

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	52 (1977)
<b>Artikel:</b>	Ueber die Darstellungen der Automorphismengruppe einer Riemannschen Fläche in den Eigenräumen des Laplace-Operators.
<b>Autor:</b>	Huber, Heinz
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-39993">https://doi.org/10.5169/seals-39993</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Ueber die Darstellungen der Automorphismengruppe einer Riemannschen Fläche in den Eigenräumen des Laplace-Operators

HEINZ HUBER (Basel)

## 1

1.1 Es sei  $\mathfrak{F}$  eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g > 1$ . Sie besitzt genau eine Metrik konstanter Krümmung  $-1$ , die mit ihrer konformen Struktur verträglich ist. Wir betrachten die Eigenräume

$$\mathcal{E}_\lambda = \{u \in C^2(\mathfrak{F}) \mid \Delta_{\mathfrak{F}} u + \lambda u = 0\}$$

des zugehörigen Laplace–Beltrami-Operators  $\Delta_{\mathfrak{F}}$ , wobei komplex-wertige Funktionen  $u$  zugelassen werden. Die Eigenwertmenge  $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \dim \mathcal{E}_\lambda > 0\}$  ist unendlich, diskret und reell;  $\dim \mathcal{E}_0 = 1$ ,  $\dim \mathcal{E}_\lambda = 0$  für  $\lambda < 0$ .

Da jeder konforme Automorphismus  $\varphi$  von  $\mathfrak{F}$  zugleich eine Isometrie ist, so gilt

$$\Delta_{\mathfrak{F}}(u \circ \varphi) = (\Delta_{\mathfrak{F}} u) \circ \varphi,$$

und daher ist

$$u \rightarrow u \circ \varphi, \quad u \in \mathcal{E}_\lambda,$$

eine bijektive lineare Abbildung von  $\mathcal{E}_\lambda$  auf sich. Wenn also  $\lambda$  ein Eigenwert und  $U$  ein Spaltenvektor ist, dessen Komponenten

$$u_1, \dots, u_d, \quad d = \dim \mathcal{E}_\lambda < \infty,$$

eine Basis von  $\mathcal{E}_\lambda$  bilden, so gilt

$$U \circ \varphi = R_\varphi U$$

mit einer regulären  $d \times d$ -Matrix  $R_\varphi$ .

Die Gruppe  $\Phi$  aller konformen Automorphismen von  $\mathfrak{F}$  ist endlich ([3] p. 159–165). Ist  $\Phi'$  eine beliebige Untergruppe, so ist die Abbildung

$$\varphi \rightarrow R_\varphi, \quad \varphi \in \Phi', \quad (1)$$

eine Darstellung von  $\Phi'$ —die zur Basis  $U$  von  $\mathcal{E}_\lambda$  gehörige Darstellung. Wir interessieren uns für ihre irreduziblen Komponenten. Sei

$$\varphi \rightarrow M_\varphi, \quad \varphi \in \Phi', \quad (2)$$

eine vorgegebene irreduzible unitäre Darstellung vom Grade  $n$  und  $\nu(\lambda)$  die Anzahl derjenigen Komponenten der Darstellung (1), welche äquivalent zu (2) sind. Dann stellt sich die Frage, ob es immer Eigenwerte  $\lambda$  mit  $\nu(\lambda) \geq 1$  gibt. Für die Lösung dieses Problems ist es entscheidend, dass  $\nu(\lambda)$  als Dimension eines gewissen Vektorraumes interpretiert werden kann. Wir betrachten

$$\mathcal{S}_\lambda = \left\{ V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mid v_i \in \mathcal{E}_\lambda, \quad V \circ \varphi = M_\varphi V \quad \forall \varphi \in \Phi' \right\} \quad (3)$$

und zeigen:

$$\nu(\lambda) = \dim \mathcal{S}_\lambda. \quad (\text{A})$$

In der Tat: Wenn  $\nu(\lambda) = \nu \geq 1$ , so besitzt  $\mathcal{E}_\lambda$  eine solche Basis  $U$ , dass die zugehörige Darstellung (1) die Gestalt

$$R_\varphi = M_\varphi \oplus \cdots \oplus M_\varphi \oplus \cdots \quad (\nu \text{ mal})$$

hat. Setzen wir dann

$$V_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{2n} \end{pmatrix}, \dots, V_\nu = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ u_{\nu n} \end{pmatrix},$$

so sind  $V_1, \dots, V_\nu \in \mathcal{S}_\lambda$  und linear unabhängig:  $\dim \mathcal{S}_\lambda \geq \nu(\lambda)$ . Sind andererseits  $V_1, \dots, V_m$  linear unabhängige Spalten in  $\mathcal{S}_\lambda$ , so ist gewiss  $\nu(\lambda) \geq m$ , wenn ihre

$mn$  Komponenten linear unabhängige Funktionen sind. Wir benötigen also folgendes

LEMMA. Sind  $V_1, \dots, V_m \in \mathcal{S}_\lambda$  linear unabhängig und gilt

$$C_1^* V_1 + \dots + C_m^* V_m = 0, \quad C_i \in \mathcal{C}, \quad (4)$$

so folgt:  $C_1 = \dots = C_m = 0$ . (Dabei ist  $\mathcal{C}$  der Raum der Spaltenvektoren mit  $n$  konstanten komplexen Komponenten; der Stern bezeichnet den Uebergang zur konjugiert-transponierten Matrix.)

*Beweis.* Wir betrachten die Funktion

$$f = \sum_{i=1}^m C_i^* V_i$$

mit zunächst beliebigen  $C_i \in \mathcal{C}$ . Da die Darstellung (2) unitär ist, gilt für alle  $\varphi \in \Phi'$ :

$$f \circ \varphi^{-1} = \sum_{i=1}^m C_i^* (V_i \circ \varphi^{-1}) = \sum_{i=1}^m C_i^* M_\varphi^{-1} V_i = \sum_{i=1}^m (M_\varphi C_i)^* V_i.$$

Daraus folgt aber:

1.2 Ist  $\{C_1, \dots, C_m\}$  eine Lösung von (4), so ist  $\{M_\varphi C_1, \dots, M_\varphi C_m\}$  für jedes  $\varphi \in \Phi'$  ebenfalls eine Lösung.

1.3 Jetzt beweisen wir das Lemma für  $m = 1$ . Sei

$$\mathcal{C}' = \{C_1 \in \mathcal{C} \mid C_1^* V_1 = 0\}.$$

Wegen 1.2 ist  $\mathcal{C}'$  ein invarianter Unterraum von  $\mathcal{C}$  bezüglich der irreduziblen Darstellung (2). Daher ist entweder  $\mathcal{C}' = \{0\}$  oder  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$ . Im letzteren Falle wäre aber  $V_1 = 0$ , entgegen unserer Voraussetzung.

1.4 Wir nehmen nun an, es sei  $m \geq 2$  und das Lemma sei richtig für  $m - 1$  an Stelle von  $m$ . Wir betrachten den Raum  $\mathcal{C}'$  derjenigen  $C \in \mathcal{C}$ , zu denen es mindestens eine Lösung  $\{C_1, \dots, C_m\}$  von (4) mit  $C_m = C$  gibt. Wir haben zu zeigen, dass  $\mathcal{C}' = \{0\}$ . Wegen 1.2 ist  $\mathcal{C}'$  invarianter Unterraum von  $\mathcal{C}$  bezüglich (2); also ist  $\mathcal{C}' = \{0\}$  oder  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$ . Wir zeigen, dass der zweite Fall nicht eintreten kann. In diesem Falle gibt es wegen der Induktionsvoraussetzung zu jedem  $C \in \mathcal{C}$  genau eine Lösung  $\{C_1, \dots, C_m\}$  mit  $C_m = C$ , und die Abbildungen

$$C \rightarrow C_i, \quad i = 1, \dots, m - 1,$$

sind linear. Somit gibt es  $n \times n$ -Matrizen  $L_1, \dots, L_{m-1}$  derart, dass gilt: Für jedes  $C \in \mathcal{C}$  ist  $\{L_1 C, \dots, L_{m-1} C, C\}$  die einzige Lösung von (4) mit  $C_m = C$ . Daraus und aus 1.2 folgt:

$$M_\varphi L_i = L_i M_\varphi \quad \forall \varphi \in \Phi', \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Dann gibt es aber nach dem Schurschen Lemma komplexe Zahlen  $\mu_1, \dots, \mu_{m-1}$  derart, dass  $L_i = \mu_i \times \text{Einheitsmatrix}$ . Somit ist  $\{\mu_1 C, \dots, \mu_{m-1} C, C\}$  eine Lösung von (4) für jedes  $C \in \mathcal{C}$ :

$$C^*(\bar{\mu}_1 V_1 + \dots + \bar{\mu}_{m-1} V_{m-1} + V_m) = 0.$$

Dann wären aber  $V_1, \dots, V_m$  linear abhängig.

1.5 Auf Grund der Gleichung (A) kann das asymptotische Verhalten von  $\sum_{\lambda \leq t} \nu(\lambda)$  mit Hilfe der Uniformisierungstheorie und der Selbergschen Spurformel [2] studiert werden. Wir zeigen in Abschnitt 2:

$$\sum_{\lambda \leq t} \nu(\lambda) \sim \frac{(g-1)n}{\text{Ord } \Phi'} t \quad \text{für } t \rightarrow +\infty. \quad (\text{B})$$

Daraus folgt nun insbesondere, dass es tatsächlich unendlich viele Eigenwerte  $\lambda$  mit  $\nu(\lambda) \geq 1$  gibt! Wenn die Gruppe  $\Phi'$  in  $h$  Klassen konjugierter Elemente zerfällt, so besitzt sie genau  $h$  inaequivalente irreduzible Darstellungen. Ihre Grade seien  $n_1, \dots, n_h$ , und es sei  $\nu_i(\lambda)$ ,  $1 \leq i \leq h$ , die Anzahl der Komponenten von (1), die aequivalent zur  $i$ -ten Darstellung sind. Dann ist nach (B)

$$\sum_{\lambda \leq t} \nu_i(\lambda) \sim \frac{(g-1)n_i}{\text{Ord } \Phi'} t.$$

Daraus folgt wegen

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{E}_\lambda &= \sum_{i=1}^h n_i \nu_i(\lambda): \\ \sum_{\lambda \leq t} \dim \mathcal{E}_\lambda &\sim \frac{g-1}{\text{Ord } \Phi'} \left( \sum_{i=1}^h n_i^2 \right) t. \end{aligned} \quad (5)$$

Andererseits ist nach Gauss-Bonnet der Inhalt von  $\mathfrak{F}$  gleich  $4\pi(g-1)$  und daher

$$\sum_{\lambda \leq t} \dim \mathcal{E}_\lambda \sim (g-1)t. \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt  $\text{Ord } \Phi' = \sum_{i=1}^h n_i^2$ , in Uebereinstimmung mit einem klassischen Satz der Darstellungstheorie endlicher Gruppen.

## 2. Beweis von (B)

2.1 Wir versehen die obere Halbebene

$$H = \{z = x + iy \mid y > 0\}$$

mit der Differentialgeometrie

$$ds = y^{-1}|dz|, \quad (7)$$

welche die konstante Krümmung  $-1$  besitzt. Der zugehörige Laplace–Beltramioperator ist

$$\Delta = y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Da das Geschlecht  $g$  von  $\mathfrak{F}$  grösser als 1 ist, gibt es eine konforme Ueberlagerungsabbildung  $P: H \rightarrow \mathfrak{F}$ . Die zu  $P$  gehörige Deckgruppe  $\Gamma$  ist eine Untergruppe der Gruppe  $\Theta$  aller konformen Selbstabbildungen von  $H$ . Da  $\Theta$  Untergruppe der Isometriegruppe von (7) ist, können wir mit Hilfe von  $P$  die Differentialgeometrie (7) von  $H$  auf  $\mathfrak{F}$  verpflanzen; das ergibt gerade die in 1.1 charakterisierte Metrik von  $\mathfrak{F}$ . Für Funktionen  $v \in C^2(\mathfrak{F})$  gilt dann

$$(\Delta_{\mathfrak{F}} v) \circ P = \Delta(v \circ P). \quad (8)$$

$\Gamma$  wirkt fixpunktfrei und diskontinuierlich auf  $H$  und besitzt einen kompakten Fundamentalbereich  $\mathcal{D}_\Gamma$ . Nach dem Satze von Gauss–Bonnet gilt

$$A(\mathcal{D}_\Gamma) := \iint_{\mathcal{D}_\Gamma} y^{-2} \, dx \, dy = 4\pi(g-1). \quad (9)$$

2.2 Nun sei  $\Gamma_0$  der Normalisator von  $\Gamma$  in  $\Theta$ . Dann gibt es zu jedem  $\gamma \in \Gamma_0$  genau ein  $\hat{\gamma} \in \Phi$  derart, dass

$$P \circ \gamma = \hat{\gamma} \circ P, \quad (10)$$

und die Abbildung

$$\gamma \rightarrow \hat{\gamma}, \quad \gamma \in \Gamma_0, \quad (11)$$

ist ein Homomorphismus von  $\Gamma_0$  auf  $\Phi$  mit dem Kern  $\Gamma$ . (Vergl. dazu [3] p. 159–165). Es sei  $\Gamma'_0$  das Urbild von  $\Phi'$  unter diesem Homomorphismus. Dann ist

$$[\Gamma'_0 : \Gamma] = \text{Ord } \Phi' < \infty. \quad (12)$$

Also besitzt auch  $\Gamma'_0$  einen kompakten Fundamentalbereich  $\mathcal{D}_{\Gamma'_0}$ , und es gilt:

$$[\Gamma'_0 : \Gamma] A(\mathcal{D}_{\Gamma'_0}) = A(\mathcal{D}_{\Gamma}). \quad (13)$$

Aus (9), (12) und (13) ergibt sich:

$$A(\mathcal{D}_{\Gamma'_0}) = 4\pi(g-1)/\text{Ord } \Phi'. \quad (14)$$

### 2.3 Die Abbildung

$$\gamma \rightarrow M_{\hat{\gamma}}, \quad \gamma \in \Gamma'_0, \quad (15)$$

ist nun eine unitäre Darstellung von  $\Gamma'_0$  vom Grade  $n$ , welche den Normalteiler  $\Gamma$  von  $\Gamma'_0$  auf die Einheitsmatrix abbildet. Wir betrachten die zu dieser Darstellung gehörigen Selbergschen Räume

$$\mathcal{S}'_{\lambda} = \left\{ V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mid v_i \in C^2(H), \Delta v_i + \lambda v_i = 0, V \circ \gamma = M_{\hat{\gamma}} V \forall \gamma \in \Gamma'_0 \right\}$$

Wegen (8) und (10) sieht man sofort, dass

$$V \rightarrow V \circ P, \quad V \in \mathcal{S}_{\lambda},$$

eine bijektive lineare Abbildung von  $\mathcal{S}_{\lambda}$  auf  $\mathcal{S}'_{\lambda}$  ist:

$$\dim \mathcal{S}'_{\lambda} = \dim \mathcal{S}_{\lambda}. \quad (16)$$

2.4 Wir wollen jetzt auf die unitäre Darstellung (15) die Selbergsche Spurformel anwenden. Dazu haben wir die Klassen konjugierter Elemente von  $\Gamma'_0$  zu betrachten: Es sei  $\gamma_i \in \Gamma'_0$ , ( $i = 1, \dots$ ), ein volles Repräsentantensystem der primitiven hyperbolischen Klassen;  $\gamma_i$  ist innerhalb  $\Theta$  konjugiert zu einer Abbildung

$$z \rightarrow e^{l_i} z, \quad l_i > 0.$$

$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_f$  sei ein Repräsentantensystem der primitiven elliptischen Klassen von  $\Gamma_0'$  (sofern es solche gibt);  $m_i$  sei die Ordnung von  $\varepsilon_i$ . Dann liefert die Selbergsche Spurformel (3.2) in [2] mit

$$h(r) = \exp(-sr^2), \quad g(u) = \frac{1}{2\sqrt{\pi s}} \exp(-u^2/4s), \quad s > 0:$$

$$2 \exp(s/4) \sum_{\lambda \geq 0} (\dim \mathcal{S}'_\lambda) \exp(-s\lambda) = F(s) + E(s) + \frac{1}{2\sqrt{\pi s}} H(s), \quad (17)$$

$$F(s) = \frac{A(\mathcal{D}_{\Gamma_0'})n}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r \operatorname{Tg}(\pi r) \exp(-sr^2) dr = \frac{A(\mathcal{D}_{\Gamma_0'})n}{2s} \int_0^\infty \frac{\exp(-sr^2)}{\cos^2 \pi r} dr, \quad (18)$$

$$E(s) = \sum_{i=1}^f \sum_{k=1}^{m_i-1} \frac{\operatorname{Sp}(M_{\hat{\varepsilon}_i}^k)}{m_i \sin(k\pi/m_i)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2\pi rk/m_i)}{1 + \exp(-2\pi r)} \exp(-sr^2) dr, \quad (19)$$

$$H(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Sp}(M_{\hat{\varepsilon}_i}^k) \frac{l_i}{\sin(kl_i/2)} \exp(-k^2 l_i^2/4s). \quad (20)$$

Die Reihe

$$h(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_i}{\sin(kl_i/2)} \exp(-k^2 l_i^2/4s) \quad (21)$$

konvergiert für  $s > 0$ . Daraus folgt:

$$c = \inf l_i > 0.$$

Daher gilt:

$$\exp(-k^2 l_i^2/4s) \leq [\exp(-c^2/8s)] \cdot [\exp(-k^2 l_i^2/8s)], \quad i, k \geq 1. \quad (22)$$

Da  $M_{\hat{\varepsilon}_i}^k$  eine unitäre  $n \times n$ -Matrix ist, so gilt:

$$|\operatorname{Sp}(M_{\hat{\varepsilon}_i}^k)| \leq n. \quad (23)$$

Nun ergibt sich aus (20)–(23):

$$|H(s)| \leq n \exp(-c^2/8s) h(2s), \quad s > 0.$$

Daraus folgt

$$H(s) = O(\exp(-c^2/8s)) \quad \text{für } s \downarrow 0. \quad (24)$$

weil  $h(s)$  für  $s > 0$  monoton wächst.

Wegen  $1 \leq k < m_i$  gilt:

$$\lim_{s \downarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2\pi rk/m_i)}{1 + \exp(-2\pi r)} \exp(-sr^2) dr = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2\pi rk/m_i)}{1 + \exp(-2\pi r)} dr < +\infty.$$

Somit folgt aus (19):

$$E(s) = O(1), \quad s \downarrow 0. \quad (25)$$

Wegen

$$\lim_{s \downarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-sr^2)}{\cos^2 \pi r} dr = \int_0^{\infty} \frac{dr}{\cos^2 \pi r} = \frac{1}{\pi}$$

folgt endlich aus (18) und (14):

$$F(s) \sim \frac{2(g-1)n}{\text{Ord } \Phi'} \cdot \frac{1}{s}, \quad s \downarrow 0. \quad (26)$$

Aus (17) und (24)–(26) ergibt sich:

$$\sum_{\lambda \geq 0} (\dim \mathcal{S}'_{\lambda}) \exp(-s\lambda) \sim \frac{(g-1)n}{\text{Ord } \Phi'} \cdot \frac{1}{s}, \quad s \downarrow 0.$$

Daraus schliesst man mit Hilfe eines Tauberschen Theorems von Karamata [1]:

$$\sum_{\lambda \leq t} \dim \mathcal{S}'_{\lambda} \sim \frac{(g-1)n}{\text{Ord } \Phi'} t, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Damit ist wegen (16) und (A) der Beweis von (B) erbracht.

## LITERATUR

- [1] KARAMATA, J., *Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen*, J. reine angew. Math. 164 (1931), 27–39.
- [2] SELBERG, A., *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. 20 (1956), 47–87.
- [3] WEYL, H., *Die Idee der Riemannschen Fläche*, (Teubner, Leipzig und Berlin 1913).

*Mathematisches Institut,  
Rheinsprung 21, 4000 Basel*

Eingegangen den 26. August 1976