

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 51 (1976)

**Artikel:** Bemerkungen über zwei Beweise von Herrn A. Ostrowski  
**Autor:** Murphy, Brian B.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-39461>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 30.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Bemerkungen über zwei Beweise von Herrn A. Ostrowski

BRIAN B. MURPHY

In [1] wurde folgender Entwicklungssatz bewiesen.

SATZ. Es sei  $A = (a_{ij})$  eine quadratische Matrix  $n$ -ter Ordnung. Dann ist  $A_{ij}$ , das algebraische Komplement von  $a_{ij}$  in der Entwicklung von  $|A|$ , gleich

$$\sum_{\gamma} (-a_{jk})(-a_{kl}) \cdots (-a_{mi}) D^{\{\gamma\}}$$

wobei  $\gamma = (ijkl \cdots m)$  einen beliebigen Zyklus von der symmetrischen Gruppe  $S_{\{1,2,\dots,n\}}$  darstellt, und  $D^{\{\gamma\}}$  die koaxiale Unterdeterminante von  $A$ , welche die Reihen und Kolonnen  $i, j, k, l, \dots, m$  nicht enthält, ist.<sup>(1)</sup>

Dieser Satz erlaubt eine neue Formulierung vom Beweis von Satz IX und einen neuen Beweis von Satz X von Herrn A. Ostrowski ([2], s204, 207). Dieses geschieht in den folgenden Paragraphen.

SATZ IX. Sei  $A$  eine Determinante vom Typus

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \cdots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & -\alpha_{2n} \\ \vdots & & & \ddots \\ \vdots & & & \ddots \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

wo sämtliche  $\alpha_{\mu\nu} \geq 0$  und sämtliche koaxiale Unterdeterminanten, ebenso wie die Determinante  $A$ , selbst nicht negativ sind. Ist dann eines der Diagonalelemente  $\alpha_{\nu\nu} = 0$ , so verschwindet  $A$  und zugleich verschwindet jeder der  $n!$  Terme in der Entwicklung der Determinante  $A$ .

<sup>(1)</sup> Für die genauere Symbolik verweisen wir auf [1].

*Beweis.* Da die Behauptung für  $n = 1$  trivial ist, dürfen wir beim Beweis annehmen, dass der Satz für kleinere Werte von  $n$  bereits bewiesen ist.

Unbeschadet der Allgemeinheit können wir annehmen, dass  $\alpha_{11} = 0$  ist. Entwicklung der Determinante nach der ersten Reihe ergibt

$$A = \alpha_{11} A_{11} - \alpha_{12} A_{12} - \cdots - \alpha_{1n} A_{1n},$$

wobei das erste Glied rechts verschwindet. Nach Anwendung des Entwicklungssatzes bekommen wir

$$A = -\alpha_{12} \sum_{\gamma} \alpha_{2k} \alpha_{kl} \cdots \alpha_{m1} D^{\{\gamma\}} - \cdots - \alpha_{1n} \sum_{\gamma} \alpha_{nk} \alpha_{kl} \cdots \alpha_{m1} D^{\{\gamma\}}.$$

In dieser Darstellung ist jeder Term auf der rechten Seite nicht positiv, während  $A$  selbst nicht negativ ist. Daher müssen sowohl  $A$ , als auch die einzelnen Terme rechts, verschwinden.

Es sei  $l$  die Länge des Zyklus  $\gamma$ . Dann ist das algebraische Komplement von  $D^{\{\gamma\}}$  eine koaxiale Unterdeterminante von  $A$  von der Ordnung  $l$ . Im Falle  $l = n$ , ist  $D^{\{\gamma\}} = 1$  und daher muss der entsprechende Vorfaktor in der obigen Entwicklung verschwinden, da sonst  $A = 0$  unmöglich wäre. Im Falle  $l < n$  ist das erwähnte Komplement eine koaxiale Unterdeterminante von  $A$  von einer Ordnung  $< n$ , mit  $\alpha_{11}$  auf der Hauptdiagonale. Der Satz IX darf also auf diese Unterdeterminante angewandt werden. Daraus schliesst man wieder, dass der Vorfaktor von  $D^{\{\gamma\}}$  verschwindet. Damit ist der Satz IX völlig bewiesen.

Im nächsten Satz bedeutet  $E$  die Einheitsmatrix  $n$ -ter Ordnung, und ‘eigentliche  $M$ -matrix’ eine Matrix mit positiven Diagonalelementen, positiver Determinante, nicht negativen Hauptminoren, und lauter nicht positiven Elementen ausserhalb der Hauptdiagonale.

**SATZ X.** *Es sei  $A$  eine reelle  $(n \times n)$ -Matrix mit der Eigenschaft, dass sowohl  $A^{-1}$  als auch  $(A + \lambda E)^{-1}$  für alle hinreichend grossen  $\lambda$  lauter nicht negative Elemente hat. Dann ist  $A$  eine eigentliche  $M$ -matrix.*

*Beweis.* Nach dem Hilfssatz H von Herrn Ostrowski [2, s206], genügt es zu beweisen, dass alle Elemente von  $A$  ausserhalb der Hauptdiagonale  $\leq 0$  sind. Das ist der eigentliche Zweck der folgenden Überlegungen.

Es sei  $\lambda_0$  mindestens so gross, dass  $|A + \lambda E|$  und alle koaxialen Unterdeterminanten von  $A + \lambda E$  positiv für  $\lambda \geq \lambda_0$  sind. Um zu zeigen, z.B., dass  $\alpha_{12} \leq 0$  ist, beachte man, dass das algebraische Komplement von  $\alpha_{21}$  in  $|A + \lambda E|$  nicht negativ

sein kann. Anwendung vom Entwicklungssatz auf die Matrix  $A + \lambda E$  ergibt<sup>(2)</sup>

$$(A + \lambda E)_{2,1} = -a_{12}D^{\{1,2\}} + O(\lambda^{n-3})$$

wobei der erste Term rechts  $O(\lambda^{n-2})$  ist. Diese Gleichung liefert für  $\lambda \rightarrow \infty$

$$-a_{12}D^{\{1,2\}} \geq 0$$

woraus  $a_{12} \leq 0$  folgt, weil  $D^{\{1,2\}} > 0$  für  $\lambda \geq \lambda_0$  ist. Damit ist der Satz X auch bewiesen.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] MURPHY, B.: *Expansion of  $(n-1)$ -Rowed Subdeterminants*. Math. Z. 147 (1976) 205.
- [2] OSTROWSKI, A.: *Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale und die absolute Konvergenz von linearen Iterationsprozessen*. Commentarii math. Helvet. 30 (1956) 175–210.

Corporate Research Unit  
 Mail Code 1804  
*Blue Cross Blue Shield of Michigan*  
 600 East Lafayette  
 Detroit, Mich. 48226  
 U.S.A.

Eingegangen den 28. Mai 1976

---

<sup>2</sup> Diese Formel folgt auch wenn man den Kofaktor  $(A + \lambda E)_{j,i}$  nach der  $i$ -ten Reihe entwickelt.

