type fini.

Dans ce paragraphe on va décrire les sous-foncteurs de  $S^*(. \otimes N')$  possédant les propriétés  $E(p)$  et  $F(p)$  pour un entier  $p \geq \dim N$ , puis démontrer que ces foncteurs admettent une présentation d'un type particulier. Au paragraphe suivant, on démontrera que le foncteur  $S^*(. \otimes N')^G$  possède  $E(p)$ ,  $p \geq \dim N$ .

(2.1.1) Voici un autre exemple. Soit  $I = \{1, \dots, r\}$ ,  $a \in \mathbf{N}^I$  et  $t \in \otimes^a(N)'$ . On considère la transformation naturelle

$$\chi_t: S^* \otimes^a \rightarrow S^*(. \otimes N')$$

décrite en (1.4.2); géométriquement  $\chi_t(Q)$  est le comorphisme du morphisme polynomial

$$\begin{aligned} X_t(Q): Q' \otimes N &\simeq \text{Hom}(Q, N) \rightarrow \otimes^a(Q)' \\ u &\mapsto t \circ \otimes^a(u) = \otimes^a(u')(t) \end{aligned}$$

( $u'$  désigne l'application transposée de  $u$ ). On note  $A_t$  le sous-foncteur  $\text{Im } \chi_t$  de  $S^*(\cdot \otimes N')$ . Il est évident que  $A_t$  possède  $F(p)$  pour tout  $p$ . De plus

(2.1.2) LEMME. *Le foncteur  $A_t$  possède la propriété  $E(p)$  pour tout  $p \geq \dim N$ .*

*Preuve.* Soit  $\chi: S^* \otimes^b \rightarrow S^*(\cdot \otimes N')$  une transformation naturelle,  $b \in \mathbf{N}^J$ ; d'après (1.4.2) il existe  $s \in \otimes^b(N)'$  tel que  $\chi = \chi_s$ . Soit  $P$  un espace vectoriel de dimension  $p \geq \dim N$ ; on suppose que  $\text{Im } \chi_s(P) \subset A_t(P) = \text{Im } \chi_t(P)$ . Puisque le  $GL(P)$ -module  $S^* \otimes^a(P)$  est semi-simple, il existe un homomorphisme  $f: S^* \otimes^b(P) \rightarrow S^* \otimes^a(P)$   $GL(P)$ -équivariant tel que  $\chi_t(P) \circ f = \chi_s(P)$ . On désigne par  $\varphi: S^* \otimes^b \rightarrow S^* \otimes^a$  une transformation naturelle telle que  $\varphi(P) = f$  (cf. (1.4.1)).

On note  $\Phi(Q): \otimes^a(Q)' \rightarrow \otimes^b(Q)'$  le morphisme polynomial défini par  $k[\Phi(Q)] = \varphi(Q)$ . Par hypothèse, on a

$$\Phi(P) \circ X_t(P) = X_s(P);$$

Pour  $u \in \text{Hom}(P, N)$ , on a donc

$$\Phi(P) \circ \otimes^a(u')(t) = \otimes^b(u')(s),$$

d'où

$$\otimes^b(u') \circ \Phi(N)(t) = \otimes^b(u')(s)$$

et enfin

$$\Phi(N)(t) = s$$

puisqu'il existe des éléments surjectifs dans  $\text{Hom}(P, N)$ .

Un calcul semblable montre ensuite que, pour tout espace vectoriel  $Q$ ,  $\Phi(Q) \circ X_t(Q) = X_s(Q)$ , i.e. que  $\chi_t \circ \varphi = \chi_s = \chi$ , d'où l'affirmation.

(2.2.1) LEMME. *Soit  $V$  un sous- $GL(Q)$ -module de dimension finie de  $S^* \otimes^a(Q)$ . Il existe alors  $b \in \mathbf{N}^J$  et une application linéaire surjective  $GL(Q)$ -équivariante  $\otimes^b(Q) \rightarrow V$ .*

L'assertion provient de (1.1.3) et de la semi-simplicité des  $GL(Q)$ -modules en question.

(2.2.2) Soit  $L$  une sous-algèbre de type fini de  $S^*(P \otimes N')$ ; on suppose que  $L$  est stable par  $GL(P)$ . Il existe alors  $a \in \mathbf{N}^I$  et un homomorphisme  $GL(P)$ -équivariant surjectif  $g: S^* \otimes^a(P) \rightarrow L$ . Soit en effet  $V$  un sous- $GL(P)$ -module de

dimension finie de  $L$  qui engendre  $L$ ; puisque  $P \otimes N'$  est  $GL(P)$ -isomorphe à  $P \oplus \cdots \oplus P$ , il résulte de (2.2.1) qu'il existe  $a \in \mathbf{N}^I$  et une application linéaire surjective  $GL(P)$ -équivariante  $g_1 : \otimes^a(P) \rightarrow V$ . On prend pour  $g$  le prolongement de  $g_1$ .

(2.2.3) PROPOSITION. Soit  $A$  un sous-foncteur de  $S^*(\cdot \otimes N')$  vérifiant  $E(p)$  et  $F(p)$  pour un entier  $p \geq \dim N$ . Soit  $P$  un espace vectoriel de dimension  $p$  et

$$g : S^* \otimes^a(P) \rightarrow A(P)$$

un homomorphisme  $GL(P)$ -équivariant surjectif,  $a \in \mathbf{N}^I$  (cf. (2.2.2)). Il existe alors une transformation naturelle et une seule

$$\gamma : S^* \otimes^a \rightarrow A$$

telle que  $\gamma(P) = g$ ; pour tout  $Q$ ,  $\gamma(Q)$  est surjectif; il existe de plus  $t \in \otimes^a(N)'$  tel que  $A = A_t$ .

COROLLAIRE. Soit  $A$  un sous-foncteur de  $S^*(\cdot \otimes N')$  vérifiant  $E(p)$  et  $F(p)$  pour un entier  $p \geq \dim N$ . Alors  $A$  vérifie  $E(q)$  pour tout  $q \geq \dim N$  et  $F(q)$  pour tout  $q \in \mathbf{N}$ .

Cela résulte de la proposition et de (2.1.2).

*Preuve de la proposition.*

a) On note  $\iota : A \rightarrow S^*(\cdot \otimes N')$  l'injection canonique. Alors  $\iota(P) \circ g : S^* \otimes^a(P) \rightarrow S^*(P \otimes N')$  est un homomorphisme  $GL(P)$ -équivariant; d'après le lemme de prolongement (1.4.1) il existe  $\chi : S^* \otimes^a \rightarrow S^*(\cdot \otimes N')$  telle que  $\chi(P) = \iota(P) \circ g$ . Ce prolongement est en fait unique: en effet, si  $\chi_1$  en était un autre, on aurait  $\chi_1(N) = \chi(N)$  puisque  $\dim N \leq \dim P$ , d'où  $\chi = \chi_1$  d'après (1.4.2).

Comme  $A$  possède la propriété  $E(p)$ ,  $\chi$  se factorise à travers  $\iota$  en une transformation naturelle  $\gamma : S^* \otimes^a \rightarrow A$  telle que  $\gamma(P) = g$ ; de l'unicité de  $\chi$  résulte ensuite l'unicité du prolongement  $\gamma$  de  $g$ , d'où la première affirmation.

b) L'homomorphisme  $\gamma(Q)$  est surjectif lorsque  $\dim Q \leq \dim P$ .

On se donne une application linéaire surjective  $u : P \rightarrow Q$ . Par fonctorialité  $A(u)$  est surjectif; par suite  $A(u) \circ \gamma(P) = \gamma(Q) \circ S^* \otimes^a(u)$  est surjectif; il en est donc de même de  $\gamma(Q)$ .

c) L'homomorphisme  $\gamma(Q)$  est surjectif lorsque  $\dim Q \geq \dim P (\geq \dim N)$ .

Soit  $V$  un sous- $GL(Q)$ -module de dimension finie de  $A(Q)$ ; il faut prouver

que  $V$  est contenu dans  $\text{Im } \gamma(Q)$ . D'après (2.2.1) il existe  $b \in \mathbf{N}^j$  et une application linéaire  $GL(Q)$ -équivariante  $f: \otimes^b(Q) \rightarrow S^*(Q \otimes N')$  dont l'image est  $V$ ; du lemme de prolongement (1.3.1) résulte qu'il existe  $\varphi: \otimes^b \rightarrow S^*(\cdot \otimes N')$  telle que  $\varphi(Q) = f$ .

On se donne une application linéaire surjective  $v: Q \rightarrow P$ . On a la situation

$$\begin{array}{ccccc}
 \otimes^b(Q) & \xrightarrow{\varphi(Q)=f} & S^*(P \otimes N') & & \\
 \otimes^b(v) \downarrow & \searrow & \downarrow S^*(v \otimes 1) & & \\
 & A(Q) & \hookrightarrow & & \\
 \otimes^b(P) & \xrightarrow{\varphi(P)} & S^*(P \otimes N') & & \\
 & \searrow & \downarrow A(v) & & \\
 & & A(P) & \hookrightarrow & 
 \end{array}$$

On voit alors immédiatement que  $\text{Im } \varphi(P) \subset A(P)$ .

Maintenant, puisque  $\gamma(P): S^* \otimes^a(P) \rightarrow A(P)$  est surjectif et puisque le  $GL(P)$ -module  $S^* \otimes^a(P)$  est semi-simple, il existe une application linéaire  $GL(P)$ -équivariante  $m: \otimes^b(P) \rightarrow S^* \otimes^a(P)$  telle que  $\gamma(P) \circ m = \varphi(P)$ . On prend  $\mu: \otimes^b \rightarrow S^* \otimes^a$  telle que  $\mu(P) = m$  ((1.3.1)). On a la situation

$$\begin{array}{ccccc}
 & \otimes^b(Q) & \xrightarrow{f=\varphi(Q)} & S^*(Q \otimes N') & \\
 \mu(Q) \swarrow & \downarrow \gamma(Q) & \searrow & \downarrow S^*(v \otimes 1) & \\
 S^* \otimes^a(Q) & \xrightarrow{\quad} & A(Q) & \hookrightarrow & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
 & \otimes^b(P) & \xrightarrow{\varphi(P)} & S^*(P \otimes N') & \\
 \mu(P) \swarrow & \downarrow \gamma(P) & \searrow & \downarrow & \\
 S^* \otimes^a(P) & \xrightarrow{\quad} & A(P) & \hookrightarrow & 
 \end{array}$$

et il reste à démontrer que la face supérieure de ce diagramme commute. On considère alors  $f - \gamma(Q) \circ \mu(Q): \otimes^b(Q) \rightarrow S^*(Q \otimes N')$ : c'est un homomorphisme de  $GL(Q)$ -module dont l'image est contenue dans le noyau de  $S^*(v \otimes 1)$ ; du lemme (2.2.4) ci-dessous, résulte que cet homomorphisme est identiquement nul. On a donc  $f = \gamma(Q) \circ \mu(Q)$ , d'où  $V = \text{Im } f \subset \text{Im } \gamma(Q)$ ; l'assertion c) est démontrée.

d) On désigne par  $t \in \otimes^a(N)'$  l'élément tel que  $\chi = \chi_t$  (cf. (1.4.2) et la partie a) de la preuve). Puisque  $\chi = \iota \circ \gamma$  les foncteurs  $\text{Im } \chi = A_t$  et  $\text{Im } \gamma = A$  coïncident; cela termine la démonstration de la proposition.

(2.2.4) LEMME. Soit  $P, Q$  deux espaces vectoriels avec  $\dim Q \geq \dim P \geq \dim N$  et  $v: Q \rightarrow P$  une application linéaire surjective. Soit  $V$  un  $GL(Q)$ -module (non nécessairement de dimension finie) et  $f: V \rightarrow S^*(Q \otimes N')$  une application linéaire  $GL(Q)$ -équivariante. Si  $\text{Im } f \subset \text{Ker } (S^*(v \otimes 1))$ , alors  $f = 0$ .

*Preuve.* L'homomorphisme  $S^*(v \otimes 1)$  s'interprète géométriquement comme

l'application linéaire

$$v_*: \text{Hom}(P, N) \simeq P' \otimes N \rightarrow Q' \otimes N \simeq \text{Hom}(Q, N)$$

$$u \mapsto u \circ v$$

et  $\text{Ker}(S^*(v \otimes 1))$  comme l'idéal de  $\text{Im } v_*$  dans  $S^*(Q \otimes N')$ . Comme  $\dim Q \geq \dim P \geq \dim N$ ,  $GL(Q) \cdot \text{Im } v_* = \text{Hom}(Q, N)$ ; il résulte de là que  $(0)$  est le seul sous- $GL(Q)$ -module de  $S^*(Q \otimes N')$  qui est contenu dans  $\text{Ker}(S^*(v \otimes 1))$ . Enfin, puisque  $\text{Im } f$  est un sous- $GL(Q)$ -module, on a bien  $f = 0$ .

(2.3.1) Soit  $m \in \mathbf{N}$  et  $a \in \mathbf{N}^I$ . On se donne un espace vectoriel  $M$  de dimension  $m$ . Pour tout espace vectoriel  $Q$ , on considère

$$S^* \otimes^a(u): S^* \otimes^a(Q) \rightarrow S^* \otimes^a(M)$$

où  $u: Q \rightarrow M$  est une application linéaire de rang maximum. On note  $\mathfrak{l}_{a,m}(Q)$  le plus grand sous- $GL(Q)$ -module de  $S^* \otimes^a(Q)$  qui est contenu dans  $\text{Ker}(S^* \otimes^a(u))$ : c'est un idéal de  $S^* \otimes^a(Q)$  qui est indépendant du choix de  $u$ . On a  $\mathfrak{l}_{a,m}(Q) = 0$  lorsque  $\dim Q \leq m$ . Géométriquement,  $\mathfrak{l}_{a,m}(Q)$  est l'idéal de la sous-variété  $\overline{GL(Q) \cdot \text{Im}(\otimes^a(u'))}$  de  $\otimes^a(Q)'$  formée des formes multilinéaires de support de dimension  $\leq m$  (pour toute partie  $E$  d'un espace vectoriel, on note  $\bar{E}$  l'adhérence de  $E$  pour la topologie de Zariski). On désignera par  $C_{a,m}(Q)$  le quotient  $S^* \otimes^a(Q) / \mathfrak{l}_{a,m}(Q)$  et par  $\theta_{a,m}(Q)$  ou encore  $\theta(Q)$  l'homomorphisme canonique  $S^* \otimes^a(Q) \rightarrow C_{a,m}(Q)$ ;  $C_{a,m}$  est un foncteur covariant de  $\mathfrak{B}$  dans  $\mathfrak{A}$  et  $\theta$  une transformation naturelle  $S^* \otimes^a \rightarrow C_{a,m}$ .

(2.3.2) LEMME. Soit  $p \in \mathbf{N}$ ,  $p \geq \dim N$ ; toute transformation naturelle  $\chi: S^* \otimes^a \rightarrow S^*(\cdot \otimes N')$ ,  $a \in \mathbf{N}^I$ , se factorise à travers  $\theta: S^* \otimes^a \rightarrow C_{a,p}$  en une transformation naturelle  $\bar{\chi}: C_{a,p} \rightarrow S^*(\cdot \otimes N')$ .

*Preuve.* Soit  $Q$  un espace vectoriel de dimension  $\geq p$  et  $v: Q \rightarrow P$  une application linéaire surjective. On a la situation suivante:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{l}_{a,p}(Q) & \hookrightarrow & \text{Ker}(S^*(\otimes^a(v))) & & \\ & \searrow & \downarrow & & \\ & & S^* \otimes^a(Q) & \xrightarrow{\chi(Q)} & S^*(Q \otimes N') \\ & & \downarrow S^* \otimes^a(v) & \searrow & \downarrow S^*(v \otimes 1) \\ & & C_{a,p}(Q) & & \\ & & \downarrow & & \\ & & S^* \otimes^a(P) & \xrightarrow{\chi(P)} & S^*(P \otimes N'). \end{array}$$

Le sous-espace  $\chi(Q)(\mathfrak{l}_{a,p}(Q))$  est un sous- $GL(Q)$ -module de  $S^*(Q \otimes N')$  contenu dans le noyau de  $S^*(v \otimes 1)$ . D'après le lemme (2.2.4), un tel sous-espace est



nécessairement réduit à (0). L'homomorphisme  $\chi(Q)$  se factorise donc lorsque  $\dim Q \geq p$ . Comme  $C_{a,p}(Q) = S^* \otimes^a(Q)$  lorsque  $\dim Q \leq p$ , l'affirmation est démontrée.

(2.3.3) Soit  $\alpha$  un idéal de  $S^* \otimes^a(P)$ ; on suppose que  $\alpha$  est stable par  $GL(P)$ ; il existe alors  $b \in \mathbf{N}^J$  et un homomorphisme  $GL(P)$ -équivariant  $r: S^* \otimes^b(P) \rightarrow S^* \otimes^a(P)$  tel que l'idéal engendré par  $\text{Im } r_+$  est égal à  $\alpha$  ( $r_+$  désigne la restriction de  $r$  à l'idéal  $S^* \otimes^b(P)_+$  formé des éléments de  $S^* \otimes^b(P)$  de degré strictement positif). Soit en effet  $V$  un sous- $GL(P)$ -module de dimension finie qui engendre  $\alpha$ . D'après (2.2.1), il existe  $b \in \mathbf{N}^J$  et une application linéaire surjective  $GL(P)$ -équivariante  $r_1: \otimes^b(P) \rightarrow V$ . On prend alors pour  $r$  le prolongement de  $r_1$ .

(2.3.4) Dans l'énoncé ci-dessous, l'usage du mot "présentation" est abusif: on n'exige pas ici que la première algèbre (resp. le premier foncteur) "qui présente" soit une algèbre de polynômes (resp. prenne ses valeurs dans les algèbres de polynômes).

En outre, si  $L$  est une sous-algèbre de type fini de  $S^*(P \otimes N')$  stable par  $GL(P)$ , il résulte de (2.2.2) et (2.3.3) qu'il existe une présentation de  $L$  (dite  $GL(P)$ -équivariante) du type

$$S^* \otimes^b(P) \xrightarrow{r} S^* \otimes^a(P) \xrightarrow{g} L$$

où  $r$  et  $g$  sont des homomorphismes  $GL(P)$ -équivariants.

**PROPOSITION.** Soit  $p \in \mathbf{N}$ ,  $p \geq \dim N$ , et  $\bar{\gamma}: C_{a,p} \rightarrow S^*(\cdot \otimes N')$  une transformation naturelle (dans  $\mathfrak{A}$ ),  $a \in \mathbf{N}^I$ . Soit  $P$  un espace vectoriel de dimension  $p$  et

$$S^* \otimes^b(P) \xrightarrow{f} S^* \otimes^a(P) = C_{a,p}(P) \xrightarrow{\bar{\gamma}(P)} \text{Im } \bar{\gamma}(P)$$

une présentation  $GL(P)$ -équivariante de  $\text{Im } \bar{\gamma}(P)$ ,  $b \in \mathbf{N}^J$ . Alors, il existe une transformation naturelle  $\bar{\rho}: S^* \otimes^b \rightarrow C_{a,p}$  telle que  $\bar{\rho}(P) = \bar{r}$ ; pour une telle transformation, la suite

$$S^* \otimes^b \xrightarrow{\bar{\rho}} C_{a,p} \xrightarrow{\bar{\gamma}} \text{Im } \bar{\gamma}$$

est une présentation du foncteur  $\text{Im } \bar{\gamma}$ .

*Preuve*

a) D'après (1.4.1), il existe une transformation naturelle  $\rho: S^* \otimes^b \rightarrow S^* \otimes^a$  telle que  $\rho(P) = \bar{r}$ ; alors  $\bar{\rho} = \theta \circ \rho$  est une transformation naturelle  $S^* \otimes^b \rightarrow C_{a,p}$  telle que  $\bar{\rho}(P) = \bar{r}$ .

b) L'idéal de  $C_{a,p}(Q)$  engendré par  $\text{Im } \bar{\rho}(Q)_+$  est égal à  $\text{Ker } \bar{\gamma}(Q)$  lorsque  $\dim Q \leq \dim P$ .

On se donne une application linéaire surjective  $u: P \rightarrow Q$ . Par functorialité,  $C_{a,p}(u)(\text{Ker } \bar{\gamma}(P)) = \text{Ker } \bar{\gamma}(Q)$ ; par conséquent, si  $\text{Im } \bar{\rho}(P)_+$  engendre l'idéal  $\text{Ker } \bar{\gamma}(P)$ ,  $\text{Im } (C_{a,p}(u) \circ \bar{\rho}(P)_+) = \text{Im } (\bar{\rho}(Q) \circ S^* \otimes^b(u)_+)$  engendre l'idéal  $\text{Ker } \bar{\gamma}(Q)$ ; comme  $u$  est surjectif, l'assertion b) est démontrée.

c) L'idéal de  $C_{a,p}(Q)$  engendré par  $\text{Im } \bar{\rho}(Q)_+$  est égal à  $\text{Ker } \bar{\gamma}(Q)$  lorsque  $\dim Q > \dim P (\geq \dim N)$ .

On se donne une application linéaire surjective  $v: Q \rightarrow P$ . Puisque  $\bar{\gamma}(P) \circ \bar{\rho}(P)_+ = 0$ , le sous-espace  $\text{Im } (\bar{\gamma}(Q) \circ \bar{\rho}(Q)_+)$  est un sous- $GL(Q)$ -module de  $\text{Ker } (S^*(v \otimes 1))$ . Du lemme (2.2.4) résulte alors que  $\bar{\gamma}(Q) \circ \bar{\rho}(Q)_+ = 0$  i.e. que  $\text{Im } \bar{\rho}(Q)_+ \subset \text{Ker } \bar{\gamma}(Q)$ .

Réciproquement, soit  $V$  un sous- $GL(Q)$ -module de dimension finie de  $\text{Ker } \bar{\gamma}(Q)$ ; il faut démontrer que  $V$  est contenu dans l'idéal engendré par  $\text{Im } \bar{\rho}(Q)_+$ . Puisque le  $GL(Q)$ -module  $S^* \otimes^a(Q)$  est semi-simple, il existe  $c \in \mathbf{N}^K$  et une application linéaire  $GL(Q)$ -équivariante  $m: \otimes^c(Q) \rightarrow S^* \otimes^a(Q)$  telle que  $\text{Im } (\theta(Q) \circ m) = V$  (cf. (2.2.1)). On note  $\mu: \otimes^c \rightarrow S^* \otimes^a$  une transformation naturelle telle que  $\mu(Q) = m$  (cf. (1.3.1)). Par functorialité,  $\text{Im } (\theta(P) \circ \mu(P)) \subset \text{Ker } \bar{\gamma}(P)$ .

Pour tout espace vectoriel  $M$ , on pose

$$(\bar{\rho} \cdot \theta)(M): \otimes^b(M) \otimes S^* \otimes^a(M) \rightarrow C_{a,p}(M)$$

$$x \otimes y \mapsto \bar{\rho}(M)(x) \cdot \theta(M)(y)$$

(produit dans l'algèbre  $C_{a,p}(M)$ ).

Par hypothèse, l'image de  $(\bar{\rho} \cdot \theta)(P)$  est égale à  $\text{Ker } \bar{\gamma}(P)$ . Par semi-simplicité des  $GL(P)$ -modules en question, il existe une application linéaire  $GL(P)$ -équivariante  $n: \otimes^c(P) \rightarrow \otimes^b(P) \otimes S^* \otimes^a(P)$  telle que  $(\bar{\rho} \cdot \theta)(P) \circ n = \theta(P) \circ \mu(P)$ . Utilisant une généralisation facile de (1.3.1), on voit qu'il existe

$$\nu: \otimes^c \rightarrow \otimes^b \otimes S^* \otimes^a$$

telle que  $\nu(P) = n$ . La situation est la suivante:

$$\begin{array}{ccccc}
 \otimes^c(Q) & \xrightarrow{\nu(Q)} & \otimes^b(Q) \otimes S^* \otimes^a(Q) & & \\
 \downarrow \theta(Q) \circ \mu(Q) & \searrow & \downarrow (\bar{\rho} \cdot \theta)(Q) & & \\
 S^* \otimes^b(Q) & \xrightarrow{\bar{\rho}(Q)} & C_{a,p}(Q) & \xrightarrow{\bar{\gamma}(Q)} & S^*(Q \otimes N') \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \otimes^c(P) & \xrightarrow{\nu(P)} & \otimes^b(P) \otimes S^* \otimes^a(P) & & \\
 \downarrow \theta(P) \circ \mu(P) & \searrow & \downarrow (\bar{\rho} \cdot \theta)(P) & & \\
 S^* \otimes^b(P) & \xrightarrow{\bar{\rho}(P)} & C_{a,p}(P) & \xrightarrow{\bar{\gamma}(P)} & S^*(P \otimes N')
 \end{array}$$

où les flèches verticales représentent les morphismes induits par  $v$ . Il faut démontrer que le triangle du haut est commutatif.

On pose  $\alpha = \theta(Q) \circ \mu(Q) - (\bar{\rho} \cdot \theta)(Q) \circ \nu(Q)$ : c'est une application linéaire  $GL(Q)$ -équivariante  $\otimes^c(Q) \rightarrow C_{a,p}(Q)$  dont l'image est contenue dans  $\text{Ker } C_{a,p}(v)$ . Or,  $\text{Ker } C_{a,p}(v) \cong \text{Ker } S^* \otimes^a(v) / \downarrow_{a,p}(Q)$ ; comme  $\downarrow_{a,p}(Q)$  est par définition le plus grand sous- $GL(Q)$ -module de  $S^* \otimes^a(Q)$  qui est contenu dans  $\text{Ker } S^* \otimes^a(v)$ , (0) est le seul sous- $GL(Q)$ -module de  $C_{a,p}(Q)$  qui est contenu dans  $\text{Ker } C_{a,p}(v)$ . On a donc  $\alpha = 0$  et par conséquent  $\text{Im}(\theta(Q) \circ \mu(Q)) = V$  est contenu dans l'idéal de  $C_{a,p}(Q)$  engendré par  $\text{Im } \bar{\rho}(Q)_+$ . L'assertion c) est ainsi démontrée.

(2.4.1) Le théorème que voici résume les paragraphes 1 et 2 de ce travail; il est conséquence immédiate des propositions (2.2.3), (2.3.4) et du lemme (2.3.2).

**THÉORÈME.** Soit  $A$  un sous-foncteur de  $S^*(\cdot \otimes N')$  vérifiant les conditions  $E(p)$  et  $F(p)$  pour un entier  $p \geq \dim N$ . Soit  $P$  un espace vectoriel de dimension  $p$  et

$$S^* \otimes^b(P) \xrightarrow{\iota} S^* \otimes^a(P) \xrightarrow{g} A(P)$$

une présentation  $GL(P)$ -équivariante de  $A(P)$ ,  $a \in \mathbf{N}^I$ ,  $b \in \mathbf{N}^J$ . Alors

(i) il existe deux transformations naturelles  $\gamma: S^* \otimes^a \rightarrow A$  et  $\rho: S^* \otimes^b \rightarrow S^* \otimes^a$  telles que

$$1) \quad \gamma(P) = g, \quad \rho(P) = r,$$

$$2) \quad \gamma \text{ se factorise à travers } \theta: S^* \otimes^a \rightarrow C_{a,p} \text{ en une transformation naturelle } \bar{\gamma}: C_{a,p} \rightarrow A,$$

3) la suite

$$S^* \otimes^b \xrightarrow{\bar{\rho}} C_{a,p} \xrightarrow{\bar{\gamma}} A$$

où  $\bar{\rho} = \theta \circ \rho$  est une présentation de  $A$ ;

(ii) toutes transformations naturelles  $\gamma$  et  $\rho$  satisfaisant 1) satisfont aussi 2) et 3);

(iii) il existe  $t \in \otimes^a(N)'$  tel que  $A = A_t$ .

### §3. Le foncteur $S^*(\cdot \otimes N')^G$

(3.1.1) Dans ce paragraphe, on se donne un espace vectoriel  $N$  et un sous-groupe  $G$  de  $GL(N)$ .

Soit  $Q$  un espace vectoriel; sur  $Q \otimes N'$  on considère les opérations usuelles de  $GL(Q)$  et  $G$ ; ces deux opérations commutent. L'algèbre  $S^*(Q \otimes N')$  est donc

munie d'une structure de  $GL(Q)$ -module (semi-simple) et d'une structure de  $G$ -module. On désigne par  $S^*(Q \otimes N')^G$  la sous-algèbre des invariants de  $G$  dans  $S^*(Q \otimes N')$ . On considère  $S^*(\cdot \otimes N')^G$ : c'est un foncteur de  $\mathfrak{B}$  dans  $\mathfrak{A}$ , sous-foncteur de  $S^*(\cdot \otimes N')$ .

(3.1.2) PROPOSITION. *Le foncteur  $S^*(\cdot \otimes N')^G$  possède la propriété  $E(p)$  de (2.1.0) pour tout entier  $p \geq \dim N$ .*

*Preuve.* Soit  $P$  un espace vectoriel de dimension  $p \geq \dim N$ . Soit  $a \in \mathbf{N}^I$  et  $\chi: S^* \otimes^a \rightarrow S^*(\cdot \otimes N')$  une transformation naturelle. On suppose que  $\text{Im } \chi(P) \subset S^*(P \otimes N')^G$ . On sait qu'il existe  $t \in \otimes^a(N)'$  tel que  $\chi = \chi_t$  ((1.4.2)). Pour démontrer que  $\text{Im } \chi_t(Q) \subset S^*(Q \otimes N')^G$  quelque soit l'espace vectoriel  $Q$ , on va procéder géométriquement.

L'homomorphisme  $\chi_t(Q)$  s'interprète comme le comorphisme du morphisme polynomial

$$\begin{aligned} X_t(Q): Q' \otimes N &\simeq \text{Hom}(Q, N) \rightarrow \otimes^a(Q)' \\ u &\mapsto \otimes^a(u')(t) \end{aligned}$$

(cf. (2.1.1)). Maintenant il est clair que, pour que  $\text{Im } \chi_t(Q) \subset S^*(Q \otimes N')^G$ , il faut et il suffit que le morphisme  $X_t(Q)$  soit constant en restriction aux orbites de  $G$  dans  $\text{Hom}(Q, N)$  (le groupe  $G$  opère dans  $\text{Hom}(Q, N)$  "au but").

Par hypothèse, on a

$$X_t(P)(s \circ u) = X_t(P)(u) \quad s \in G, u \in \text{Hom}(Q, N)$$

i.e.

$$\begin{aligned} \otimes^a((s \circ u)')(t) &= \otimes^a(u')(t) \\ \otimes^a(u') \circ \otimes^a(s')(t) &= \otimes^a(u')(t) \end{aligned}$$

d'où  $t \in [\otimes^a(N')]^G$  puisqu'il existe  $u$  tel que  $\otimes^a(u')$  est injectif.

Un calcul semblable montre ensuite que si  $t \in [\otimes^a(N')]^G$ , alors  $X_t(Q)$  est constant en restriction aux orbites de  $G$  dans  $\text{Hom}(Q, N)$ , ceci quelque soit  $Q$ , d'où la conclusion.

(3.1.3) Supposant que l'algèbre  $S^*(P \otimes N')^G$  est de type fini,  $\dim P = p \geq \dim N$ , i.e. que  $S^*(\cdot \otimes N')^G$  vérifie la condition  $F(p)$  de (2.1.0), on peut appliquer les résultats du paragraphe précédent à  $S^*(\cdot \otimes N')^G$ . En particulier, le théorème (2.4.1) fournit la "moitié" de (0.1.4), le théorème (5.1.2), qu'on démontrera plus loin au paragraphe 5, en étant l'autre moitié.

(3.1.4) *Remarques*

1) La condition de finitude  $F(p)$  du foncteur  $S^*(\cdot \otimes N')^G$  est étudiée dans [3].

2) D'après (3.1.3), si  $S^*(\cdot \otimes N')^G$  vérifie  $F(p)$  pour un entier  $p \geq \dim N$ , il existe  $t \in \otimes^a(N)'$  tel que  $S^*(\cdot \otimes N')^G = A_t$ . Il n'est pas difficile de voir que le sous-groupe d'isotropie  $GL(N)_t$  est égal au plus petit sous-groupe observable de  $GL(N)$  contenant  $G$  (cf. [3]).

Réciproquement, soit  $t \in \otimes^a(N)'$ . On suppose de plus que  $GL(N)_t$  est réductif; alors, pour que  $A_t$  soit égal à  $S^*(\cdot \otimes N')^{GL(N)_t}$ , il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées:

- a)  $A_t(N)$  est intégralement clos;
- b)  $\text{Im } X_t(N)$  est fermée dans  $\otimes^a(N)'$ .

Ces conditions sont clairement nécessaires (cf. [6]); elles sont suffisantes comme il résulte d'un lemme de R. W. Richardson (cf. [5] lemme 1.8 ou [9]) et de (2.2.3) et (1.4.2).

#### §4. Opérateurs d'antisymétrisation

(4.1.1) Dans ce numéro on rappelle quelques résultats classiques relatifs aux représentations des groupes finis.

Soit  $H$  un groupe fini. On note  $k[H]$  l'algèbre du groupe  $H$ ; c'est une algèbre semi-simple. On fait opérer  $H$  dans  $k[H]$  par multiplication à gauche. Tout  $H$ -module irréductible est isomorphe à un sous- $H$ -module de  $k[H]$ . Les sous- $H$ -modules de  $k[H]$  sont les idéaux à gauche de  $k[H]$ ; ceux-ci sont de la forme  $k[H]e$ , où  $e$  est un idempotent ( $e^2 = e$ ). Les sous- $H$ -modules irréductibles de  $k[H]$  sont donc les idéaux minimaux à gauche.

On note  $h$  le cardinal de  $H$ . L'endomorphisme

$$x \mapsto x^\# = \frac{1}{h} \sum_{t \in H} txt^{-1}$$

de  $k[H]$  est un projecteur d'image le centre de  $k[H]$ . Si  $e$  est un idempotent non nul,  $e^\#$  n'est pas nul. De plus, si  $k[H]e$  est minimal, la composante isotypique de  $k[H]$  de type  $k[H]e$  est égale à  $k[H]e^\#$ ; c'est aussi l'un des composants simples de  $k[H]$ .

Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille d'idempotents de  $k[H]$  telle que les  $(k[H]e_i)_{i \in I}$  forment un système de représentants des classes de  $H$ -modules irréductibles; alors  $\text{Card}(I)$  est plus petit ou égal au nombre de classes de conjugaison des éléments

de  $H$ , et pour tout  $H$ -module  $V$ ,

$$V = \bigoplus_{i \in I} e_i^\# \cdot V,$$

$e_i^\# \cdot V$  étant la composante isotypique de  $V$  de type  $k[H]e_i$ .

(4.2.1) Soit  $E$  un ensemble fini. Un *diagramme de Young*<sup>(2)</sup> sur  $E$  consiste en la donnée de deux relations d'équivalences  $\alpha_R$  et  $\alpha_C$  sur  $E$  vérifiant:

- 1) quels que soient  $x, y \in E$ , " $\alpha_R\{x, y\}$  et  $\alpha_C\{x, y\}$ " entraîne  $x = y$ ,
- 2) quels que soient  $x, y \in E$ , il existe  $z \in E$  tel que " $\alpha_R\{z, x\}$  et  $\alpha_C\{z, y\}$ " ou " $\alpha_R\{z, y\}$  et  $\alpha_C\{z, x\}$ ."

Les classes d'équivalence suivant  $\alpha_R$  (resp.  $\alpha_C$ ) sont les lignes (resp. les colonnes) de  $\alpha$ . On note  $p_R: E \rightarrow E/\alpha_R$  et  $p_C: E \rightarrow E/\alpha_C$  les projections canoniques.

(4.2.2) LEMME. *Il existe un ordre (noté  $<$ ) sur  $E/\alpha_C$  tel que, pour  $x, y \in E$ , la relation " $p_C(y) < p_C(x)$ " entraîne "il existe  $z \in E$  tel que  $p_R(z) = p_R(x)$  et  $p_C(z) = p_C(y)$ ."*

*Preuve.* On choisit sur  $E/\alpha_C$  un ordre satisfaisant la condition

$$p_C(y) < p_C(x) \Rightarrow \text{Card}(p_C^{-1}p_C(y)) \geq \text{Card}(p_C^{-1}p_C(x)).$$

Un tel ordre convient. Soit en effet  $x, y \in E$  tels que  $\text{Card}(p_C^{-1}p_C(y)) \geq \text{Card}(p_C^{-1}p_C(x))$ . Si  $p_R(x) \notin p_R(p_C^{-1}p_C(y))$ , d'après la condition 2) de la définition des diagrammes sur  $E$ , pour tout  $y' \in p_C^{-1}p_C(y)$ , il existe  $z' \in E$  tel que

$$p_R(z') = p_R(y') \quad \text{et} \quad p_C(z') = p_C(x);$$

par conséquent  $\text{Card}(p_C^{-1}p_C(x)) > \text{Card}(p_C^{-1}p_C(y))$  ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc  $p_R(x) \in p_R(p_C^{-1}p_C(y))$ , d'où l'existence de  $z \in p_C^{-1}p_C(y)$  tel que  $p_R(x) = p_R(z)$ .

(4.2.3) On note  $\mathfrak{S}(E)$  le groupe des permutations de  $E$ . Le groupe  $\mathfrak{S}(E)$  opère dans l'ensemble des partitions de  $E$ ; il opère aussi dans l'ensemble des diagrammes de Young sur  $E$ :

$$\begin{aligned} (w \cdot \alpha)_R\{x, y\} &\Leftrightarrow \alpha_R\{w^{-1} \cdot x, w^{-1} \cdot y\} \\ (w \cdot \alpha)_C\{x, y\} &\Leftrightarrow \alpha_C\{w^{-1} \cdot x, w^{-1} \cdot y\} \end{aligned} \quad x, y \in E, \quad w \in \mathfrak{S}(E).$$

---

<sup>2</sup> Cette définition m'a été proposée par J. L. Koszul.

On dira que deux diagrammes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sur  $E$  sont de même type s'il existe  $w \in \mathfrak{S}(E)$  tel que  $w \cdot \alpha_1 = \alpha_2$ ; il faut et il suffit pour cela qu'il existe  $w_1 \in \mathfrak{S}(E)$  tel que  $(w_1 \cdot \alpha_1)_R = (\alpha_2)_R$  (ou  $(w_1 \cdot \alpha_1)_C = (\alpha_2)_C$ ). Si  $T(E)$  désigne l'ensemble des types de diagrammes sur  $E$ , on déduit de là que  $\text{Card}(T(E))$  est égal au nombre de décompositions de l'entier  $\text{Card}(E)$  en somme d'entiers positifs.

Soit  $\alpha$  un diagramme sur  $E$ . On pose  $h(\alpha) = \text{Card}(E/\alpha_R)$  et on dit que  $h(\alpha)$  est la hauteur de  $\alpha$ . Ce nombre ne dépend que du type de  $\alpha$ ; on peut donc définir la hauteur de  $t$  pour  $t \in T(E)$  par  $h(t) = h(\alpha)$  où  $\alpha \in t$ .

Par un raisonnement semblable à (3.2.2), on prouve qu'on a

$$h(\alpha) = \max_{x \in E} (\text{Card}(p_C^{-1} p_C(x))).$$

(4.2.4) Soit  $\alpha$  un diagramme sur  $E$ . On note  $R(\alpha)$  (resp.  $C(\alpha)$ ) le sous-groupe de  $\mathfrak{S}(E)$  formé des permutations qui laissent invariantes les lignes (resp. les colonnes) de  $\alpha$ . On introduit alors les éléments

$$A_\alpha = \sum_{q \in C(\alpha)} \varepsilon(q) q \quad \text{et} \quad S_\alpha = \sum_{p \in R(\alpha)} p$$

de l'algèbre  $k[\mathfrak{S}(E)]$  du groupe  $\mathfrak{S}(E)$  ( $\varepsilon(q)$  désigne la signature de  $q \in \mathfrak{S}(E)$ ). On a visiblement les formules:

$$\begin{aligned} A_{w \cdot \alpha} &= w A_\alpha w^{-1}, & S_{w \cdot \alpha} &= w S_\alpha w^{-1}, & w &\in \mathfrak{S}(E) \\ q A_\alpha &= A_\alpha q = \varepsilon(q) A_\alpha, & q &\in C(\alpha), \\ p S_\alpha &= S_\alpha p = S_\alpha, & p &\in R(\alpha). \end{aligned}$$

(4.2.5) Voici le résultat principal de la théorie des représentations du groupe symétrique (cf. [1] §28, [2] chap. 2, [10] chap. IV).

**PROPOSITION.**

(i) Soit  $\alpha$  un diagramme de Young sur  $E$ ; il existe une constante non nulle  $\lambda(\alpha) \in \mathbf{Q}$  (ne dépendant que du type de  $\alpha$ ) telle que  $e(\alpha) = \lambda(\alpha) A_\alpha S_\alpha$  soit un idempotent de  $k[\sigma(E)]$ ; de plus  $k[\sigma(E)]e(\alpha)$  est un idéal minimal.

(ii) Soit  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  deux diagrammes sur  $E$ ; pour que les idéaux engendrés par  $e(\alpha_1)$  et  $e(\alpha_2)$  soient isomorphes, il faut et il suffit que  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  soient du même type.

(4.2.6) Soit  $(\alpha_t)_{t \in T(E)}$  un système de représentants pour les types de diagrammes sur  $E$ ; alors les idéaux  $(k[\mathfrak{S}(E)]e(\alpha_t))_{t \in T(E)}$  constituent un système de

représentants des classes de  $\mathfrak{S}(E)$ -modules irréductibles: on sait en effet que  $\text{Card}(T(E))$  est égal au nombre de classes de conjugaison des éléments de  $\mathfrak{S}(E)$  (cf. (4.2.3)), nombre qui est plus grand ou égal au nombre de classes de  $\mathfrak{S}(E)$ -modules irréductibles.

D'après (4.1.1), on a donc  $V = \bigoplus_{t \in T(E)} e(\alpha_t)^\# \cdot V$  pour tout  $\mathfrak{S}(E)$ -module  $V$ ; de plus, comme  $e(\alpha_t)^\#$  est proportionnel à  $\sum_{\alpha \in t} e(\alpha)$ , on a aussi

$$V = \bigoplus_{t \in T(E)} \left( \sum_{\alpha \in t} e(\alpha) \cdot V \right).$$

(4.3.0) Dans ce numéro, on se donne un ensemble fini  $E$  et un nombre entier  $m$ . On désigne par  $\mathfrak{m}$  l'ensemble des parties de  $E$  à  $(m+1)$  éléments. Pour toute partie  $F$  de  $E$ , on pose

$$\mathfrak{S}_F = \{w \in \mathfrak{S}(E) \mid w(x) = x, x \notin F\},$$

$$A_F = \sum_{q \in \mathfrak{S}_F} \varepsilon(q)q,$$

puis

$$A_m(E) = \sum_{F \in \mathfrak{m}} \sum_{q \in \mathfrak{S}_F} \varepsilon(q)q = \sum_{F \in \mathfrak{m}} A_F.$$

On dira que l'élément  $A_m(E)$  de  $k[\mathfrak{S}(E)]$  est l'opérateur d'antisymétrisation relativement aux parties de  $E$  à  $(m+1)$  éléments; c'est visiblement un élément central de  $k[\mathfrak{S}(E)]$  qui est nul si  $\text{Card}(E) < m+1$ . On désire évaluer  $A_m(E)$  en fonction des  $e(\alpha)^\#$ .

On suppose dans la suite que  $0 \leq m < \text{Card}(E)$ .

(4.3.1) La démonstration du lemme suivant m'a été communiquée par J. L. Koszul.

**LEMME.** Soit  $\alpha$  un diagramme sur  $E$  et  $F \in \mathfrak{m}$ . Alors  $A_\alpha A_F S_\alpha$  est égal à  $\text{Card}(C(\alpha) \cap \mathfrak{S}_F) A_\alpha S_\alpha$  si les  $m+1$  éléments de  $F$  appartiennent à des lignes distinctes de  $\alpha$  et est égal à 0 dans le cas contraire.

*Preuve.*

a) On suppose que les éléments de  $F$  appartiennent à des lignes distinctes de  $\alpha$ , autrement dit que la restriction  $p_R|_F$  de  $p_R$  à  $F$  est injective.

Soit  $w \in \mathfrak{S}_F \cap C(\alpha)$ ; on a alors  $\varepsilon(w) A_\alpha w S_\alpha = A_\alpha S_\alpha$  (cf. (3.2.4)).

Soit  $w \in \mathfrak{S}_F$ , mais  $w \notin C(\alpha)$ ; alors  $\varepsilon(w) A_\alpha w S_\alpha = 0$ . En effet, il existe  $x \in F$  tel



que  $p_C(x) \neq p_C(w \cdot x)$ , et on peut de plus choisir  $x \in F$  en sorte que  $p_C(w \cdot x) < p_C(x)$ , où  $<$  est un ordre sur  $E/\alpha_C$  satisfaisant la condition du lemme (3.2.2); il existe donc  $z \in E$  tel que  $p_R(z) = p_R(x)$  et  $p_C(z) = p_C(w \cdot x)$ . On a  $z \notin F$  puisque  $p_{R|F}$  est injectif. On se trouve alors dans la situation classique (cf. [1] lemme (28.11), [2] p. 17, [10] lemme (4.2.A)) d'une permutation  $w$  de  $E$  et de deux éléments  $x$  et  $z$  de  $E$  tels que  $x, z$  appartiennent à une même ligne de  $\alpha$  et  $w \cdot x, w \cdot z = z$  appartiennent à une même colonne de  $\alpha$ : on a  $w = (w \cdot x, z)w(x, z)$  avec  $(w \cdot x, z) \in C(\alpha)$  et  $(x, z) \in R(\alpha)$ . Par conséquent on a enfin

$$A_\alpha w S_\alpha = A_\alpha (w \cdot x, z) w(x, z) S_\alpha = -A_\alpha w S_\alpha.$$

Puisque  $A_\alpha A_F S_\alpha = \sum_{w \in \sigma_F} \varepsilon(w) A_\alpha w S_\alpha$ , on a bien démontré que si les éléments de  $F$  appartiennent à des lignes distinctes de  $\alpha$ , alors  $A_\alpha A_F S_\alpha = (\text{Card}(C(\alpha) \cap \mathfrak{S}_F)) A_\alpha S_\alpha$ .

b) On suppose qu'il existe deux éléments  $x$  et  $y$  de  $F$  dans une même ligne de  $\alpha$ . La transposition  $(x, y)$  appartient à  $\mathfrak{S}_F \cap R(\alpha)$ ; on a donc

$$A_F S_\alpha = (A_F(x, y))((x, y) S_\alpha) = -A_F S_\alpha$$

d'où  $A_\alpha A_F S_\alpha = 0$ .

(4.3.2) PROPOSITION. Soit  $\alpha$  un diagramme sur  $E$ . Alors  $A_m(E) A_\alpha S_\alpha$  est un multiple entier strictement positif de  $A_\alpha S_\alpha$  si  $h(\alpha) > m$  et est égal à 0 si  $h(\alpha) \leq m$ .

*Preuve.* Puisque  $A_m(E)$  est un élément central de  $k[\mathfrak{S}(E)]$ , on a

$$A_m(E) A_\alpha S_\alpha = A_\alpha A_m(E) S_\alpha = \sum_{F \in \mathfrak{m}} A_\alpha A_F S_\alpha.$$

Si  $h(\alpha) > m$  (resp.  $h(\alpha) \leq m$ ) l'ensemble des  $F \in \mathfrak{m}$  dont les éléments appartiennent à des lignes distinctes de  $\alpha$  est non vide (resp. est vide); l'affirmation provient donc directement du lemme (3.3.1).

*Remarque.* Soit  $(\alpha_t)_{t \in T(E)}$  un système de représentants des types de diagrammes sur  $E$ . On peut énoncer la proposition précédente en disant que  $A_m(E)$  est combinaison linéaire des  $e(\alpha_t)^\#$ ,  $h(t) > m$ .

## §5. Le foncteur $C_{\alpha, m}$

(5.1.0) On reprend les notations du paragraphe 4, à ceci près que, pour

$E = \{1, \dots, n\}$ , on écrira  $\mathfrak{S}(n)$ ,  $T(n)$ ,  $A_m(n)$ , ... pour  $\mathfrak{S}(\{1, \dots, n\})$ ,  $T(\{1, \dots, n\})$ ,  $A_m(\{1, \dots, n\})$ , ...

(5.1.1) On désigne par  $I$  l'ensemble  $\{1, \dots, r\}$ ; on se donne  $a \in \mathbf{N}^I$  et  $m \in \mathbf{N}$ .

On désigne par  $M$  un espace vectoriel de dimension  $m$ . On rappelle que, pour tout espace vectoriel  $Q$ , on notait en (2.3.1)  $\downarrow_{a,m}(Q)$  le plus grand sous- $GL(Q)$ -module de  $S^* \otimes^a(Q)$  contenu dans le noyau de

$$S^* \otimes^a(u): S^* \otimes^a(Q) \rightarrow S^* \otimes^a(M)$$

où  $u: Q \rightarrow M$  est une application linéaire de rang maximum; on notait ensuite  $C_{a,m}(Q)$  le quotient  $S^* \otimes^a(Q) / \downarrow_{a,m}(Q)$  et  $\theta(Q)$  l'homomorphisme canonique  $S^* \otimes^a(Q) \rightarrow C_{a,m}(Q)$ .

De plus, pour tout  $d \in \mathbf{N}^I$ , on a introduit en (1.1.3) l'application linéaire

$$\mu_a^d(Q): \otimes^{|ad|}(Q) \rightarrow S^* \otimes^a(Q)$$

dont l'image est la composante homogène de degré  $d$  de  $S^* \otimes^a(Q)$ ; géométriquement, le prolongement de  $\mu_a^d(Q)$  à  $S^* \otimes^{|ad|}(Q)$  est le comorphisme du morphisme polynomial

$$\begin{aligned} M_a^d(Q): \otimes^a(Q)' &\rightarrow \otimes^{|ad|}(Q)' \\ (x_1, \dots, x_r) &\mapsto \underbrace{x_1 \otimes \dots \otimes x_1}_{d(1)} \otimes \dots \otimes \underbrace{x_r \otimes \dots \otimes x_r}_{d(r)} \end{aligned}$$

$$x_i \in \otimes^{a(i)}(Q)'.$$

On pose enfin

$$\rho_{a,m}(Q) = \bigoplus_{d \in I(m)} \mu_a^d(Q) \circ \tau(Q)(A_m(|ad|))$$

où  $I(m)$  est l'ensemble des  $d \in \mathbf{N}^I$  tels que  $|d| \leq m+1$ ; on définit ainsi une transformation naturelle  $\rho_{a,m}: \otimes^{\sigma(a,m)} \rightarrow S^* \otimes^a$ , où  $\sigma(a, m)$  est l'application

$$\begin{aligned} \sigma(a, m): I(m) &\rightarrow \mathbf{N} \\ d &\mapsto |ad|. \end{aligned}$$

On écrira encore  $\rho_{a,m}(Q)$  pour le prolongement de  $\rho_{a,m}(Q)$  à  $S^* \otimes^{\sigma(a,m)}(Q)$ .

(5.1.2) Le but de ce paragraphe est de démontrer le résultat que voici:

THÉORÈME. *La suite*

$$S^* \otimes^{\sigma(a,m)} \xrightarrow{\rho_{a,m}} S^* \otimes^a \xrightarrow{\theta} C_{a,m}$$

*est une présentation de  $C_{a,m}$ .*

Il résulte immédiatement des propositions (5.2.4) et (5.4.4) ci-dessous.

(5.1.3) On note  $V_{a,m}(Q)$  la sous-variété fermée de  $\otimes^a(Q)'$  définie par  $k[V_{a,m}(Q)] = C_{a,m}(Q)$ ; on a (cf. (2.3.1))

$$V_{a,m}(Q) = \overline{GL(Q) \cdot \text{Im } \otimes^a(u')}.$$

On désigne ensuite par  $r_{a,m}(Q)$  le morphisme  $\otimes^a(Q)' \rightarrow \otimes^{\sigma(a,m)}(Q)'$  défini par  $k[r_{a,m}(Q)] = \rho_{a,m}(Q)$ ; alors

$$r_{a,m}(Q) = \bigoplus_{d \in I(m)} \tau(Q')(A_m(|ad|) \circ M_a^d(Q)).$$

La version géométrique du théorème (5.1.2) est:

$$V_{a,m}(Q) = r_{a,m}(Q)^{-1}(0).$$

EXEMPLE 1.  $a = n \in \mathbf{N}$ ,  $m = 1$ . Alors

$$V_{n,1}(Q) = \{(x \otimes \cdots \otimes x) \in \otimes^n(Q)', x \in Q'\}$$

et

$$\begin{aligned} r_{n,1}(Q) : \otimes^n(Q)' &\rightarrow \otimes^n(Q)' \oplus \otimes^{2n}(Q)' \\ t &\mapsto (\tau(Q')(A_1(n))(t), \tau(Q')(A_1(2n))(t \otimes t)) \end{aligned}$$

où  $A_1(p) \in k[\mathfrak{S}(p)]$  est l'opérateur

$$p(p-1)/2 \text{ id} - \sum \text{ transpositions de } \mathfrak{S}(p).$$

EXEMPLE 2.  $a = 2$ . Dans ce cas

$$r_{2,m}(Q) = \bigoplus_{[m+1/2] \leq d \leq m+1} \tau(Q')(A_m(2d)) \circ M_2^d(Q).$$

En théorie classique des invariants des groupes  $O(M)$  et  $Sp(M)$  on est amené à considérer les sous-variétés  $V_{2,m}(Q) \cap S^2(Q')$  et  $V_{2,m}(Q) \cap \Lambda^2(Q')$  de  $S^2(Q')$  et  $\Lambda^2(Q')$  respectivement; la restriction de  $r_{2,m}(Q)$  à  $S^2(Q')$  et  $\Lambda^2(Q')$  fournit donc une présentation de ces variétés. Un examen soigneux (et fastidieux) devrait donner des résultats équivalents à ceux de [9].

EXEMPLE 3.  $a = (1, \dots, 1) \in \mathbf{N}^n$ ,  $m \leq n$ . Alors  $\otimes^a(Q') \simeq \text{Hom}(Q, N)$ , où  $N$  est de dimension  $n$ , et

$$V_{a,m}(Q) \simeq \{v \in \text{Hom}(Q, N), \text{rang}(v) \leq m\}.$$

Puisque  $A_m(p) = 0$  pour  $p < m + 1$ , on a

$$r_{a,m}(Q) = \tau(Q')(A_m(m+1)) \circ \bigoplus_{|d|=m+1} M_a^d(Q);$$

comme enfin

$$A_m(m+1) = \sum_{q \in \mathfrak{S}(m+1)} \varepsilon(q)q,$$

on peut se restreindre dans la somme précédente aux  $d \in \mathbf{N}^n$  tels que  $|d| = m + 1$  et  $d(j) = 0$  ou  $1$ .

On voit donc que  $r_{a,m}(Q)$  est somme des  $\binom{n}{m+1}$  morphismes

$$\begin{aligned} \otimes^a(Q') &\rightarrow \Lambda^{m+1}(Q') \subset \otimes^{m+1}(Q') \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_{i(1)} \wedge \dots \wedge x_{i(m+1)} \end{aligned}$$

(cf. [9] théorème 3 §2).

(5.2.1) LEMME. *L'idéal  $\text{Ker } \tau(M)$  de  $k[\mathfrak{S}(n)]$  est engendré par  $A_m(n)$ .*

*Preuve.* D'après [10] lemme (4.4.B), pour que  $e(\alpha) \in \text{Ker } \tau(M)$ , il faut et il suffit que  $h(\alpha) > m$ . Comme

$$k(\mathfrak{S}(n)) = \bigoplus_{t \in T(n)} \left( \sum_{\alpha \in t} k[\mathfrak{S}(n)]e(\alpha) \right)$$

on a

$$\text{Ker } \tau(M) = \bigoplus_{\substack{t \in T(n) \\ h(t) > m}} \left( \sum_{\alpha \in t} k[\mathfrak{S}(n)]e(\alpha) \right).$$

L'affirmation résulte donc immédiatement de (4.3.2).

(5.2.2) LEMME. Soit  $u : Q \rightarrow M$  une application linéaire de rang maximum; alors, le plus grand sous- $GL(Q)$ -module de  $\otimes^n(Q)$  contenu dans  $\text{Ker } \otimes^n(u)$  est égal à  $\text{Im } \tau(Q)(A_m(n))$ .

*Preuve.* Si  $\dim Q \leq \dim M$ , alors  $A_m(n) \in \text{Ker } \tau(Q)$  (cf. (5.2.1)), d'où l'affirmation dans ce cas.

On suppose donc  $\dim Q > \dim M$  et on note  $V$  le plus grand sous- $GL(Q)$ -module de  $\otimes^n(Q)$  contenu dans  $\text{Ker } \otimes^n(u)$ . Le groupe  $\mathfrak{S}(n)$  opère dans  $V$ . Il résulte de là que l'ensemble  $E$  des  $x \in k[\mathfrak{S}(n)]$  tels que  $\text{Im } \tau(Q)(x) \subset V$  est un idéal bilatère de  $k[\mathfrak{S}(n)]$ ; de plus, on voit facilement que  $E = \text{Ker } \tau(M)$ , et que, si  $x$  est un générateur central de  $E$ , alors  $\text{Im } \tau(Q)(x) = V$ . La conclusion provient alors du lemme (5.2.1).

(5.2.3) LEMME. Soit  $F$  un sous-foncteur de  $\otimes^n$ ; il existe alors un idempotent  $x$  de  $k[\mathfrak{S}(n)]$  tel que  $F(Q) = \text{Im } \tau(Q)(x)$  pour tout espace vectoriel  $Q$ .

*Preuve.*

a) Pour tout  $Q$ ,  $F(Q)$  coïncide avec le sous-espace  $F'(Q)$  de  $\otimes^n(Q)$  engendré par  $GL(Q) \cdot \text{Im } F(u)$ , où  $u : N \rightarrow Q$  est une application linéaire de rang maximum et  $\dim N = n$ .

En effet, si  $\dim Q \leq \dim N$ ,  $F(u)$  est surjective et l'affirmation est évidente. Si  $\dim Q > \dim N$ , pour toute application linéaire surjective  $v : Q \rightarrow N$ , on a

$$F(N) = F(v)(F(Q)) = F(v)(F'(Q)) \quad (*)$$

puisque

$$F(N) = F(v)(F(Q)) = F(v)(\text{Im } F(u)) \subset F(v)(F'(Q)) \subset F(N)$$

où  $u$  est une section de  $v$ .

Maintenant, on désigne par  $V$  un supplémentaire de  $F'(Q)$  dans  $F(Q)$  stable par l'opération de  $GL(Q)$ ; la projection correspondante de  $F(Q)$  sur  $F'(Q)$  est la restriction à  $F(Q)$  d'un opérateur de la forme  $\tau(Q)(y)$ ,  $y \in k[\mathfrak{S}(n)]$  (cf. (1.1.6)).

Du fait que  $F$  est un sous-foncteur de  $\otimes^n$  et de  $(*)$  résulte qu'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \otimes^n(Q) \supset F(Q) & \xrightarrow{\tau(Q)(y)} & F'(Q) & & \\ \otimes^n(v) \downarrow & & \downarrow F(v) & & \downarrow F(v) \\ \otimes^n(N) \supset F(N) & \xrightarrow{\tau(N)(y)} & F(N) & & \end{array}$$

où  $\tau(N)(y): F(N) \rightarrow F(N)$  est un isomorphisme. Par conséquent,  $V = \text{Ker } \tau(Q)(y) \subset \text{Ker } F(v) \subset \text{Ker } \otimes^n(v)$ . On prend enfin  $z \in k[\mathfrak{S}(n)]$  tel que  $\text{Im } \tau(Q)(z) = V$  (cf. (1.1.6)); on a

$$\otimes^n(v) \circ \tau(Q)(z) = \tau(N)(z) \circ \otimes^n(v) = 0$$

d'où  $\tau(N)(z) = 0$ , puisque  $\otimes^n(v)$  est surjectif, et ensuite  $z = 0$ , puisque  $\tau(N)$  est injectif (cf. (5.2.1)). On a donc  $V = 0$  ce qui démontre a).

b) Puisque  $F(u) = \otimes^n(u)|_{F(N)}$ ,  $u \in \text{Hom}(N, Q)$ , on voit que l'assertion a) signifie que le sous-foncteur  $F$  de  $\otimes^n$  est entièrement déterminé par sa valeur  $F(N)$  en  $N$ ,  $\dim N = n$ . L'affirmation du lemme provient immédiatement de là puisque, d'après (1.1.6) encore une fois, il existe un idempotent  $x \in k[\mathfrak{S}(n)]$  tel que  $\text{Im } \tau(N)(x) = F(N)$ .

(5.2.4) On considère la graduation naturelle de type  $\mathbf{N}^l$  de  $S^* \otimes^a(Q)$ ; puisque l'idéal  $\text{Ker } S^* \otimes^a(u)$ ,  $u: Q \rightarrow M$ , est gradué, il en est de même de  $\downarrow_{a,m}(Q)$ .

**PROPOSITION.** *La composante homogène de degré  $d$ ,  $d \in \mathbf{N}^l$ , de  $\downarrow_{a,m}(Q)$  coïncide avec l'image de  $\mu_a^d(Q) \circ \tau(Q)(A_m(|ad|))$ .*

*Preuve.*

a) On pose  $n = |ad|$ . Par définition, la composante homogène de degré  $d$ ,  $(\downarrow)^d$  de  $\downarrow_{a,m}(Q)$  est le plus grand sous- $GL(Q)$ -module contenu dans  $\text{Ker } S^* \otimes^a(u) \cap \text{Im } \mu_a^d(Q)$ . Le lemme (5.2.3) appliqué au sous-foncteur  $\text{Ker } \mu_a^d$  de  $\otimes^n$  montre qu'il existe un idempotent  $x \in k[\mathfrak{S}(n)]$  tel que  $\text{Ker } \mu_a^d(Q) = \text{Im } \tau(Q)(x)$  (voir aussi la remarque (5.4.2)). On a donc une décomposition naturelle de  $\otimes^n(Q)$  en

$$\otimes^n(Q) = \text{Ker } \mu_a^d(Q) \oplus \text{Ker } \tau(Q)(x). \quad (*)$$

b) On a  $\mu_a^d(Q)(\text{Ker } \otimes^n(u)) = \text{Ker } S^* \otimes^a(u) \cap \text{Im } \mu_a^d(Q)$ . En effet, si  $V \subset \text{Ker } S^* \otimes^a(u) \cap \text{Im } \mu_a^d(Q)$ , il existe  $W \subset \text{Ker } \tau(Q)(x)$  tel que  $\mu_a^d(Q)(W) = V$ ; puisque  $\otimes^n(u)(W) \subset \text{Ker } \mu_a^d(M) \cap \text{Ker } \tau(M)(x)$ , on a bien  $W \subset \text{Ker } \otimes^n(u)$ . L'autre inclusion est tout aussi banale.

c) De b) résulte que l'image par  $\mu_a^d(Q)$  du plus grand sous- $GL(Q)$ -module  $(a)^d$  de  $\otimes^n(Q)$  contenu dans  $\text{Ker } \otimes^n(u)$  est égale à  $(\downarrow)^d$ . On a donc  $(\downarrow)^d = \text{Im}(\mu_a^d(Q) \circ \alpha)$  où  $\alpha$  est un endomorphisme  $GL(Q)$ -équivariant de  $\otimes^n(Q)$  dont l'image est  $(a)^d$ . D'après (5.2.2), on peut prendre pour  $\alpha$  l'élément  $\tau(Q)(A_m(n))$ , d'où la conclusion.

(5.3.1) Pour poursuivre la preuve de (5.1.2) il est nécessaire d'en savoir un peu plus sur les opérateurs  $A_m(E)$ ; pour cela, il est utile d'introduire une nouvelle notion.

Soit  $E$  un ensemble fini. Une *décomposition*  $\beta$  de  $E$  en blocs consiste en la donnée de trois relations d'équivalence  $\beta_B$ ,  $\beta_R$  et  $\beta_C$  sur  $E$  vérifiant:

- 1) quels que soient  $x, y \in E$ , " $\beta_R\{x, y\}$  et  $\beta_C\{x, y\}$ " entraîne  $x = y$ ;
- 2) quels que soient  $x, y \in E$ , " $\beta_C\{x, y\}$ " entraîne " $\beta_B\{x, y\}$ ";
- 3) quels que soient  $x, y \in E$  tels que  $\beta_B\{x, y\}$ , il existe  $z'$  et  $z'' \in E$  tels que  $\beta_R\{x, z'\}$ ,  $\beta_R\{y, z''\}$ ,  $\beta_C\{x, z''\}$ ,  $\beta_C\{y, z'\}$ .

Les classes d'équivalence suivant  $\beta_B$  (resp.  $\beta_R$ ,  $\beta_C$ ) sont les blocs (resp. les lignes, les colonnes) de  $\beta$ . Il résulte immédiatement de la définition que les colonnes d'un même bloc ont le même nombre d'éléments.

On note  $p_C: E \rightarrow E/\beta_C$  et  $p_R: E \rightarrow E/\beta_R$  les projections canoniques.

Soit  $\beta$  une décomposition de  $E$  en blocs. On note  $K(\beta)$  le sous-groupe de  $\mathfrak{S}(E)$  formé des permutations  $w$  telles que

- a) quels que soit  $x \in E$ ,  $\beta_R\{x, w \cdot x\}$ ,
- b) quels que soient  $x, y \in E$  tels que  $\beta_C\{x, y\}$ , alors  $\beta_C\{w \cdot x, w \cdot y\}$  et  $\beta_B\{x, w \cdot x\}$ .

De manière plus imagée,  $K(\beta)$  est le produit des groupes de permutations des colonnes d'un même bloc. Le groupe  $K(\beta)$  opère de manière naturelle dans  $E/\beta_C$ .

(5.3.2) Pour toute partie  $E_1$  de  $E$  on pose

$$A_m(E_1) = \sum_{\substack{F \in E_1 \\ F \in \mathfrak{m}}} A_F,$$

où  $A_F$  et  $\mathfrak{m}$  sont comme en (4.3.0). On note  $\bar{\mathfrak{m}}$  l'ensemble des parties  $V$  de  $E/\beta_C$  telles que  $\text{Card}(V) \leq m+1$ , et  $\bar{\mathfrak{m}}'$  un domaine fondamental pour l'opération de  $K(\beta)$  dans  $\bar{\mathfrak{m}}$ .

**LEMME.** Soit  $\beta$  une décomposition de  $E$  en blocs. L'opérateur  $A_m(E)$  est

*combinaison linéaire des éléments*

$$\sum_{w \in K(\beta)} w A_m(p_C^{-1}(V)) w^{-1}, \quad V \in \bar{m}'.$$

*Preuve.*

a) Pour tout  $V \in \bar{m}$ , on note  $m(V)$  l'ensemble des  $F \in m$  tels que  $p_C(F) \subset V$ . La famille  $(m(V))_{V \in \bar{m}}$  constitue un recouvrement de  $m$ ; il est clair que l'intersection de deux éléments de ce recouvrement est vide ou appartient encore à ce recouvrement. Pour  $p \in \mathbf{N}$ , on désigne par  $\bar{m}(p)$  l'ensemble des  $V \in \bar{m}$  tels qu'il existe  $p$  éléments distincts deux à deux  $V_1, \dots, V_p$  de  $\bar{m}$  avec  $V = \bigcap_{i=1}^p V_i$ . Enfin, pour toute partie  $P$  de  $m$ , on note  $\mathbf{x}(P)$  la fonction caractéristique de  $P$  dans  $m$ .

De la formule bien connue

$$\mathbf{x}\left(\bigcup_{i=1}^n m(V_i)\right) = \sum_{p=1}^n (-1)^{p+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \mathbf{x}\left(\bigcap_{j=1}^p m(V_{i_j})\right)$$

on déduit

$$\mathbf{x}(m) = \sum_{V \in \bar{m}} \mathbf{x}(m(V)) + \dots + (-1)^{p+1} \sum_{V \in \bar{m}(p)} \mathbf{x}(m(V)) + \dots$$

Comme la relation  $V \in \bar{m}(p)$  implique  $w \cdot V \in \bar{m}(p)$  pour tout  $w \in K(\beta)$ , on voit ensuite que  $\mathbf{x}(m)$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des  $\sum_{w \in K(\beta)} \mathbf{x}(m(w \cdot V))$ ,  $V \in \bar{m}'$ :

$$\mathbf{x}(m) = \sum_{V \in \bar{m}'} \lambda(V) \sum_{w \in K(\beta)} \mathbf{x}(m(w \cdot V)). \quad (*)$$

b) L'égalité (\*) permet d'écrire  $A_m(E) = \sum_{F \in m} A_F$  sous la forme

$$A_m(E) = \sum_{V \in \bar{m}'} \lambda(V) \sum_{w \in K(\beta)} \sum_{F \in m(w \cdot V)} A_F$$

d'où l'affirmation puisque

$$\sum_{F \in m(w \cdot V)} A_F = w \left( \sum_{F \in m(V)} A_F \right) w^{-1} = w \left( \sum_{\substack{F \in m \\ F \subset p_C^{-1}(V)}} A_F \right) w^{-1} = w A_m(p_C^{-1}(V)) w^{-1}.$$

(5.4.1) Soit  $a, d \in \mathbf{N}^I$ ; on va associer canoniquement au couple  $(a, d)$  une



décomposition  $\beta(a, d)$  de  $\{1, \dots, |ad|\}$  en blocs. Tout élément  $x$  de  $\{1, \dots, |ad|\}$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{j=1}^{i-1} a(j) d(j) + ka(i) + l$$

avec  $k \in \{0, \dots, d(i) - 1\}$  et  $l \in \{1, \dots, a(i)\}$ . On pose alors

$$p_B(x) = i, \quad p_R(x) = l, \quad p_C(x) = \sum_{j=1}^{i-1} d(j) + k + 1.$$

La décomposition  $\beta(a, d)$  est par définition la décomposition décrite par les relations d'équivalences sur  $\{1, \dots, |ad|\}$  associées aux trois applications  $p_B$ ,  $p_R$  et  $p_C$ .

Par exemple pour  $a = (2, 3)$ ,  $d = (2, 2)$ , la décomposition  $\beta(a, d)$  de  $\{1, \dots, 10\}$  admet deux blocs suivant le diagramme

1	3	5	8
2	4	6	9
		7	10

On écrit  $K(a, d)$  pour  $K(\beta(a, d))$  et on identifie  $\{1, \dots, |ad|\}/\beta(a, d)_C$  avec  $\{1, \dots, |d|\}$ . Le groupe  $K(a, d)$  opère dans  $\{1, \dots, |d|\}$  comme le sous-groupe

$$\mathfrak{S}(\{1, \dots, d(1)\}) \times \dots \times \mathfrak{S}\left(\left\{\sum_{j=1}^{r-1} d(j) + 1, \dots, \sum_{j=1}^r d(j)\right\}\right)$$

de  $\mathfrak{S}(1, \dots, |d|)$ .

Pour tout  $t \in \mathbf{N}^I$  tel que  $|t| \leq m + 1$  et  $t \leq d$ , on pose

$$V(t) = \left\{ 1, \dots, t(1), d(1) + 1, \dots, d(1) + t(2), \dots, \dots, \sum_{j=1}^{r-1} d(j) + 1, \dots, \sum_{j=1}^{r-1} d(j) + t(r) \right\};$$

on a  $\text{Card}(V(t)) = |t|$  et  $\text{Card}(p_C^{-1}(V(t))) = |at|$ . De plus, les  $V(t)$  constituent un domaine fondamental  $\bar{m}'$  pour l'opération de  $K(a, d)$  dans l'ensemble  $\bar{m}$  des parties de  $\{1, \dots, |d|\}$  avec  $m + 1$  éléments au plus.

(5.4.2) *Remarque.* Le sous-groupe  $K(a, d)$  de  $\sigma(|ad|)$  est relié à l'homomorphisme  $\mu_a^d(Q)$  par l'égalité

$$\otimes^{|ad|}(Q) = \text{Ker } \mu_a^d(Q) \oplus [\otimes^{|ad|}(Q)]^{K(a,d)};$$

en outre,  $\text{Ker } \mu_a^d(Q)$  est stable par l'opération de  $K(a, d)$ . Il y a donc moyen de se passer du lemme (5.2.3) pour obtenir la décomposition (\*) de (5.2.4): il suffit de prendre

$$x = id - 1/\text{Card}(K(a, d)) \sum_{w \in K(a,d)} w.$$

(5.4.3) Soit  $V_1, V_2$  et  $W$  trois espaces vectoriels,  $f_i: V_i \rightarrow S^*W$ ,  $i = 1, 2$ , deux applications linéaires et  $\Phi_i: W \rightarrow V_i$ ,  $i = 1, 2$ , deux morphismes polynomiaux. On pose

$$\begin{aligned} f_1 \cdot f_2: V_1 \otimes V_2 &\rightarrow S^*W \\ x_1 \otimes x_2 &\mapsto f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi_1 \otimes \Phi_2: W &\rightarrow V_1 \otimes V_2 \\ x &\mapsto \Phi_1(x) \otimes \Phi_2(x). \end{aligned}$$

On a alors

$$k[\Phi_1 \otimes \Phi_2]_{|(V_1 \otimes V_2)'} = k[\Phi_1]_{|V_1'} \cdot k[\Phi_2]_{|V_2'}.$$

Pour  $a, d \in \mathbf{N}^I$ , on note comme en (5.1.1)  $M_a^d(Q)$  le morphisme polynomial

$$\begin{aligned} M_a^d(Q): \otimes^a(Q)' &\rightarrow \otimes^{|ad|}(Q)' \\ (x_1, \dots, x_r) &\mapsto \underbrace{x_1 \otimes \dots \otimes x_1}_{d(1)} \otimes \dots \otimes \underbrace{x_r \otimes \dots \otimes x_r}_{d(r)}; \end{aligned}$$

la restriction  $k[M_a^d(Q)]_{|\otimes^{|ad|}(Q)'}$  est égale à  $\mu_a^d(Q)$ .

Soit  $t \in \mathbf{N}^I$  avec  $|t| \leq m+1$  et  $t \leq d$ . On considère le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \otimes^a(Q)' & \xrightarrow{M_a^d(Q)} & \otimes^{|ad|}(Q)' \\ & \searrow M_a^t(Q) \otimes M_a^{d-t}(Q) & \nearrow \tau(Q')(w(t)) \\ & \otimes^{|at|}(Q)' \otimes \otimes^{|a(d-t)|}(Q)' & \end{array}$$

On choisit un élément  $w(t)$  de  $\mathfrak{S}(|ad|)$  tel que  $\tau(Q')(w(t))$  rende ce diagramme commutatif et vérifie

$$p_C^{-1}(V(t)) = w(t)(\{1, \dots, |at|\}).$$

Par exemple, pour  $a = (2, 3)$ ,  $d = (2, 2)$  comme tout-à-l'heure, et  $t = (1, 1)$ , on désire que  $w(t) \in \mathfrak{S}(10)$  vérifie

- a)  $\tau(Q')(w(t))(x_1 \otimes x_2 \otimes x_1 \otimes x_2) = x_1 \otimes x_1 \otimes x_2 \otimes x_2$ ,
- b)  $\{1, 2, 5, 6, 7\} = w(t)(\{1, \dots, 5\})$ ,

avec  $x_1 \in \otimes^2(Q')$  et  $x_2 \in \otimes^3(Q')$ . Il suffit de prendre

$$w(t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 6 & 7 & 3 & 4 & 5 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Revenant au cas général, on voit que, puisque l'application transposée de  $\tau(Q')(w(t))$  est égale à  $\tau(Q)(w(t)^{-1})$ , la première des conditions imposées à  $w(t)$  est équivalente à

$$\mu_a^d(Q) = [\mu_a^t(Q) \cdot \mu_a^{d-t}(Q)] \circ \tau(Q)(w(t)^{-1}).$$

(5.4.4) PROPOSITION. *L'application  $\mu_a^d(Q) \circ \tau(Q)(A_m(|ad|))$  est combinaison linéaire des applications*

$$[\mu_a^t(Q) \circ \tau(Q)(A_m(|at|)) \cdot \mu_a^{d-t}(Q)] \circ \sum_{w \in K(a,d)} \tau(Q)((ww(t))^{-1}),$$

$t$  parcourant l'ensemble des  $t \in \mathbf{N}^I$  tels que  $|t| \leq m+1$  et  $t \leq d$ .

*Preuve.* D'après (5.3.2) et (5.4.1),  $\mu_a^d(Q) \circ \tau(Q)(A_m(|ad|))$  est combinaison linéaire des

$$\mu_a^d(Q) \circ \tau(Q) \left\{ \sum_{w \in K(a,d)} w A_m(p_C^{-1}(V(t))) w^{-1} \right\},$$

où  $t$  parcourt l'ensemble des  $t \in \mathbf{N}^I$  tels que  $|t| \leq m+1$  et  $t \leq d$ . Or  $A_m(p_C^{-1}(V(t))) = w(t) A_m(\{1, \dots, |at|\}) w(t)^{-1}$  par choix de  $w(t)$  ( $\{1, \dots, |at|\}$  est considéré comme sous-ensemble de  $\{1, \dots, |ad|\}$ ); de plus,  $\mu_a^d(Q) \circ \tau(Q)(w) = \mu_a^d(Q)$  pour tout  $w \in K(a, d)$  (cf. (5.4.2) par exemple). On peut donc écrire

$\mu_a^d(Q) \circ \tau(Q)(A_m(|ad|))$  comme combinaison des

$$\mu_a^d(Q) \circ \tau(Q)(w(t)) \circ \tau(Q) \left( A_m(\{1, \dots, |at|\}) \circ \sum_{w \in K(a,d)} \tau(Q)((ww(t)^{-1})) \right)$$

d'où la conclusion par choix de  $w(t)$  encore une fois.

## RÉFÉRENCES

- [1] CURTIS, C. et REINER, I., *Representation theory of finite groups and associative algebras*; Interscience Publishers (1962).
- [2] DIEUDONNÉ, J. et CARREL, J., *Invariant theory, old and new*, *Advances in mathematics* 4 (1970).
- [3] GROSSHANS, F., *Observable groups and Hilbert's fourteenth problem*, *Amer. J. Math.* 73 229–253.
- [4] LANG, S., *Algebra*, Addison-Wesley (1965).
- [5] LUNA, D., *Adhérence d'orbites et invariants*, *Inventiones math.* 29 (1975) 231–238.
- [6] MUMFORD, D., *Geometric invariant theory*, Springer Verlag (1965).
- [7] PROCESI, C., *The invariant theory of  $n \times n$  matrices*, *Advances in mathematics* 19 (1976).
- [8] STUDY, E., *Ber. Sächs. Akad. Wissensch.* (1897) 443.
- [9] VUST, TH., *Sur la théorie des invariants des groupes classiques*, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 26 (1976) 1–31.
- [10] WEYL, H., *Classical groups*, Princeton University Press (1946).

*Section de Mathématiques,*  
 2–4, rue du Lièvre,  
 Case Postale 124,  
 CH-1211 Genève 24.

Reçu le 3 Septembre 1976.

