

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 52 (1977)

**Artikel:** Sur la factorialité des anneaux de fonctions de Nash.  
**Autor:** Bochnak, Jacek  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-39995>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Sur la factorialité des anneaux de fonctions de Nash

JACEK BOCHNAK

À VIVIANE

### 1. Introduction.

Rappelons qu'une fonction analytique réelle  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ , d'un ouvert connexe  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , est dite de *Nash* s'il existe un polynôme  $P(x, t)$  de  $n+1$  variables réelles,  $P \not\equiv 0$ , tel que  $P(x, f(x)) = 0$  dans  $U$ . Remarquons qu'une fonction analytique réelle  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U$  semi-algébrique, est de Nash si et seulement s'il existe un ensemble semi-algébrique  $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , tel que  $A \cap (U \times \mathbb{R}) = \text{graphe } f$ . Nous noterons  $\mathcal{N}(U)$  l'anneau des fonctions de Nash sur  $U$ .

L'ensemble des fonctions de Nash forme une classe particulièrement bien adaptée à l'étude de la *géométrie algébrique réelle* [1], [3], [5], [6], [9], [11], [12], [13]. Ces fonctions sont assez proches des polynômes pour avoir des bonnes propriétés algébriques (par exemple si  $U$  est un ouvert semi-algébrique, l'anneau  $\mathcal{N}(U)$  est noetherian [5], [12]), mais sont plus souples que les fonctions polynomiales réelles, du point de vue des propriétés topologiques (par exemple si  $\mathcal{P}$  est un idéal premier de  $\mathcal{N}(U)$ ,  $U$  étant de la forme  $U = \{x \in \mathbb{R}^n : p_i(x) > 0, p_i \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n], i = 1, \dots, k\}$ , alors l'ensemble des zéros  $Z(\mathcal{P})$  de cet idéal est connexe [6], [9]; cette propriété est évidemment vraie pour l'anneau des polynômes complexes, elle ne l'est pas pour l'anneau des polynômes réels). Observons en passant que l'anneau des "fonctions de Nash sur  $\mathbb{C}^n$ " est égal à  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ . Ces propriétés mettent en évidence que l'anneau des fonctions de Nash réelles joue un rôle, dans le cas réel, analogue à celui de l'anneau des polynômes complexes.

Remarquons que tout polynôme est de Nash, et que si  $f$  est de Nash, elle divise un polynôme  $a_0$  non identiquement nul,  $a_0 = fg$ ,  $g \in \mathcal{N}(U)$ : en effet, d'après la définition d'une fonction de Nash, il existe  $a_i \in \mathbb{R}[X] = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ ,  $i = 0, \dots, k$ , tels que  $\sum_{i=1}^k a_i f^i = a_0 = f(\sum_{i=1}^k a_i f^{i-1})$ ,  $a_0 \neq 0$ . Les fonctions de Nash appartiennent donc à l'ensemble des facteurs analytiques des fonctions polynomiales, cependant une fonction analytique divisant un polynôme n'est pas en général de Nash. On peut néanmoins conjecturer [4] que tout facteur analytique (global) d'un polynôme  $a$  est associé à un facteur de Nash de  $a$  dans l'anneau  $\mathcal{O}(U)$  de fonctions analytiques réelles sur  $U$ . Ceci est trivial pour  $n = 1$ , non résolu pour  $n \geq 2$ . La conjecture que nous venons d'évoquer impliquerait, d'après les

résultats obtenus en [2], la factorialité de  $\mathcal{N}(U)$  sous des hypothèses convenables sur  $U$  (telles que  $U$  semi-algébrique connexe et  $H^1(U, \mathbb{Z}_2) = 0$ ). Nous allons démontrer ce résultat, en dehors de toute référence à cette conjecture qui reste ouverte.

**THÉORÈME 1.** *Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert semi-algébrique. Si  $U$  est connexe et  $H^1(U, \mathbb{Z}_2) = 0$ , alors l'anneau des fonctions de Nash  $\mathcal{N}(U)$  est factoriel.*

La réciproque du théorème 1 est probablement vraie; nous démontrerons seulement:

**PROPOSITION 1.** *Si  $U \subset \mathbb{R}^2$  est un ouvert et  $\mathcal{N}(U)$  est factoriel, alors  $U$  est connexe et  $H^1(U, \mathbb{Z}_2) = 0$ .*

Signalons que la démonstration de la factorialité de  $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$  donnée dans [12] est erronée.

## 2. Anneaux semi-algébriques

Soit  $U$  un ouvert connexe non vide de  $\mathbb{R}^n$ .

**DÉFINITION.** On appelle un *anneau semi-algébrique* tout sous-anneau  $A = A(U)$  de l'anneau des fonctions de Nash  $\mathcal{N}(U)$ , contenant l'anneau  $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  des polynômes de  $n$  variables à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .

On trouvera dans [3] un exposé systématique de la théorie des anneaux semi-algébriques, des exemples, et de nombreux problèmes non résolus.

Supposons désormais que l'ensemble  $U$  satisfait la propriété (P) de Risler [12]:

(P) Si  $W$  est un ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $U \cap W$  n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

Ensembles semi-algébriques quelconques, ou sous-analytiques et relativement compacts [7] satisfont à (P).

Le théorème 1 est en fait un cas particulier (vérification triviale) du théorème suivant:

**THÉORÈME 2.** *Soit  $A = A(U)$  est un anneau semi-algébrique intégralement clos. Supposons:*

(1)  $\forall f \in A, f^{-1}(0) = \emptyset \Rightarrow f^{-1} \in A$ ;

(2) *Toute solution  $y \in \mathcal{N}(U)$  de l'équation de la forme:*

$$y^2 = a_1^2 + \cdots + a_k^2, \quad a_i \in A,$$

*appartient à  $A$ .*

(3)  *$U$  satisfait à la propriété (P) et  $H^1(U, \mathbb{Z}_2) = 0$ .*

*Alors l'anneau  $A$  est factoriel.*

Le théorème 2 sera démontré au §3. Au §4 nous donnerons quelques exemples d'anneaux semi-algébriques qui sont factoriels.

Soit  $A(U)$  un anneau semi-algébrique intégralement clos, satisfaisant l'hypothèse (1) du théorème 2. L'anneau  $A(U)$  est global régulier – c'est-à-dire noetherien et tel que le localisé  $A_{\mathcal{M}}$  soit local régulier pour tout idéal maximal  $\mathcal{M}$  de  $A$  – et (comme dans le cas polynômial complexe) tout idéal maximal de  $A$  est de la forme  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_a = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ , pour un  $a \in U$ ; ([5], [12], [3]). Pour  $a \in U$  notons  $A_{(a)}(U)$  le localisé de  $A(U)$  par rapport à l'idéal maximal  $\mathcal{M}_a$ .

On a les inclusions canoniques des anneaux locaux réguliers suivants:

$$\mathbb{R}[X]_{(a)} \subset A_{(a)}(U) \subset \mathcal{N}_{(a)}(U) \subset \mathcal{N}_a \subset \mathcal{O}_a \subset \mathcal{F}_a = \mathbb{R}[[X - a]], \quad (*)$$

où  $\mathbb{R}[X]_{(a)}$ ,  $\mathcal{N}_a$  et  $\mathcal{O}_a$  désignent respectivement le localisé de  $\mathbb{R}[X]$  par rapport à l'idéal maximal des polynômes nuls en  $a$ , l'anneau des germes de fonctions de Nash en  $a$ , et celui des germes de fonctions analytiques réelles. Tous les anneaux de la suite (\*) sont factoriels d'après le théorème de Auslander-Bushsbaum [14], et chacun d'eux est plat sur celui qui le précède [12], [3].

### 3. Démonstration du théorème 2 et de la proposition 1

**LEMME 1.** *Un idéal  $\mathcal{P}$  de l'anneau localisé  $\mathbb{R}[X]_{(a)}$  est réduit (c'est-à-dire égal à sa racine) si et seulement si  $\mathcal{P}\mathcal{N}_a$  est réduit dans  $\mathcal{N}_a$  (et donc si et seulement si  $\mathcal{P}\mathcal{F}_a$  est réduit dans  $\mathcal{F}_a$ ).*

*Preuve.* On sait que l'une des caractérisations du l'henselisé  $A^*$  d'un anneau local noetherien, intégralement clos, pseudo géométrique  $A$  est que  $A^*$  est égal à la fermeture algébrique de  $A$  dans son complété  $\hat{A}$ , et que si  $\mathcal{P}$  est réduit dans  $A$ ,  $\mathcal{P}A^*$  est réduit dans son henselisé ([10] p. 186). Le lemme en résulte puisque  $\mathcal{N}_a$  est l'henselisé de  $\mathbb{R}[X]_{(a)}$ .

*Remarque.* Le lemme 1 reste d'ailleurs valable pour tout anneau local régulier du type  $A_{(a)}(U)$ ,  $A(U)$  étant semi-algébrique. Ceci résulte du fait que  $\mathcal{N}_a$  est aussi l'henselisé de  $A_{(a)}(U)$ .

**PROPOSITION 2.** Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert satisfaisant la propriété (P) et  $g \in \mathbb{R}[X]$ . Il existe un nombre fini de fonctions analytiques irréductibles  $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}(U)$ , telles que  $g = \prod_{j=1}^p f_j$ .

*Preuve.* Pour  $\varphi \in \mathcal{O}(U)$  et  $x \in U$  notons  $\mu_x(\varphi)$  la multiplicité de  $\varphi$  en  $x$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$ ; il est évident que  $V_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu_x(g) \geq k\}$  est un sous-ensemble algébrique de  $\mathbb{R}^n$  et que  $V_k \setminus V_{k-1} = \emptyset$  pour  $k > \deg g$ . Si  $Y$  est une composante connexe de  $(V_k \setminus V_{k-1}) \cap U$  et si  $f \in \mathcal{O}(U)$  divise  $g$ , alors  $\mu_x(f)$  est constant le long de  $Y$ , puisque la fonction  $x \rightarrow \mu_x(f)$  est semi-continue supérieurement et  $u_x(g)$  est, par hypothèse, constant le long de  $Y$ . La proposition en résulte.

**PROPOSITION 3.** Soit  $\mathcal{P}$  un idéal premier de  $\mathbb{R}[X]$ .

(a) ([5], [12], [3]). Si  $A = A(U)$  est un anneau semi-algébrique intégralement clos satisfaisant l'hypothèse (1) du théorème 2, alors il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux premiers  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$  de  $A$  au-dessus de  $\mathcal{P}$  (i.e. tels que  $\mathcal{P}_i \cap \mathbb{R}[X] = \mathcal{P}$ ), tous de même hauteur et  $\mathcal{P}A = \mathcal{P}_1 \cap \dots \cap \mathcal{P}_k$ .

(b) Si  $\mathcal{P}$  est principal, engendré par un polynôme irréductible  $f$ , si l'anneau  $A(U)$  et le domaine  $U$  satisfont aux hypothèses du théorème 2, alors chaque  $\mathcal{P}_i$  est principal.

*Preuve.* La partie (a) a été démontrée par Efroymson [5] et Risler [12] lorsque  $A = \mathcal{N}(U)$ . Le cas général se démontre de façon analogue [3 §2].

(b) Soit  $f_1 \cdots f_p$  une décomposition de  $f$  en facteurs irréductibles dans  $\mathcal{O}(U)$  (proposition 2). L'hypothèse  $H^1(U, \mathbb{Z}_2) = 0$  implique que chaque  $f_i$  engendre un idéal premier de  $\mathcal{O}(U)$  ([2], corollaire 1). Si  $fA(U) = \mathcal{P}_1 \cap \dots \cap \mathcal{P}_k$ , alors pour tout  $i$  et  $a \in Z(\mathcal{P}_i) = \bigcap_{\varphi \in \mathcal{P}_i} \varphi^{-1}(0)$ , l'idéal  $\mathcal{P}_i A_{(a)}$  est principal, puisque c'est un idéal minimal associé à l'idéal principal  $fA_{(a)}$ , l'anneau  $A_{(a)}$  étant factoriel.

Quel que soit  $a \in U$ , on a la suite d'égalités suivantes:

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_1 \mathcal{O}(U) \cap \dots \cap \mathcal{P}_k \mathcal{O}(U)) \mathcal{O}_a &= \mathcal{P}_1 \mathcal{O}_a \cap \dots \cap \mathcal{P}_k \mathcal{O}_a \\ &= (\mathcal{P}_1 A_{(a)}) \mathcal{O}_a \cap \dots \cap (\mathcal{P}_k A_{(a)}) \mathcal{O}_a \\ &= (\mathcal{P}_1 A_{(a)} \cap \dots \cap \mathcal{P}_k A_{(a)}) \mathcal{O}_a \\ &= ((\mathcal{P}_1 \cap \dots \cap \mathcal{P}_k) A_{(a)}) \mathcal{O}_a = (\mathcal{P}_1 \cap \dots \cap \mathcal{P}_k) \mathcal{O}_a ; \end{aligned}$$

la première résulte de la platitude de  $\mathcal{O}_a$  sur  $\mathcal{O}(U)$ , la troisième de la platitude de  $\mathcal{O}_a$  sur  $A_{(a)}$  et les autres sont banales.

Le Théorème B de Cartan et

$$(\mathcal{P}_1 \mathcal{O}(U) \cap \dots \cap \mathcal{P}_k \mathcal{O}(U)) \mathcal{O}_a = (\mathcal{P}_1 \cap \dots \cap \mathcal{P}_k) \mathcal{O}_a, \quad \forall a \in U,$$

implique que

$$f\mathcal{O}(U) = \mathcal{P}_1\mathcal{O}(U) \cap \cdots \cap \mathcal{P}_k\mathcal{O}(U) = f_1\mathcal{O}(U) \cap \cdots \cap f_p\mathcal{O}(U)$$

Chaque idéal  $\mathcal{P}_i$  est contenu dans un idéal  $f_i\mathcal{O}(U)$ . Nous allons montrer que

- (α) Chaque  $f_i\mathcal{O}(U)$  contient précisément un seul idéal  $\mathcal{P}_i$ ;
- (β) Si, pour un  $i$  fixé,  $1 \leq i \leq k$ ,  $f_{j_1}\mathcal{O}(U), \dots, f_{j_{w(i)}}\mathcal{O}(U)$  sont tous les idéaux contenant  $\mathcal{P}_i$ , alors l'idéal  $\mathcal{P}_i\mathcal{O}_a$  de  $\mathcal{O}_a$  est engendré par le germe (en  $a$ ) de  $\prod_{l=1}^{w(i)} f_{j_l}, \forall a \in U$ .
- (γ) Fixons  $a \in U$ . Puisque  $\mathcal{P}_i A_{(a)}$  est principal, alors  $\mathcal{P}_i A_{(a)} = \varphi_i A_{(a)}$  pour un  $\varphi_i \in A(\dot{U})$ ; si  $a \notin Z(\mathcal{P}_i)$  on prend  $\varphi_i = 1$ . En localisant  $fA = \mathcal{P}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{P}_k$  on a

$$fA_{(a)} = \varphi_1 A_{(a)} \cap \cdots \cap \varphi_k A_{(a)} = \left( \prod_{i=1}^k \varphi_i \right) A_{(a)}. \quad (*)$$

Raisonnons par l'absurde; supposons que  $\mathcal{P}_{i_1} \cup \mathcal{P}_{i_2} \subset f_j\mathcal{O}(U)$ ,  $i_1 \neq i_2$ , et soit  $a \in f_j^{-1}(0)$ . Cela impliquerait que les germes  $\varphi_{i_1 a}$  et  $\varphi_{i_2 a}$  seraient divisibles par  $f_{j a}$  dans  $\mathcal{O}_a$ ; d'après (\*)  $f_a$  serait alors divisible dans  $\mathcal{O}_a$  par un facteur multiple  $f_{j a}^2$ . Ceci est impossible par le lemme 1,  $f$  étant irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ .

(β) D'après (α) on a donc (modulo une permutation d'indices):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &\subset f_1\mathcal{O}(U) \cap \cdots \cap f_{l_1}\mathcal{O}(U) = \left( \prod_{j=1}^{l_1} f_j \right) \mathcal{O}(U), \dots, \\ \mathcal{P}_k &\subset f_{l_{k-1}+1}\mathcal{O}(U) \cap \cdots \cap f_{l_k}\mathcal{O}(U) = \left( \prod_{j=l_{k-1}+1}^{l_k} f_j \right) \mathcal{O}(U), \quad (**) \end{aligned}$$

où  $1 \leq l_1 < \cdots < l_k = p$ .

Posons  $\psi_j = \prod_{m=l_{j-1}+1}^l f_m$ ,  $j = 1, \dots, k$ ;  $l_0 = 0$ . Il suffit de vérifier que si pour un  $a \in U$ ,  $\mathcal{P}_j A_{(a)} = \varphi_j A_{(a)}$ , alors  $\varphi_{ja}$  et  $\psi_{ja}$  sont associés dans  $\mathcal{O}_a$ .

Pour simplifier la notation supposons  $j = 1$  et montrons que  $\varphi_{1a}$  est associé à  $\psi_{1a}$ , où  $\psi_1 = f_1 \cdots f_{l_1}$ . D'après (\*\*)  $\varphi_{1a}$  est divisible par  $\psi_{1a}$ . Montrons la réciproque: soit  $\xi \in \mathcal{O}_a$  un facteur irréductible de  $\varphi_{1a}$ . Puisque les germes en  $a$  de  $f = \prod_{j=1}^k \psi_j$  et de  $\prod_{j=1}^k \varphi_j$  sont associés,  $\xi$  divise l'un des  $\psi_{ja}$  (et un seul).

Supposons que  $\xi$  divise  $\psi_{ja}$ , avec  $j > 1$ ;  $\xi$  divise donc un des  $f_{la}$ , avec  $l > l_1$ . Puisque  $\mathcal{P}_1\mathcal{O}_a = \varphi_1\mathcal{O}_a$ , le germe en  $a$  de chaque élément de  $\mathcal{P}_1$  possède un facteur commun avec  $f_{la}$ , à savoir  $\xi$ . D'après le corollaire 1 [2], il en résulte que  $\mathcal{P}_1 \subset f_i\mathcal{O}(U)$ , ce qui est exclu d'après (α), puisque  $f_i\mathcal{O}(U)$  contient déjà un  $\mathcal{P}_i$ , avec  $i > 1$ . Cela montre que chaque facteur irréductible de  $\varphi_{1a}$  divise  $\psi_{1a}$ , c'est-à-dire  $\psi_{1a}$  est divisible par  $\varphi_{1a}$  ( $\varphi_{1a}$  est sans facteur multiple).

Terminons maintenant la démonstration de (b): soient  $g_{j1}, \dots, g_{jm}$  les générateurs de  $\mathcal{P}_j$ . D'après ( $\beta$ ) la somme  $u_j = \sum_{i=1}^m g_{ji}^2$  est associé dans  $\mathcal{O}(U)$  à  $h_j = \prod_{i=1}^{w(j)} f_{ji}^2$ . La fonction  $u_j$ , qui est de Nash, est donc un carré d'une fonction analytique  $\gamma_j$ ; la fonction  $\gamma_j$  est alors nécessairement de Nash,  $\gamma_j \in \mathcal{N}(U)$ .

L'hypothèse (2) du théorème 2 entraîne que  $\gamma_j \in A$ . Puisque  $\gamma_j$  est associée dans l'anneau  $\mathcal{O}(U)$  à  $\prod_{i=1}^{w(j)} f_{ji}$ ,  $\gamma_j$  engendre  $\mathcal{P}_j\mathcal{O}(U)$ , ce qui implique – grâce à la fidèle platitude de  $\mathcal{O}_a$  sur  $A_{(a)}$  – que  $\gamma_j$  engendre l'idéal  $\mathcal{P}_jA_{(a)}$  de  $A_{(a)}$  et par conséquent l'idéal  $\mathcal{P}_j$  de  $A$ .

*Démonstration du théorème 2.* Soit  $\mathcal{P}$  un idéal premier de  $A(U)$ . Pour démontrer la factorialité de  $A(U)$  il suffit, d'après le théorème 5 de [8], de montrer qu'il existe un idéal premier principal contenu dans  $\mathcal{P}$ . Soit  $f$  un polynôme irréductible contenu dans  $\mathcal{P}$ . D'après la proposition 3(b),  $f = \prod_{j=1}^k \varphi_j$ , avec  $\varphi_j \in A$  et  $\varphi_j A$  premiers,  $j = 1, \dots, k$ . L'idéal  $\mathcal{P}$  contient l'un de  $\varphi_j A$ .

*Démonstration de la proposition 1.* Supposons  $H^1(U, \mathbb{Z}_2) \neq 0$ . Cette condition implique l'existence d'une droite affine  $L \subset \mathbb{R}^2$  telle que  $L \cap U$  possède au moins deux composantes connexes, pour l'une d'elles  $L_1$ , l'ensemble  $U \setminus L_1$  étant connexe.

Appelons  $L_2 = (L \cap U) \setminus L_1$ . Sans perte de généralité on peut supposer que  $L$  est l'axe des  $x$  et que  $L_1$  est l'intervalle ouvert  $]a, b[$ . La fonction  $f(x, y) = y^2$  admet deux décompositions non équivalentes dans  $\mathcal{N}(U)$ . Posons

$$f_j = \sqrt{(a-x)^2(x-b)^2 + y^2} + (-1)^j(a-x)(x-b), \quad f_j \in \mathcal{N}(U), \quad j = 1, 2$$

Il est facile de voir que:  $f = y^2 = f_1 f_2$ ,  $f_j^{-1}(0) = L_j$ ,  $f_1$  ne divise pas  $y$ ,  $f_1$  est irréductible dans  $\mathcal{N}(U)$ , ce qui prouve que  $\mathcal{N}(U)$  ne peut pas être factoriel.

*Remarque.* On peut montrer que si pour un ouvert semi-algébrique  $U \subset \mathbb{R}^n$  il existe un ensemble algébrique  $L \subset \mathbb{R}^n$  et une composante connexe  $L_1 \subset L \cap U$  de codimension 1, telle que  $U \setminus L_1$  soit connexe, alors  $\mathcal{N}(U)$  n'est pas factoriel. L'existence d'un tel ensemble  $L$  est probablement assurée lorsque  $H^1(U, \mathbb{Z}_2) \neq 0$ . Le problème est donc posé de démontrer la proposition 1 dans le cas de  $n$  variables.

Le lecteur remarquera que la construction de  $f$  dans la démonstration de la proposition 1 reste valable pour tout anneau semi-algébrique  $A(U)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^2$ , contenant  $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ , où  $\alpha_i$  sont des polynômes,  $\alpha_1^{-1}(0) \cap \alpha_2^{-1}(0) \cap U = \emptyset$ .

#### 4. Exemples

Soit un anneau semi-algébrique  $A = A(U)$ ; désignons par  $A^{(1)}$  le sous-anneau de  $\mathcal{N}(U)$  engendré par  $A(U)$  et les solutions  $y \in \mathcal{N}(U)$  des équations de la forme

$$y^2 = \sum_{i=1}^k a_i^2, \quad a_i \in A.$$

Définissons par récurrence  $A^{(n)} = (A^{(n-1)})^{(1)}$  et posons  $\bar{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^{(n)}$ . L'anneau semi-algébrique  $\bar{A}$  a la propriété (2) du théorème 2. Prenons maintenant le localisé  $S^{-1}\bar{A}$  de  $\bar{A}$  par rapport à la partie multiplicative  $S = \{f \in \bar{A} : f^{-1}(0) = \emptyset\}$ . L'anneau  $S^{-1}\bar{A}$  est encore semi-algébrique et satisfait les conditions (1) et (2) du théorème 2. Posons  $\tilde{A} = S^{-1}\bar{A}$  si  $\bar{A}$  est intégralement clos, ou bien  $\tilde{A} = (fr(S^{-1}\bar{A})) \cap \mathcal{N}(U)$  si  $\bar{A}$  ne l'est pas,  $fr(S^{-1}\bar{A})$  désigne le corps des fractions de  $S^{-1}\bar{A}$ .

L'anneau  $\tilde{A}$ , ainsi défini, satisfait toutes les hypothèses du théorème 2, il est donc factoriel si  $H^1(U, \mathbb{Z}_2) = 0$ .

Cette construction permet d'obtenir toute une série d'anneaux semi-algébriques factoriels et non isomorphes. Par exemple, prenons  $A_p(U) = \mathbb{R}[X][\sqrt[p]{f}]$  l'anneau semi-algébrique engendré par les polynômes de  $n$  variables et la racine  $\sqrt[p]{f}$ ,  $f \in \mathbb{R}[X]$  irréductible et strictement positif sur  $U$ ;  $p \in \mathbb{N}$ . On peut montrer que les anneaux semi-algébriques factoriels  $\tilde{A}_p$  et  $\tilde{A}_q$  ne sont pas isomorphes si  $p \neq q$ .

Pour terminer, observons que le critère fourni par le théorème 2 est efficace seulement pour  $A$  "assez grand" par rapport à l'anneau de polynômes: par exemple si  $A$  satisfait la propriété (2) du théorème 2, alors  $A$  ne peut pas être une  $\mathbb{R}$ -algébre de génération finie (ni le localise d'une telle algébre). Il serait intéressant de trouver un critère de factorialité pour les anneaux semi-algébriques "proches" des anneaux des polynômes; nous avons étudié à titre d'exemple  $A_j(I) = \mathbb{R}[X][\sqrt{1 + (-1)^j x}]$ ,  $j = 1, 2$ ,  $I = ]-1, 1[$  et montré que  $A_2$  est factoriel, alors que  $A_1$  ne l'est pas.

Je remercie mes amis Claude Bruter, Felice Ronga et surtout Jean-Jacques Risler pour les conversations qui m'ont permis d'éclairer certains points de ce travail.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARTIN M., *Algebraic Spaces*, Yale University 1969.
- [2] BOCHNAK J., *Sur la factorialité des anneaux de fonctions analytiques*, C.R. Acad. Sciences Paris 279 (1974), 269–272.

- [3] ——, *Sur la géométrie algébrique réelle* (à paraître).
- [4] BOCHNAK, J. and RISLER, J. J., *Analyse différentielle et géométrie analytique Symposium Plans-sur-Bex, Mars 1975*, Lecture Notes in Math 535. Springer-Verlag, Berlin 1976, 63–69.
- [5] EFROIMSON, G., *A nullstellensatz for Nash ring*, Pacific J. of Math. 54 (1) (1974), 101–112.
- [6] ——, *Substitution in Nash functions*, Pacific J. of Math. 63 (1) (1976), 137–146.
- [7] HIRONAKA, H., *Subanalytic sets; Number theory, Geometry and Commutative Algebra*, in honour Y. Akisuki, Tokyo 1973, 435–493.
- [8] KAPLANSKY J., *Commutative rings*, Chicago University Press.
- [9] MOSTOWSKI, T., *Some properties of the ring of Nash functions*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. III, 2, (1976), 245–266.
- [10] NAGATA, M., *Local rings*, Interscience, John Wiley and sons, New York, 1962.
- [11] LAZZERI, E. and TOGNOLI, A., *Alcuna proprietà degli spazi algebrici*, Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa. 24 (4) (1970) 597–632.
- [12] RISLER, J. J., *Sur l'anneau des fonctions de Nash globales*, Ann. Sc. École Normale Supérieure, 8 (3) (1975), 365–378.
- [13] ——, *Résultats récents sur les fonctions de Nash*, Séminaire Lelong 1974–1975, Springer Lecture Notes in Math 524. Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1976, 79–89.
- [14] SAMUEL, P., *Anneaux factoriels*, Soc. Matematica Sao Paulo 1963.

*Université de Genève,  
Section de Mathématiques,  
2–4, rue du Lièvre,  
Case Postale 124,  
1211 Genève 24, Suisse*

Reçu le 7 Septembre 1976