

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 51 (1976)

**Artikel:** Familien komplexer Räume mit streng pseudokonvexer spezieller Faser  
**Autor:** Riemenschneider, Oswald  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-39458>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 30.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Familien komplexer Räume mit streng pseudokonvexer spezieller Faser

OSWALD RIEMENSCHNEIDER

## Einleitung

In [8] wurde das folgende Resultat bewiesen, das ein nützliches Hilfsmittel zur Untersuchung von Deformationen rationaler Singularitäten darstellt (vgl. z.B. [1], [3], [4], [9]):

**SATZ 0.** *Es sei  $\tilde{\pi}: \tilde{Z} \rightarrow S$  eine reguläre Familie komplexer Mannigfaltigkeiten mit regulärer Basis  $S$ . Die Faser  $\tilde{Z}_0$  über einem festen Punkt  $s_0 \in S$  sei Auflösung einer rationalen Singularität  $(X, x_0)$ . Dann läßt sich  $\tilde{\pi}$  fiberweise zu einer Deformation  $\pi: Z \rightarrow S$  von  $(X, x_0) = \pi^{-1}(s_0)$  zusammenblasen (nach evtl. Verkleinerung von  $S$ ).*

Da sich jedoch die Voraussetzung der Regularität von  $S$  bei den Anwendungen als hinderlich erwies, werden wir in dieser Arbeit einen Beweis für beliebiges  $S$  nachtragen. Wir haben dazu die beiden Hauptschritte des Beweises als eigenständige Aussagen herauspräpariert, zumal sie nicht von der Rationalität der Singularität  $(X, x_0)$  abhängen und deswegen auch zur Untersuchung nichtrationaler Singularitäten herangezogen werden können. Wir beweisen in Abschnitt 1:

**SATZ 1.** *Es sei  $\pi: Z \rightarrow S$  eine holomorphe Abbildung komplexer Räume mit streng pseudokonvexer spezieller Faser  $X = \pi^{-1}(s_0)$ ,  $s_0 \in S$  fest. Dann gibt es zu jeder kompakten Menge  $K \subset X$  offene Mengen  $U \subset Z$ ,  $V \subset S$  mit  $K \subset U$ ,  $s_0 \in V$ ,  $\pi(U) \subset V$ , s.d.  $\pi|U: U \rightarrow V$  eine 1-konvexe holomorphe Abbildung ist.*

In Abschnitt 2 zeigen wir, daß unter gewissen Voraussetzungen Plattheit beim Zusammenblasen 1-konvexer holomorpher Abbildungen erhalten bleibt (zur Definition 1-konvexer holomorpher Abbildungen und zur Existenz ihrer Reduktion vgl. die Abschnitte 1 und 2 und die dort angegebene Literatur). Es gilt:

**SATZ 2.** *Es sei*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{\sigma} & Z \\ \tilde{\pi} \searrow & & \swarrow \pi \\ & S & \end{array}$$

das kanonische Reduktionsdiagramm einer 1-konvexen holomorphen Abbildung  $\tilde{\pi}$ .  $\mathcal{F}$  sei eine kohärente analytische Garbe auf  $\tilde{Z}$ , die entlang einer Faser  $\tilde{Z}_0 = \tilde{\pi}^{-1}(s_0)$  platt über  $S$  sei. Ferner sei eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ( $\mathcal{F}_s$  bezeichnet die analytische Einschränkung von  $\mathcal{F}$  auf die Faser  $\tilde{Z}_s$ ):

- (i)  $H^1(\tilde{Z}_0, \mathcal{F}_{s_0}) = 0$
- (ii)  $\dim_{\mathbb{C}} H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{F}_s)$  konstant in einer Umgebung von  $s_0$  und  $S$  reduziert in  $s_0$ .

Die Bildgarbe  $\sigma_* \mathcal{F}$  ist dann  $\pi$ -platt entlang der Faser  $Z_0 = \pi^{-1}(s_0)$ .

Zum Beweis von Satz 2 ist es notwendig, einen der Halbstetigkeitssätze aus [7] zu verallgemeinern (Lemma 1).

Im Abschnitt 3 wenden wir die Sätze 1 und 2 auf Deformationen analytischer Singularitäten an. Zunächst vervollständigen wir ein Resultat aus [10]: Ist  $\tilde{\pi} : \tilde{Z} \rightarrow S$  eine platte 1-konvexe Deformation der streng pseudokonvexen Mannigfaltigkeit  $\tilde{X} = \tilde{\pi}^{-1}(s_0)$  mit reduziertem  $S$  und  $\dim H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s}) = \text{const.}$ , so ist in dem Reduktionsdiagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{\sigma} & Z \\ \tilde{\pi} \searrow & & \swarrow \pi \\ & S & \end{array}$$

$\pi$  eine *platte* Deformation von  $Z_0 = \pi^{-1}(s_0)$  und  $X = Z_0$  ist der Remmert-Quotient von  $\tilde{X}$  (Satz 3). Hieraus folgt sofort Satz 0 bei beliebigem Grundraum  $S$  (Satz 4). Satz 5 liefert eine partielle Umkehrung von Satz 3, mit deren Hilfe für bestimmte 1-konvexe Deformationen  $\tilde{\pi} : \tilde{Z} \rightarrow S$  von  $\tilde{X}$  maximale Teilstufen  $\tilde{Z} \mid S_a \rightarrow S_a$ ,  $S_a \hookrightarrow S$ , gefunden werden können, die sich simultan zu Deformationen von  $X$  zusammenblasen lassen (Satz 6). Dieses Ergebnis wird sodann bei der Konstruktion simultaner Auflösungen isolierter Singularitäten verwendet. Schließlich beweisen wir einen Satz von Huijshoven [4] über Brieskorns Auflösung der versellen Deformation eines rationalen Doppelpunktes in einer schärferen Fassung.

## 1. Beweis von Satz 1

Wir erinnern zunächst an die Definition streng pseudokonvexer komplexer Räume und 1-konvexer holomorpher Abbildungen. Die auftretenden komplexen Räume sind nicht notwendig reduziert.

DEF. 1. Eine holomorphe Abbildung  $\pi: Z \rightarrow S$  heißt *1-konvex*, wenn es eine  $C^\infty$ -Funktion  $\varphi: Z \rightarrow \mathbb{R}$  und eine Konstante  $c_* \in \mathbb{R}$  gibt, s.d. folgendes gilt:

- (i)  $\varphi|_{\{z \in Z : \varphi(z) > c_*\}}$  ist streng plurisubharmonisch,
- (ii) für jedes  $c \in \mathbb{R}$  ist die Abbildung

$$\pi|_{\{z \in Z : \varphi(z) \leq c\}}$$

eigentlich.

Man nennt dann  $\varphi$  eine *Ausschöpfungsfunktion* mit *Konvexitätschranke*  $c_*$ .

Ein komplexer Raum  $X$  heißt *streng pseudokonvex*, wenn die Abbildung von  $X$  auf den reduzierten einpunktigen Raum 1-konvex ist.

Liegt eine 1-konvexe holomorphe Abbildung  $\pi: Z \rightarrow S$  mit Ausschöpfungsfunktion  $\varphi$  vor, so schreiben wir abkürzend für alle  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  mit  $a < b$ :

$$Z_a^b = \{z \in Z : a < \varphi(z) < b\}$$

$$Z_{-\infty}^b = Z^b, \quad Z_a^\infty = Z_a,$$

$$\pi^b = \pi|_{\{z \in Z : \varphi(z) \leq b\}}.$$

Wir können nun mit dem *Beweis von Satz 1* beginnen. Da  $X = \pi^{-1}(s_0)$  streng pseudokonvex ist, besitzt  $X$  eine Ausschöpfungsfunktion  $\varphi$  mit Konvexitätschranke  $c_*$ . Mithin gibt es ein  $c \in \mathbb{R}$  mit  $K \subset X^c$ , wobei wir ohne Einschränkung  $c > c_*$  voraussetzen können.

Wir werden  $U$  sogar so konstruieren, daß  $U \cap X = X^c$  gilt.

Wähle reelle Konstanten  $a_1, \dots, a_5, b_1, b_2$  mit  $c_* = a_1 < \dots < a_5 < c < b_2 < b_1$ . Nun gibt es zu jedem Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U_x \subset Z$  von  $x$ , eine Umgebung  $V_x \subset S$  von  $s_0$  und eine abgeschlossene holomorphe Einbettung  $j_x: U_x \hookrightarrow U_x \times V_x$ , s.d.  $\pi(U_x) \subset V_x$  und mit  $\pi_x = \pi|_{U_x}$  das kanonische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U_x & \xrightarrow{j_x} & U_x \times V_x \\ \pi_x \searrow & & \swarrow pr_2 \\ & V_x & \end{array}$$

kommutiert, wobei  $pr_2$  die Projektion auf den zweiten Faktor bezeichnet. Da nach Voraussetzung  $\overline{X^{b_1}}$  kompakt ist, genügen endlich viele Punkte  $x_j, j = 1, \dots, t$ , s.d.

die  $U_{x_j}$ ,  $j = 1, \dots, t$ , die Menge  $\overline{X^{b_1}}$  überdecken. Setze

$$V_0 = \bigcap_{j=1}^t V_{x_j}, \quad U_0 = \bigcup_{j=1}^t \pi_{x_j}^{-1}(V_0).$$

Dann ist  $U_0$  eine offene Menge in  $Z$  mit  $U_0 \cap X \supset \overline{X^{b_1}}$ , es gilt  $\pi(U_0) \subset V_0$ , und  $U_0$  besitzt abzählbare Topologie, wenn die  $U_{x_j}$  hinreichend klein gewählt wurden.

Da  $X_{a_1}^{b_1} \Subset U_0 \cap X$  und  $\varphi$  dort streng plurisubharmonisch ist, gibt es nach Richberg [6] eine offene Menge  $U_1$  in  $Z$  mit  $U_1 \Subset U$ ,  $U_1 \cap X = X_{a_1}^{b_1}$  und eine streng plurisubharmonische Funktion  $\Phi_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\Phi_1|_{U_1 \cap X} = \varphi$ . Wegen  $X_{a_2}^{b_2} \Subset X_{a_1}^{b_1}$  und  $X^{a_3} \Subset X^{a_4} \Subset X^{b_1}$  findet man weitere offene Mengen  $U_2, U_3, U_4$  in  $Z$  mit

$$\begin{aligned} U_2 &\Subset U_1, \quad U_2 \cap X = X_{a_2}^{b_2}, \\ U_3 &\Subset U_4 \Subset U_0, \quad U_i \cap X = X^{a_i}, \quad i = 3, 4. \end{aligned}$$

Setze  $\varphi|_{X^{a_4}}$  beliebig zu einer  $C^\infty$ -Funktion  $\Phi_4$  auf  $U_4$  fort. Ist dann  $\{\delta_1, \delta_4\}$  eine Teilung der 1 bzgl. der Überdeckung  $\{U_1, U_4\}$  von  $W_1 = U_1 \cup U_4$ , so ist

$$\Phi := \delta_1 \Phi_1 + \delta_4 \Phi_4$$

eine  $C^\infty$ -Funktion auf  $W_1$  mit

$$\Phi|_{W_1 \cap X} = \varphi|_{X^{b_1}},$$

und

$$\Phi|_{W_1 \setminus \bar{U}_4} = \Phi_1|_{U_1 \setminus \bar{U}_4}$$

ist streng plurisubharmonisch. Setze schließlich noch  $W_2 = U_2 \cup U_3$ ; es gilt dann  $W_2 \Subset W_1$ ,  $W_2 \cap X = X^{b_2}$ .

Nach diesen Vorbereitungen führen wir den Beweis von Satz 1 in drei Schritten.

**BEHAUPTUNG 1.** *Es existiert eine Umgebung  $V_1 = V_1(s_0) \subset V_0$ , s.d.*

$$\{z \in W_1 \cap \pi^{-1}(V_1) : \Phi(z) > a_5\} \subset W_1 \setminus \bar{U}_4.$$

Denn angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es zu jedem  $V = V(s_0) \subset V_0$  ein  $z \in W_1 \cap \pi^{-1}(V_1) \cap \bar{U}_4$  mit  $\Phi(z) > a_5$ . Man findet somit eine unend-

liche Folge  $z_j \in W_1 \cap \bar{U}_4$  mit  $\Phi(z_j) > a_5$  und  $\lim \pi(z_j) = s_0$ . Da  $\bar{U}_4$  kompakt ist, kann man ohne Einschränkung annehmen, daß die Folge  $(z_j)$  gegen ein Element  $z_0 \in \bar{U}_4$  konvergiert. Also ist  $z_0 \in \bar{U}_4 \cap X \subset X^{a_5}$ , d.h.  $z_0 \in W_1$  und  $\Phi(z_0) = \varphi(z_0) < a_5$ . Dies ist aber ein Widerspruch zu  $\Phi(z_j) > a_5$  für alle  $j$ .

**BEHAUPTUNG 2.** *Es existiert eine Umgebung  $V = V(s_0) \subset V_1$ , s.d. die Abbildungen*

$$\omega^d = \pi \mid \{z \in W_2 \cap \pi^{-1}(V) : \Phi(z) \leq d\}, \quad d \leq c,$$

*eigentlich sind.*

Denn angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es zu beliebigem  $V = V(s_0)$  ein Kompaktum  $K \subset V$  und ein  $d \leq c$ , s.d.  $L = (\omega^d)^{-1}(K)$  nicht kompakt ist. Wähle dann eine Folge  $(z_j)$  in  $L$ , die keine in  $L$  konvergente Teilfolge besitzt. Da  $\overline{W_2}$  kompakt ist, existiert jedoch eine Teilfolge, die in  $\overline{W_2}$  konvergiert. Der Grenzwert  $z_0$  besitzt dann die folgenden Eigenschaften:

$$\Phi(z_0) \leq d, \quad z_0 \in \overline{W_2} \setminus W_2 = \partial W_2, \quad \pi(z_0) \in K.$$

Läßt man nun  $V$  immer kleiner werden, so erhält man auf diese Weise eine Folge  $(z_{0j})$  mit

$$\Phi(z_{0j}) \leq c, \quad z_{0j} \in \partial W_2, \quad \lim \pi(z_{0j}) = s_0.$$

Da  $\partial W_2$  kompakt ist, kann man ohne Einschränkung annehmen, daß diese Folge gegen ein Element  $z_{00} \in \partial W_2$  konvergiert. Für dieses gilt dann

$$\Phi(z_{00}) \leq c,$$

andererseits aber

$$z_{00} \in \partial W_2 \cap X = \partial X^{b_2} \subset \{x \in X : \varphi(x) = b_2\}$$

und damit  $\Phi(z_{00}) = \varphi(z_{00}) = b_2 > c$ . Widerspruch!

**BEHAUPTUNG 3.** *Man wähle  $V$  wie in Behauptung 2 und*

$$U = \{z \in W_2 \cap \pi^{-1}(V) : \Phi(z) < c\}.$$

Dann ist  $\pi: U \rightarrow V$  eine 1-konvexe holomorphe Abbildung mit Ausschöpfungsfunktion

$$\psi = (c - \Phi)^{-1}$$

und Konvexitätsschranke  $a_* = (c - a_5)^{-1}$ .

Denn  $\psi$  ist eine  $C^\infty$ -Funktion auf  $U$ , die dort streng plurisubharmonisch ist, wo dies auch für  $\Phi$  zutrifft, nach Behauptung 1 also auf  $\{z \in U : \Phi(z) > a_5\} = \{z \in U : \psi(z) > a_*\}$ . Ist weiter  $a \in \mathbf{R}$  und  $K \subset V$  kompakt, so ist

$$\{z \in U \cap \pi^{-1}(K) : \psi(z) \leq a\} = \begin{cases} \phi, & a \leq 0 \\ \left\{ z \in U \cap \pi^{-1}(K) : \Phi(z) \leq c - \frac{1}{a} \right\}, & a > 0. \end{cases}$$

Da die rechts stehende Menge nach Behauptung 2 kompakt ist, ist

$$\pi^a = \pi | \{z \in U : \psi(z) \leq a\}$$

eigentlich für alle  $a \in \mathbf{R}$ .—Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

*Bemerkung.* Die Definition einer 1-konvexen holomorphen Abbildung  $\pi$  schließt nicht aus, daß einzelne oder sogar alle Fasern der Abbildung kompakt sein können und damit nicht streng pseudokonvex im eigentlichen Sinne sind. Setzt man jedoch voraus, daß  $\pi$  platt und eine Faser  $\pi^{-1}(s_0)$  nicht kompakt ist, so sind auch alle hinreichend nahe bei  $\pi^{-1}(s_0)$  liegenden Fasern nicht kompakt. Nur unter dieser Voraussetzung liefert Satz 1 die Existenz einer “schönen” Familie mit streng pseudokonvexen Fasern.

## 2. Beweis von Satz 2

Es sei im folgenden  $\tilde{\pi}: \tilde{Z} \rightarrow S$  eine 1-konvexe holomorphe Abbildung mit Ausschöpfungsfunktion  $\varphi$ , es sei  $s_0 \in S$ , und  $\mathcal{F}$  sei eine kohärente analytische Garbe auf  $\tilde{Z}$ , die  $\tilde{\pi}$ -platt entlang  $\tilde{Z}_0 = \tilde{\pi}^{-1}(s_0)$  sei. Da uns nur lokale Aussagen bzgl.  $s_0$  interessieren, können wir annehmen, daß  $S$  klein ist. Da weiter Plattheit eine offene Eigenschaft ist,  $\tilde{\pi} | \tilde{Z}^c$  eine 1-konvexe holomorphe Abbildung ist für alle  $c > c_*$  und die Restriktionsabbildungen

$$H^q(\tilde{Z}_s, \mathcal{F}_s) \rightarrow H^q(\tilde{Z}_s^c, \mathcal{F}_s)$$

bijektiv sind für alle  $q \geq 1$  und alle  $c > c_*$ , können wir außerdem voraussetzen, daß  $\mathcal{F}$  in jedem Punkt von  $\tilde{Z}$  platt über  $S$  ist.

Setzt man ohne Einschränkung  $S$  als Steinsch voraus, so gelten die folgenden Aussagen (vgl. [5], [11]):

1.  $\tilde{Z}$  ist holomorph-konvex.
2. Ist  $Z = Q(\tilde{Z})$  der Remmert-Quotient von  $\tilde{Z}$  (i.e. der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Steinsche Raum  $Z$ , für den es eine eigentliche holomorphe Abbildung  $\sigma: \tilde{Z} \rightarrow Z$  mit  $\mathcal{O}_Z = \sigma_* \mathcal{O}_{\tilde{Z}}$  gibt), und ist  $\tilde{E} = \bigcup_{s \in S} \tilde{E}_s$  die Vereinigung aller maximalen kompakten analytischen Mengen  $\tilde{E}_s$  in den streng pseudokonvexen Fasern  $\tilde{Z}_s$ ,  $s \in S$ , so ist  $\sigma|_{\tilde{Z} \setminus \tilde{E}}: \tilde{Z} \setminus \tilde{E} \rightarrow Z \setminus E$ ,  $E = \sigma(\tilde{E})$ ,biholomorph. Insbesondere ist  $\sigma$  eine eigentliche Modifikation, wenn  $\tilde{\pi}$  platt entlang  $\tilde{Z}_0$ ,  $\tilde{Z}_0$  nicht kompakt und  $S$  hinreichend klein ist.
3. Die Abbildung  $\tilde{\pi}$  faktorisiert eindeutig über  $\sigma$ ; d.h. es existiert eine eindeutig bestimmte holomorphe Abbildung  $\pi: Z \rightarrow S$ , s.d. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{\sigma} & Z \\ \tilde{\pi} \searrow & & \swarrow \pi \\ & S & \end{array}$$

kommutiert. (Dies ist das kanonische Reduktionsdiagramm aus Satz 2).

4. Die Abbildung  $\pi$  ist Steinsch (d.h. Urbilder offener Steinscher Mengen sind Steinsch), und  $\pi|_E$  ist endlich. Insbesondere ist dann  $R^q \tilde{\pi}_* \mathcal{F}$  für alle  $q \geq 1$  wegen

$$R^q \tilde{\pi}_* \mathcal{F} = \pi_*(R^q \sigma_* \mathcal{F}), \quad Tr R^q \sigma_* \mathcal{F} \subset E, \quad q \geq 1,$$

kohärent.

Es sei nun  $L$  ein Steinsches Kompaktum in  $S$  mit  $s_0 \in \overset{\circ}{L}$  (vgl. hierzu und dem Folgenden [7], §2). Dann gibt es für alle  $c > c_*$  ein Steinsches Kompaktum  $K \subset Z$  mit  $Z_0 \cap E \subset \overset{\circ}{K}$ ,  $\pi^{-1}(L) \supset K$ , und einen nach oben beschränkten Komplex platter  $A = \Gamma(L, \mathcal{O}_S)$ -Moduln

$$C^\cdot: \cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} \cdots,$$

s.d. folgendes gilt:

- i)  $H^q(C^\cdot) = H^q(\tilde{K}, \mathcal{F})$ ,  $\tilde{K} = \sigma^{-1}(K)$ ,  $q \geq 0$   
 $= \Gamma(L, R^q \tilde{\pi}_* \mathcal{F})$ ,  $q \geq 1$ .

ii) Ist  $s \in S$  und  $\mathfrak{m}_s$  das zu  $s$  gehörende maximale Ideal von  $A$ , so gilt

$$\begin{aligned} H^q(C \otimes_A (A/\mathfrak{m}_s)) &= H^q(\{z \in \tilde{Z}_s : \varphi(z) \leq c\}, \mathcal{F}_s), \quad q \geq 0, \\ &= H^q(\tilde{Z}_s, \mathcal{F}_s), \quad q \geq 1. \end{aligned}$$

Da wegen der Kohärenz von  $R^q \tilde{\pi}_* \mathcal{F}$  die Moduln  $H^q(C)$  für  $q \geq 1$  endlich sind, können wir sogar ohne Einschränkung voraussetzen, daß alle  $C^q$  frei und für  $q \geq 1$  endlich sind.

Mit diesen Vorbereitungen ist es möglich, die folgende Verallgemeinerung von Theorem (3.1.II) aus [7] zu beweisen.

LEMMA 1. *Es sei  $\tilde{\pi} : \tilde{Z} \rightarrow S$  eine 1-konvexe holomorphe Abbildung, und  $\mathcal{F}$  sei eine  $\tilde{\pi}$ -platte kohärente analytische Garbe auf  $\tilde{Z}$ . Gilt für eine natürliche Zahl  $q \geq 1$*

i)  $H^q(\tilde{Z}_0, \mathcal{F}_{s_0}) = 0$

oder

ii)  $\dim_{\mathbb{C}} H^q(\tilde{Z}_s, \mathcal{F}_s) = \text{const.}$  und  $S$  ist reduziert in  $s_0$ ,

dann ist  $R^q \tilde{\pi}_* \mathcal{F}$  lokal frei nahe  $s_0$  (und im Falle i) sogar Null). Bezeichnet  $\mathfrak{m}(s)$  die maximale Idealgarbe des Punktes  $s \in S$ , so sind außerdem die kanonischen Abbildungen

$$t_s^k : (R^k \tilde{\pi}_* \mathcal{F} / \mathfrak{m}(s) R^k \tilde{\pi}_* \mathcal{F})_s \rightarrow H^k(\tilde{Z}_s, \mathcal{F}_{s_0})$$

für  $k = q, \max(q-1, 1)$  nahe  $s_0$  bijektiv, und im Falle  $q = 1$  ist

$$\Gamma(\tilde{E}_0, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(\tilde{E}_0, \mathcal{F}_{s_0})$$

surjektiv für alle  $c > c_*$ .

*Beweis.* Der Fall ii) ist Theorem (3.1.II) zusammen mit dem Zusatz (3.8) aus [7] und der Bemerkung auf p. 94 aus [10]. Es genügt also, den Fall i) zu behandeln. Wegen [7] Theorem (3.1.I) können wir annehmen, daß  $H^q(\tilde{Z}_s, \mathcal{F}_s) = 0$  für alle  $s \in S$ . Wir betrachten dann den Komplex  $C$  an der Stelle  $q$ :

$$C^{q-1} \xrightarrow{\delta^{q-1}} C^q \xrightarrow{\delta^q} C^{q+1}.$$

Für den ersten Teil der Aussage genügt der Nachweis, daß  $H^q = H^q(C) = 0$  ist,

denn dann gilt für alle  $s \in L$ :

$$(R^q \tilde{\pi}_* \mathcal{F})_s^\wedge = \Gamma(L, R^q \tilde{\pi}_* \mathcal{F})_{m_s}^\wedge = (H_{m_s}^q)^\wedge = 0$$

(hierbei bezeichnet  $\wedge$  die entsprechenden Komplettierungen), und damit

$$R^q \tilde{\pi}_* \mathcal{F} | \mathring{L} = 0.$$

Für den zweiten Teil genügt der Nachweis, daß

$$Z_c^{q+1} = \text{coker } \delta^q$$

ein platter  $A$ -Modul ist. Denn aus den exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow \text{im } \delta^q \rightarrow C^{q+1} \rightarrow Z_c^{q+1} \rightarrow 0$$

$$0 = H^q \rightarrow Z_c^q \rightarrow \text{im } \delta^q \rightarrow 0$$

folgt dann auch die Plattheit von  $Z_c^q$ , und dies impliziert gemäß [7], Satz (2.3.d) die Bijektivität der kanonischen Abbildungen

$$t_M^k: H^k(C) \otimes M \rightarrow H^k(C \otimes M), \quad k = q, \quad q - 1$$

für beliebige  $A$ -Moduln  $M$ . Mit  $M = A/m_s$ ,  $s \in L$ , folgt dann die zweite Behauptung.

Es sei nun  $m \subset A$  ein beliebiges maximales Ideal. Wir lokalisieren den Komplex  $C$  zu

$$(*) \quad C_m^{q-1} \xrightarrow{\delta_m^{q-1}} C_m^q \xrightarrow{\delta_m^q} C_m^{q+1},$$

und erhalten durch Tensorieren mit  $A_m/m A_m$ :

$$C_m^{q-1}/m C_m^{q-1} \rightarrow C_m^q/m C_m^q \rightarrow C_m^{q+1}/m C_m^{q+1}.$$

Die letzte Sequenz ist aber exakt, da es ein  $s \in L$  gibt  $m = m_s$ , so daß nach Voraussetzung

$$H^q(C_m/m C_m) = H^q(C/m C) = H^q(\tilde{Z}_s, \mathcal{F}_s) = 0.$$

Da die Moduln  $C_m^l$  frei und für  $l \geq 1$  endlich sind, folgt hieraus nach einem bekannten Lemma der kommutativen Algebra die Exaktheit von (\*), und

$\text{coker } \delta_m^q$  ist direkter Summand von  $C_m^{q+1}$ , also frei. Wegen der Rechtsexaktheit des Tensorproduktes ist  $\text{coker } \delta_m^q = (\text{coker } \delta^q)_m = (Z_c^{q+1})_m$ . Damit ist  $Z_c^{q+1}$  platt und  $H^q = H^q(C) = 0$ , q.e.d.

Wir kommen nun zum *Beweis von Satz 2*. Die Abbildung  $\sigma$  ist außerhalb  $\tilde{E}$  biholomorph. Wir brauchen daher nur Punkte  $z_0 \in Z_0 \cap E$  zu betrachten. Wähle Steinsche Kompakta  $L \subset S$  und  $K \subset Z$  wie zu Beginn dieses Abschnittes. Es genügt zu zeigen, daß  $M = \Gamma(K, \sigma_* \mathcal{F})$  ein platter  $A = \Gamma(L, \mathcal{O}_S)$ -Modul ist; denn bezeichnet  $m$  bzw.  $n$  das zu  $s_0$  bzw.  $z_0$  in  $A$  bzw.  $B = \Gamma(K, \mathcal{O}_Z)$  gehörende maximale Ideal, so folgt daraus die Plattheit von

$$(\sigma_* \mathcal{F})_{z_0} \hat{=} (M_n)^\wedge \quad \text{über} \quad \mathcal{O}_{S, s_0} \hat{=} (A_m)^\wedge$$

und damit die Plattheit von  $(\sigma_* \mathcal{F})_{z_0}$  über  $\mathcal{O}_{S, s_0}$ . Da  $\sigma$  eigentlich und  $K$  Steinsch ist, folgt aber

$$\begin{aligned} M &= \Gamma(K, \sigma_* \mathcal{F}) = \varinjlim_{\substack{K \subset U \\ U \text{ Steinsch}}} \Gamma(U, \sigma_* \mathcal{F}) \\ &= \varinjlim_{\substack{K \subset U \\ U \text{ Steinsch}}} \Gamma(\sigma^{-1}(U), \mathcal{F}) = \Gamma(\sigma^{-1}(K), \mathcal{F}) \\ &= \Gamma(\tilde{K}, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

und damit  $M = H^0 = H^0(C)$ , wobei  $C$  der oben beschriebene Komplex platter  $A$ -Moduln ist. Da  $\mathcal{F}$  die Voraussetzungen von Lemma 1 für  $q = 1$  erfüllt, ist

$$Z_c^1 = \text{coker } \delta^0$$

ein platter  $A$ -Modul (dies folgt im Fall i) aus dem Beweis von Lemma 1 und im Fall ii) aus [7], (3.6)). Aus den exakten Sequenzen

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{im } \delta^0 \rightarrow C^1 \rightarrow Z_c^1 \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow \ker \delta^0 \rightarrow C^0 \rightarrow \text{im } \delta^0 \rightarrow 0 \\ 0 &= \text{im } \delta^{-1} \rightarrow \ker \delta^0 \rightarrow H^0 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

folgt dann die Plattheit von  $H^0$ . q.e.d.

### 3. Anwendungen

Wir ziehen sofort eine Folgerung aus Satz 2:

SATZ 3. Es sei

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{\sigma} & Z \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi \\ & S & \end{array}$$

das Reduktionsdiagramm einer platten 1-konvexen holomorphen Abbildung  $\tilde{\pi}$ . Es gelte für einen festen Punkt  $s_0 \in S$ :

i)  $H^1(\tilde{Z}_0, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_0}) = 0$

oder

ii)  $\dim_{\mathbb{C}} H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s})$  konstant nahe  $s_0$  und  $S$  reduziert in  $s_0$ .

Dann ist  $\pi$  (nach evtl. Verkleinerung von  $S$  bzgl.  $s_0$ ) eine platte holomorphe Abbildung mit dem Remmert-Quotienten  $Q(\tilde{Z}_0)$  als spezieller Faser  $Z_0$ .

Beweis. Lemma 1, angewendet auf die  $\tilde{\pi}$ -platte Garbe  $\mathcal{O}_{\tilde{Z}}$ , liefert die Surjektivität der Restriktionsabbildung

$$\Gamma(\tilde{E}_0, \mathcal{O}_{\tilde{Z}}) \rightarrow \Gamma(\tilde{E}_0, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_0}).$$

Nach [10] Satz 1 impliziert dies die Gleichung  $Z_0 = Q(\tilde{Z}_0)$ . Die Plattheit von  $\pi$  folgt unmittelbar aus Satz 2 wegen  $\mathcal{O}_Z = \sigma_* \mathcal{O}_{\tilde{Z}}$ . q.e.d.

Die Bedeutung von Satz 3 für die Deformationstheorie analytischer Singularitäten liegt in Folgendem: Ist  $(X, x_0)$  eine normale isolierte analytische Singularität und ist  $\tilde{\pi}: \tilde{Z} \rightarrow S$  eine (wegen Satz 1 ohne Einschränkung 1-konvexe) Deformation einer Auflösung  $\tilde{X}$  von  $X$  mit einer der Eigenschaften i) oder ii), so liefert das Reduktionsdiagramm eine Deformation  $\pi: Z \rightarrow S$  von  $X$  über  $S$ .

Da die Herleitung von Satz 0 bei beliebigem Grundraum  $S$  mit Hilfe der Sätze 1 und 3 ohne Schwierigkeiten wie in [8] geschehen kann, begnügen wir uns mit der Formulierung und überlassen die Einzelheiten des Beweises dem Leser.

SATZ 4. Es sei  $\tilde{\pi}: \tilde{Z} \rightarrow S$  eine platte Familie komplexer Räume. Die Faser  $\tilde{Z}_0$  über einem festen Punkt  $s_0 \in S$  sei Auflösung einer rationalen Singularität  $(X, x_0)$ . Dann lässt sich  $\tilde{\pi}$  (nach evtl. Verkleinerung von  $S$ ) faserweise zu einer Deformation  $\pi: Z \rightarrow S$  von  $\pi^{-1}(s_0) = (X, x_0)$  zusammenblasen, und die Nachbarfasern  $Z_s$ ,  $s \in S$ , besitzen höchstens rationale Singularitäten in der Nähe von  $x_0$ .

Wir zeigen jetzt in Ergänzung zu Satz 3, daß in gewissen 1-konvexen Deformationen  $\tilde{\pi}: \tilde{Z} \rightarrow S$  von  $\tilde{X}$  eine maximale Teilstuktur  $\tilde{Z}_a \rightarrow S_a$  mit reduziertem  $S_a \subset S$  enthalten ist, deren Reduktionsdiagramm zu einer (platten) Deformation  $\pi_a: Z_a \rightarrow S_a$  von  $X$  führt. Dazu benötigen wir die folgende partielle Umkehrung von Satz 3:

**SATZ 5.** *Es sei  $\tilde{\pi}: \tilde{Z} \rightarrow S$  eine platte 1-konvexe holomorphe Abbildung mit Reduktionsdiagramm*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{\sigma} & Z \\ \tilde{\pi} \searrow & & \swarrow \pi \\ & S & \end{array}$$

für die folgendes gilt:

- i)  $Q(\tilde{Z}_s) = Z_s$  für alle  $s \in S$ ,
- ii)  $\dim_{\mathbb{C}} H^2(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s})$  lokal konstant auf  $S$ .

Dann ist auch  $\dim_{\mathbb{C}} H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s})$  lokal konstant auf  $S$ .

**Beweis.** Durch Liften des Reduktionsdiagramms auf die Normalisierung von  $S$ , anschließendes Einschränken auf 1-dimensionale reduzierte Unterräume und erneutes Liften auf die Normalisierung reduziert sich der Beweis auf den Fall einer (regulären) Riemannschen Fläche  $S$ . Es sei dann  $s_0 \in S$  und  $L \subset S$  ein Steinsches Kompaktum mit  $s_0 \in L$  und  $\dim_{\mathbb{C}} H^2(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s}) = \text{const.}$  auf  $L$ . Wir betrachten wie oben den Komplex  $C$  von platten  $A = \Gamma(L, \mathcal{O}_S)$ -Moduln bzgl.  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\tilde{Z}}$ . Für beliebiges  $s \in L$  hat man eine exakte Sequenz

$$(*) \quad 0 \rightarrow H^q(C) \otimes A/\mathfrak{m}_s \xrightarrow{t_s^q} H^q(C \otimes A/\mathfrak{m}_s) \rightarrow \text{Tor}_1^A(H^{q+1}(C), A/\mathfrak{m}_s) \rightarrow 0,$$

$q \geq 0$  (vgl. [7]). Nach Voraussetzung und Konstruktion des Komplexes  $C$  ist die Abbildung

$$H^0(C) \rightarrow H^0(C \otimes A/\mathfrak{m}_s)$$

surjektiv ([10], Satz 1), und infolgedessen

$$\text{Tor}_1^A(H^1(C), A/\mathfrak{m}_s) = 0, \quad s \in L.$$

Also ist  $H^1(C)$  ein platter  $A$ -Modul, und damit (da  $H^1(C)$  als endlicher  $A$ -Modul insbesondere projektiv ist)

$$\operatorname{cg} H^1(C)_{m_s} = \dim H^1(C) \otimes A/m_s$$

lokal konstant auf  $L$ . Wegen  $\dim H^2(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s}) = \text{const.}$  für  $s \in L$  ist dann nach Lemma 1, ii) die Abbildung  $t_s^1$  bijektiv für alle  $s \in L$ . Also ist  $\dim H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s})$  lokal konstant auf  $L$ . q.e.d.

Wir sind nun in der Lage, das folgende Resultat zu beweisen, das eine wichtige Rolle bei der Konstruktion simultaner Auflösungen von isolierten Singularitäten spielt:

**SATZ 6.** *Es sei  $\tilde{\pi}: \tilde{Z} \rightarrow S$  eine 1-konvexe Deformation von  $\tilde{X} = \tilde{\pi}^{-1}(s_0)$  mit  $\dim_C H^2(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s}) = \text{const.}$  Dann gibt es einen (bzgl. Inklusion) maximalen reduzierten analytischen Unterraumkeim  $S_a$  von  $S$  in  $s_0$ , s.d. im Reduktionsdiagramm*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z}_a = \tilde{Z} \mid S_a & \xrightarrow{\sigma_a} & Z_a \\ \tilde{\pi}_a = \tilde{\pi}|_{Z_a} \searrow & & \swarrow \pi_a \\ & S_a & \end{array}$$

*der 1-konvexen Abbildung  $\tilde{\pi}_a: \tilde{Z}_a \rightarrow S_a$  die Abbildung  $\pi_a$  eine platte Deformation von  $\pi_a^{-1}(s_0) = Q(\tilde{X})$  ist.*

*Beweis.* Es sei  $T$  ein reduzierter Unterraumkeim von  $S$  durch  $s_0$ ,  $\tilde{\pi}_T: \tilde{Z}_T = \tilde{Z} \mid T \rightarrow T$ , und im Reduktionsdiagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z}_T & \xrightarrow{\sigma_T} & Z_T \\ \tilde{\pi}_T \searrow & & \swarrow \pi_T \\ & T & \end{array}$$

sei  $Z_{T,s_0}$  der Remmert-Quotient von  $\tilde{Z}_{T,s_0} = \tilde{X}$ . Da  $\tilde{X}$  regulär ist, ist  $Z_{T,s_0}$  normal, und da weiter  $\pi_T$  als platt vorausgesetzt ist, sind auch alle Nachbarfasern  $Z_{T,t}$ ,  $t$  hinreichend nahe bei  $s_0$ , normal. Die Abbildungen  $\sigma_{T,t}: \tilde{Z}_{T,t} \rightarrow Z_{T,t}$  sind eigentlich und biholomorph außerhalb  $\tilde{E}_t$ ; folglich gilt  $Q(\tilde{Z}_{T,t}) = Z_{T,t}$  für alle diese  $t$ . Da nach Voraussetzung  $\dim H^2(\tilde{Z}_{T,t}, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_{T,t}}) = \text{const.}$  ist, kann man Satz 5 anwenden und erhält lokal um  $s_0$ :

$$T \subset \{s \in S : \dim H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s}) = d_0 := \dim H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})\}.$$

Wir setzen für die rechts stehende Menge  $S_a$  und brauchen nur noch zu zeigen, daß sie analytisch in der Nähe von  $s_0$  ist. Denn dann erfüllt die Familie  $\tilde{\pi}_a : \tilde{Z}_a = \tilde{Z} | S_a \rightarrow S_a$ , wobei  $S_a$  mit der reduzierten Struktur versehen ist, die Voraussetzungen von Satz 3, und somit ist  $\pi_a : Z_a \rightarrow S_a$  eine platte Deformation von  $\pi_a^{-1}(s_0) = Q(\tilde{X})$ .

Nach Siu [12] ist  $S_0 = \{s \in S : \dim H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s}) \geq d_0\}$  eine analytische Menge in  $S$ . Da aufgrund der Halbstetigkeitssätze für 1-konvexe holomorphe Abbildungen

$$\dim H^1(\tilde{Z}_s, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_s}) \leq d_0$$

für alle  $s$  nahe bei  $s_0$  gelten muß, stimmen die Mengenkeime von  $S_0$  und  $S_a$  in  $s_0$  überein. q.e.d.

Im folgenden sei  $X = (X, x_0)$  eine normale isolierte analytische Singularität, und  $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$  sei eine ein für allemal fest gewählte Auflösung von  $X$ . Ferner sei  $\pi : Z \rightarrow S$  eine Deformation von  $\pi^{-1}(s_0) = X$ ,  $s_0 \in S$ , über dem *reduzierten* Basisraum  $S$ .

DEF. 2. Ein kommutatives Diagramm holomorpher Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & Z \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ T & \xrightarrow{\varepsilon} & S \end{array}$$

heißt *simultane Auflösung von  $\pi$  (mit spezieller Faser  $\tilde{X}$ )*, wenn folgendes gilt:

- i)  $\tilde{\sigma}$  ist eigentlich und surjektiv und  $\varepsilon$  ist endlich und surjektiv mit  $\varepsilon^{-1}(s_0) = \{t_0\}$ .
- ii)  $\tilde{\pi}$  ist eine Deformation von  $\tilde{\pi}^{-1}(t_0) = \tilde{X}$  über dem reduzierten Basisraum  $T$ .
- iii) Für alle  $t \in T$  ist  $\tilde{\sigma}_t = \tilde{\sigma} | \tilde{Z}_t : \tilde{Z}_t \rightarrow Z_s$ ,  $s = \varepsilon(t)$ , eine Auflösung der Singularitäten von  $Z_s$ . Es gilt  $\tilde{\sigma}_{t_0} = \sigma$ .

Ist  $T = S$  und  $\varepsilon = id$ , so sprechen wir von einer simultanen Auflösung *ohne Basiswechsel*.

Wegen Satz 1 können wir stets annehmen, daß in einem simultanen Auflösungsdiagramm  $\tilde{\pi}$  1-konvex und  $\pi$  Steinsch ist. Ferner können wir  $S$  und  $T$  als Steinsch und damit  $Z$  als Steinsch und  $\tilde{Z}$  als holomorph-konvex voraussetzen. Dann gilt

LEMMA 2.  $Q(\tilde{Z}) \cong Z \times_S T$ , falls  $\dim_{\mathbb{C}} H^2(\tilde{Z}_t, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_t}) = \text{const.}$

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei  $S = T$ ,  $\varepsilon = \text{id}$ . Es genügt dann nachzuweisen, daß

(\*)  $\dim_{\mathbb{C}} H^1(\tilde{Z}_t, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_t}) = \text{const.}$

Hieraus folgt nämlich nach Satz 3, daß in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{Z} & \xrightarrow{\sigma} & Z \\
 \downarrow \tilde{\pi} & \searrow \tau & \downarrow \pi \\
 Q(\tilde{Z}) & & \\
 \downarrow \pi' & \nearrow \text{id} & \downarrow \\
 T & \xrightarrow{\text{id}} & S
 \end{array}$$

$\pi'$  eine Deformation von  $Q(\tilde{X}) = X$  ist. Da  $Q(\tilde{Z})$  der Remmert-Quotient von  $\tilde{Z}$ ,  $Z$  Steinsch und  $\tilde{\sigma}$  eigentlich und surjektiv ist, existiert eine holomorphe Abbildung  $\tau: Q(\tilde{Z}) \rightarrow Z$ , die das obere Dreieck kommutativ macht. Da  $\tau|_X = \text{id}$  ist, muß  $\tau$  biholomorph sein (bei hinreichend kleinem  $Z$ ).

Um (\*) zu beweisen, gehen wir zur Normalisierung  $\nu: \hat{T} \rightarrow T$  über und setzen  $\hat{Z} = \tilde{Z} \times_T \hat{T}$ ,  $Z' = Z \times_T \hat{T}$ .  $Z'$  ist als Totalraum einer Deformation des normalen Raumes  $X$  über der normalen Basis  $\hat{T}$  normal. Hieraus folgt, daß die kanonische Abbildung  $\hat{\sigma}: \hat{Z} \rightarrow Z'$  der Remmert-Quotient von  $\hat{Z}$  ist. Wegen Definition 2, iii) gilt ferner

$$Z'_t = Z_{\nu(t)} = Q(\tilde{Z}_{\nu(t)}) = Q(\hat{Z}_t)$$

für alle  $t \in \hat{T}$ . Also sind die Voraussetzungen von Satz 5 erfüllt, so daß

$$\dim H^1(\hat{Z}_t, \mathcal{O}_{\hat{Z}_t}) = \text{const.}, \quad t \in \hat{T},$$

was sofort (\*) nach sich zieht. q.e.d.

Wir setzen jetzt noch zusätzlich voraus:

1.  $H^2(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0$ .
2. Es existiert eine Deformation  $\tilde{\pi}: \tilde{Z} \rightarrow T$  von  $\tilde{\pi}^{-1}(t_0) = \tilde{X}$ , die versell ist bzgl. Deformationen des Keimes von  $\tilde{X}$  entlang der exzentrischen Menge  $\tilde{E}_0 = \sigma^{-1}(x_0)$ .

Dann liefert Satz 6 einen reduzierten Unterraum  $T_a \subset T$  (nach Verkleinerung von  $T$ ) und ein Reduktionsdiagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z}_a = \tilde{Z} \mid T_a & \xrightarrow{\sigma_a} & Z'_a \\ \tilde{\pi}_a \downarrow & & \downarrow \pi'_a \\ T_a & \xrightarrow{id} & T_a \end{array}$$

in welchem  $\pi'_a$  eine Deformation von  $X$  über  $T_a$  ist.

**SATZ 7.** *Das obige Diagramm ist versell bzgl. Deformationen von  $X$  über reduzierten Basen zusammen mit einer simultanen Auflösung (ohne Basiswechsel und spezieller Faser  $\tilde{X}$ ).*

*Beweis.* Es sei  $Z_1 \rightarrow S_1$  eine Deformation von  $X$  mit reduzierter Basis  $S_1$  und simultaner Auflösung

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z}_1 & \longrightarrow & Z_1 \\ \tilde{\pi}_1 \searrow & & \swarrow \pi_1 \\ & S_1 & \end{array}$$

mit  $\tilde{X}$  als spezieller Faser von  $\tilde{\pi}_1$ . Nach Lemma 2 gilt  $Z_1 = Q(\tilde{Z}_1)$ , und außerdem ist  $Z_{1,s} = Q(\tilde{Z}_{1,s})$  für alle  $s \in S_1$  nach Voraussetzung. Deshalb kann man Satz 5 anwenden und erhält

$$\dim H^1(\tilde{Z}_{1,s}, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_{1,s}}) = d_0 = \dim H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}).$$

Weiter existiert ein kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z}_1 & \longrightarrow & \tilde{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_1 & \xrightarrow{\varphi} & T \end{array}$$

mit bis zur ersten Ordnung eindeutig bestimmtem  $\varphi$ . Wegen  $T_a = \{t \in T : \dim H^1(\tilde{Z}_t, \mathcal{O}_{\tilde{Z}_t}) = d_0\}$  gilt  $\varphi(S_1) \subset T_a$ . Da alle Basisräume reduziert sind, faktorisiert  $\varphi$  über die Inklusion  $T_a \hookrightarrow T$ , und es ergibt sich

$$\tilde{Z}_1 \cong \tilde{Z}_a \times_{T_a} S_1,$$

woraus  $Z_1 = Q(\tilde{Z}_1) \cong Q(\tilde{Z}_a) \times_{T_a} S_1 = Z_a \times_{T_a} S_1$  folgt. q.e.d.

Bezeichnet  $\pi: Z \rightarrow S$  die *verselle* Deformation von  $X$ , so existiert ein weiteres kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z'_a & \longrightarrow & Z \\ \pi'_a \downarrow & & \downarrow \pi \\ T_a & \xrightarrow{\varepsilon} & S. \end{array}$$

Aus [1] folgt, daß  $\varepsilon$  im Falle  $\dim X = 2$ ,  $\tilde{X}$  minimale Auflösung von  $X$  eine *endliche* holomorphe Abbildung ist. Ist  $X$  sogar rational, so ist wegen Satz 4  $T_a = T$  und  $\varepsilon$  bildet  $T$  surjektiv auf eine irreduzible Komponente von  $S$  ab ([1]).

FRAGE 1. Ist  $\varepsilon$  stets endlich?

Wenn dies der Fall ist, so kann man  $S_a = \varepsilon(T_a)$  mit der reduzierten Struktur versehen, und man erhält mit  $\pi_a = \pi|_{\pi^{-1}(S_a)}$ ,  $Z_a = \pi^{-1}(S_a)$  ein simultanes Auflösungsdiagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z}_a & \longrightarrow & Z_a \\ \tilde{\pi}_a \downarrow & & \downarrow \pi_a \\ T_a & \xrightarrow{\varepsilon} & S_a \end{array}$$

der Deformation  $\pi_a$  von  $X$ .

FRAGE 2. Ist das obige Diagramm versell bzgl. Deformationen von  $X$  über reduzierten Basen zusammen mit einer simultanen Auflösung (mit Basiswechsel und spezieller Faser  $\tilde{X}$ )?

Mit Hilfe von Lemma 2 und Satz 7 kann man sich leicht klarmachen, daß die Frage 2 mit ja zu beantworten ist, falls man folgende Aussage beweisen könnte: Sind  $\pi_i: Z_i \rightarrow S_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , Deformationen einer isolierten Singularität  $X$ , ist  $\pi_0$  versell, sind  $S_1$  und  $S_2$  reduziert, und gibt es eine holomorphe Abbildung  $\varphi_0: S_i \rightarrow S_0$  und eine endliche surjektive Abbildung  $\varphi_1: S_1 \rightarrow S_2$  mit  $Z_0 \times_{S_0} S_1 \cong Z_1 \cong Z_2 \times_{S_2} S_1$ , so existiert eine holomorphe Abbildung  $\varphi_2: S_2 \rightarrow S_0$  mit  $Z_2 \cong Z_0 \times_{S_0} S_2$  und  $\varphi_2 \circ \varphi_1 = \varphi_0$ .

In [2] konstruierte Brieskorn für die verselle Deformation  $\pi: Z \rightarrow S$  eines rationalen *Doppelpunktes*  $X$  eine simultane Auflösung

$$\begin{array}{ccc} \hat{Z} & \longrightarrow & Z \\ \hat{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \hat{T} & \xrightarrow{\epsilon} & S, \end{array}$$

in der  $\epsilon$  sogar eine Galois-Überlagerung ist. Huikeshoven [4] zeigte:

1. Dieses Diagramm ist versell bzgl. auflösbarer Deformationen von  $X$ .
2.  $\hat{\pi}$  ist versell bzgl. Deformationen der minimalen Auflösung  $\hat{X}$  von  $X$  über regulären Basisräumen.

Ersetzt man in Huikeshovens Beweis von 2 das Zitat [8], Theorem 2 durch Satz 4 der vorliegenden Arbeit, so erhält man die Aussage 2 auch für Deformationen mit *reduzierter* Basis. Also stimmt unsere Konstruktion in diesem Fall mit der Brieskornschen überein.

Zum Schluß wollen wir noch zwei *Beispiele* angeben.

1. Es sei  $X_{n,q}$  die zweidimensionale normale Singularität mit dem dualen Graphen

$$\bullet -b_1 -b_2 \cdots -b_{r-1} -b_r \bullet \quad \bullet \cong \mathbf{P}_1(\mathbf{C}),$$

wobei  $n/q = b_1 - 1/\overline{b_2} - \cdots - 1/\overline{b_r}$ . In diesem Fall ist  $T = T_a$  regulär von der Dimension  $\sum_{\rho=1}^r (b_\rho - 1)$ . Die Deformation  $Z_a \rightarrow S_a$  ist die in [9] konstruierte "spezielle Familie." Ferner ergibt eine einfache Analyse der in [9] angegebenen Gleichungen, daß  $\epsilon: T \rightarrow S_a$  eine Galois-Überlagerung ist, deren Gruppe das direkte Produkt derjenigen Weyl-Gruppen ist, die zu den maximalen Konfigurationen von Kurven mit Selbstschnitzzahl  $-2$  gehören.

2. Es sei  $X_b$  eine einfach elliptische Singularität mit dem dualen Graphen

$$\begin{array}{c} -b \\ \circ \end{array}$$

( $\circ$  = elliptische Kurve;  $b \geq 1$ ). Dann ist  $T$  regulär von der Dimension  $b + 1$  und  $T_a$  ist regulär von der Dimension 1. In den Fällen  $b = 1, 2, 3$  ist  $T_a \rightarrow S$  eine abgeschlossene Einbettung und  $S$  ist regulär von der Dimension  $11-b$ . Insbesondere ist  $S_a$  keine irreduzible Komponente von  $S$ .

## LITERATUR

- [1] M. ARTIN, *Algebraic construction of Brieskorn's resolutions*. J. of Algebra 29, (1974), 330–348.
- [2] E. BRIESKORN, *Singular elements of semi-simple algebraic groups*. Actes Congrès intern. Math. Nice 1970. Tome II, 279–284.
- [3] D. M. BURNS and J. WAHL, *Local contributions to global deformations of surfaces*. Inventiones math. 26, (1974), 67–88.
- [4] F. HUIKESHOVEN, *On the versal resolutions of deformations of rational double points*. Inventiones math. 20, (1973), 15–33.
- [5] K. KNORR, und M. SCHNEIDER, *Relativexzeptionelle analytische Mengen*. Math. Ann. 193, (1971), 238–254.
- [6] R. RICHBERG, *Stetige streng pseudokonvexe Funktionen*. Math. Ann. 175, (1968), 257–286.
- [7] O. RIEMENSCHNEIDER, *Halbstetigkeitssätze für 1-konvexe holomorphe Abbildungen*. Math. Ann. 192, (1971), 216–226.
- [8] —, *Deformations of rational singularities and their resolutions*. Proc. of the Conf. on Complex Analysis at Rice University 1972. Rice Univ. Studies 59, (1973), 119–130.
- [9] —, *Deformationen von Quotientensingularitäten (nach zyklischen Gruppen)*. Math. Ann. 209, (1974), 211–248.
- [10] —, *Bemerkungen zur Deformationstheorie nichtrationaler Singularitäten*. Manuscripta math. 14, (1974), 91–99.
- [11] Y.-T. SIU, *The 1-convex generalization of Grauert's direct image theorem*. Math. Ann. 190, (1971), 203–214.
- [12] —, *Dimensions of sheaf cohomology groups under holomorphic deformation*. Math. Ann. 192, (1971), 203–215.

Oswald Riemenschneider  
 Math. Seminar der Univ.  
 D-2000 Hamburg 13  
 Bundesstraße 55

Eingegangen den 25. Januar/5. November 1975

