

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 51 (1976)

Artikel: Sur l'algebre de Lie des Champs de Vecteurs
Autor: Lichnerowicz, André
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-39448>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 30.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur l'algèbre de Lie des Champs de Vecteurs

ANDRÉ LICHNEROWICZ

(Version revue, Février 1976)

Introduction

Cet article appartient à une série ([2], [7], [8], [9], [3]) consacrée aux algèbres de Lie infinies classiques. Les dérivations relatives à chacune de ces algèbres sont désormais connues. En particulier, en ce qui concerne l'algèbre de Lie L des champs de vecteurs d'une variété différentiable, F. Takens [10] a montré récemment que toutes les dérivations sont intérieures.

Le but principal de cet article est la détermination des déformations formelles différentiables de l'algèbre de Lie L . Cette détermination nécessite l'étude partielle de ce que nous nommons la cohomologie m -différentiable de Chevalley de cette algèbre de Lie. La cohomologie envisagée est la cohomologie relative à la représentation adjointe à valeurs dans l'algèbre de Lie elle-même, les cochaînes étant supposées ici différentiables. Le complexe est le complexe standard de Chevalley–Eilenberg.

On sait l'intérêt porté actuellement, à la suite des travaux de Gelfand–Fuks et de Losik à la cohomologie des algèbres de Lie infinies. Dans les principaux travaux de Gelfand–Fuks, la cohomologie est soit à coefficients triviaux, soit relative à une représentation générale; les cochaînes sont supposées continues pour une topologie convenable définie algébriquement et le complexe diagonal joue un rôle fondamental. Nos résultats partiels ne résultent pas non plus de l'approche de Losik.

Il n'apparaît pas que le cas étudié ici, motivé par l'étude des déformations, ait été traité. La méthode employée est tout-à-fait directe et élémentaire. On établit principalement que *la cohomologie 1-différentiable de L est toujours triviale, qu'en dimensions 1 et 2 la cohomologie m -différentiable est triviale pour tout entier $m \geq 1$, que toute 1-cochaîne de L à cobord m -différentiable est définie par un opérateur différentiel d'ordre m (ce qui généralise le résultat de Takens), que toutes les déformations formelles différentiables de l'algèbre de Lie L sont différentiablement triviales.*

Dans un but de complétude, on a rappelé les propriétés des idéaux de L qui sont communes aux quatre algèbres de Lie infinies classiques, en apportant quelques compléments à [12].

Certains résultats ont été annoncés dans une note aux *Comptes rendus* [11].

I. Sur la Cohomologie Différentiable de l'algèbre de Lie L

1. Cohomologie de Chevalley–Eilenberg

Soit W une variété différentiable connexe, paracompacte, de dimension $n \geq 2$ et classe C^∞ . Tous les éléments introduits sont supposés de classe C^∞ . Nous notons $L(W) = L$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de la variété W . Nous introduirons éventuellement sur W une métrique riemannienne auxiliaire g et désignerons par ∇ l'opérateur de dérivation covariante pour la connexion riemannienne définie par g .

Soit $\{x^i\}$ (i , tout indice latin $= 1, \dots, n$) une carte locale de W de domaine U ; on désigne par $L(U)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur U .

(a) Par définition, les p -cochaînes $C_{(p)}$ sur L sont ici les applications p -linéaires alternées de L^p dans L , les 0-cochaînes s'identifiant aux éléments de L . L'opérateur cobord ∂ sur ces p -cochaînes est l'opérateur usuel correspondant à la représentation adjointe est donnée par:

$$\begin{aligned} \partial C_{(p)}(X_0, \dots, X_p) &= \frac{1}{p!} \varepsilon_{0 \dots p}^{\alpha_0 \dots \alpha_p} [X_{\alpha_0}, C_{(p)}(X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_p})] \\ &\quad - \frac{1}{2(p-1)!} \varepsilon_{0 \dots p}^{\alpha_0 \dots \alpha_p} C_{(p)}([X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}], X_{\alpha_2}, \dots, X_{\alpha_p}) \end{aligned} \quad (1-1)$$

où ε est l'indicateur antisymétrique de Kronecker et où $X_\alpha \in L$. Les 1-cocycles ne sont autres que les *dérivations* de L et les 1-cocycles exacts les *dérivations intérieures*.

(b) Une p -cochaîne $C_{(p)}$ de L est dite *locale* si, pour tout élément $X_1 \in L$ tel que $X_1|_U = 0$ pour un domaine U , on a $C_{(p)}(X_1, \dots, X_p)|_U = 0$. Si $C_{(p)}$ est locale, $\partial C_{(p)}$ est locale.

Une p -cochaîne $C_{(p)}$ de L est dite *m -différentiable* ($m \geq 1$) si elle est locale et si sa restriction à tout domaine U est une p -cochaîne m -différentiable de $L(U)$ en un sens évident. Une telle p -cochaîne est définie à partir d'opérateurs p fois différentiels d'ordre m sur L . Ces opérateurs peuvent être exprimés au moyen de ∇ .

Un calcul élémentaire direct montre que, si $C_{(p)}^{(m)}$ est une p -cochaîne m -différentiable, son cobord $\partial C_{(p)}^{(m)}$ est aussi m -différentiable. Nous notons $H_{(m)}^p(L)$ le p° espace de cohomologie m -différentiable de l'algèbre de Lie L , quotient de l'espace des p -cocycles m -différentiables par l'espace des cobords de $(p-1)$ -cochaînes m -différentiables.

Nous nous proposons dans cette section d'évaluer d'une part les $H_{(1)}^p(L)$ pour tout p , d'autre part les $H_{(m)}^2(L)$ pour tout m ; ces derniers espaces interviennent dans l'étude des déformations différentiables de l'algèbre de Lie L .

2. Cohomologie 1-différentiable de l'algèbre de Lie L

(a) Une p -cochaîne 1-différentiable $C_{(p)}^{(1)} = C_{(p)}$ de L peut s'écrire:

$$C_{(p)} = \sum_{q=0}^p A_{(p,q)} \quad (2-1)$$

où la p -cochaîne 1-différentiable $A_{(p,q)}$ dite de type $(q, p-q)$ par rapport aux dérivées premières des vecteurs et aux vecteurs eux-mêmes, est donnée sur U par:

$$\begin{aligned} A_{(p,q)}^i(X_1, \dots, X_p)|_U &= \frac{1}{p!} \varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_p^{\alpha_p} A_{s_1 \dots s_q k_{q+1} \dots k_p}^{ir_1 \dots r_q} \\ &\times \nabla_{r_1} X_{\alpha_1}^{s_1} \dots \nabla_{r_q} X_{\alpha_q}^{s_q} X_{\alpha_{q+1}}^{k_{q+1}} \dots X_{\alpha_p}^{k_p}. \end{aligned} \quad (2-2)$$

Les coefficients A sont supposés antisymétriques par rapport aux couples $(r_1, s_1), \dots, (r_q, s_q)$, antisymétriques par rapport aux indices $k_{q+1} \dots k_p$. Ils définissent sur W un tenseur noté encore $A_{(p,q)}$. Une telle p -cochaîne $A_{(p,q)}$ est dite *pure*; ∇ étant donnée, la décomposition (2-1) de $C_{(p)}$ en somme de p -cochaînes pures est unique.

Nous notons $C_{(p,q)}$ une p -cochaîne 1-différentiable de *degré maximum* q ($q \leq p$) en les dérivées premières des vecteurs. On a:

$$C_{(p,q)} = \sum_{h=0}^q A_{(p,h)} \quad (2-3)$$

où $A_{(p,h)}$ est une p -cochaîne 1-différentiable pure de type $(h, p-h)$ ($h \leq q$)

(b) ∂ opérant sur une p -cochaîne pure de type $(q, p-q)$, on met en évidence à partir de (1-1) par un calcul élémentaire un peu long, un opérateur ∂' de type

(1, 0) donné explicitement par:

$$(\partial' A_{(p,q)})(X_0, \dots, X_p) = -\frac{1}{p!} \varepsilon_{0 \dots p}^{\alpha_0 \dots \alpha_p} (\hat{\Sigma} A_{s_1 \dots s_q k_{q+1} \dots k_p}^{r_0 r_1 \dots r_q} \delta_{s_0}^i + q \hat{\Sigma} A_{s_1 \dots s_q k_{q+1} \dots k_p}^{ir_0 r_2 \dots r_q} \delta_{s_0}^{r_1}) \\ \times \nabla_{r_0} X_{\alpha_0}^{s_0} \nabla_{r_1} X_{\alpha_1}^{s_1} \dots \nabla_{r_q} X_{\alpha_q}^{s_q} X_{\alpha_{q+1}}^{k_{q+1}} \dots X_{\alpha_p}^{k_p} \quad (2-4)$$

où $\hat{\Sigma}$ désigne l'antisymétrisation par rapport aux couples $(r_0, s_0), (r_1, s_1), \dots, (r_q, s_q)$. On déduit de (1-1), (2-4) et de l'identité de Ricci:

LEMME 1. *L'opérateur ∂ admet une décomposition en somme de trois opérateurs:*

$$\partial = \partial' + \Lambda + M \quad (2-5)$$

où les opérateurs ∂', Λ, M sont respectivement de type $(1, 0), (0, 1), (-1, 2)$; par raison de type, ∂' est aussi un opérateur de cohomologie ($\partial'^2 = 0$).

Etudions l'exactitude de cette ∂' -cohomologie. Soit $A_{(p,q)}$ une p -cochaîne pure de type $(q, p-q)$ (avec $q \geq 1$) vérifiant

$$\partial' A_{(p,q)} = 0 \quad (2-6)$$

Introduisons le tenseur $B_{((p-1),(q-1))}$ défini par:

$$B_{s_2 \dots s_q k_{q+1} \dots k_p}^{r_1 \dots r_q} = A_{as_2 \dots s_q k_{q+1} \dots k_p}^{ar_1 \dots r_q}$$

En explicitant $\partial' A_{(p,q)}$ d'après (2-4) et en contractant i et s_0 , il vient en substituant à l'indice r_0 l'indice i , après évaluation des antisymétrisations:

$$\frac{n}{q} A_{s_1 \dots s_q k_{q+1} \dots k_p}^{ir_1 \dots r_q} = \hat{\Sigma} B_{s_2 \dots s_q k_{q+1} \dots k_p}^{r_1 \dots r_q} \delta_{s_1}^i + (q-1) \hat{\Sigma} B_{s_2 \dots s_q k_{q+1} \dots k_p}^{ir_1 r_3 \dots r_q} \delta_{s_1}^{r_2}$$

où $\hat{\Sigma}$ désigne l'antisymétrisation par rapport aux couples $(r_1, s_1), \dots, (r_q, s_q)$. En comparant avec (2-4), il vient:

$$A_{(p,q)} = -\frac{q}{np} \partial' B_{((p-1),(q-1))} \quad (2-7)$$

Supposons maintenant que (2-6) soit vérifié par $A_{(p,0)}$:

$$\partial' A_{(p,0)} = 0. \quad (2-8)$$

Soit x un point arbitraire de W , U un domaine de coordonnées contenant x . Choisissons pour X_0 un vecteur nul en x . Il résulte de (2-8) qu'au point x :

$$\{A_{k_1 \dots k_p}^a \nabla_a X_0^i X_1^{k_1} \dots X_p^{k_p}\}(x) = 0.$$

Du choix arbitraire des valeurs en x de X_1, \dots, X_p et de ∇X_0 , il résulte $A_{(p,0)}(x) = 0$. Ainsi

LEMME 2. *La cohomologie définie sur les cochaînes 1-différentiables de L par l'opérateur ∂' est triviale. En particulier tout p -cocycle pur de type $(p, 0)$ est nécessairement nul.*

(c) Revenons à l'étude de la cohomologie définie par ∂ . Des lemmes 1 et 2, on déduit

LEMME 3. *Soit $C_{(p,q)}$ un p -cocycle ($\partial C_{(p,q)} = 0$) 1-différentiable de degré maximum q en les dérivées premières. Il existe une $(p-1)$ -cochaîne 1-différentiable pure $B_{((p-1),(q-1))}$ de type $(q-1, p-q)$ telle que:*

$$C_{(p,q)} = \partial B_{((p-1),(q-1))} + C_{(p,q-1)} \quad (2-9)$$

où $C_{(p,q-1)}$ est un p -cocycle de degré maximum $(q-1)$.

En effet, mettons en évidence dans $C_{(p,q)}$ le terme de degré q en les dérivées premières:

$$C_{(p,q)} = A_{(p,q)} + \hat{C}_{(p,q-1)}.$$

$C_{(p,q)}$ étant un p -cocycle, il vient:

$$\partial A_{(p,q)} + \partial \hat{C}_{(p,q-1)} = 0.$$

Il en résulte, par raison de type, $\partial' A_{(p,q)} = 0$ et d'après (2-7), il existe $B_{((p-1),(q-1))}$ telle que $A_{(p,q)} = \partial' B_{((p-1),(q-1))}$. On en déduit d'après le lemme 1 que:

$$C_{(p,q)} - \partial B_{((p-1),(q-1))}$$

est un p -cocycle de degré maximum $(q-1)$, ce qui démontre le lemme.

Soit $C_{(p)}$ un p -cocycle 1-différentiable sur L . Du lemme 3 on déduit successivement:

$$C_{(p)} = \partial B_{((p-1),(p-1))} + C_{(p,p-1)}, \dots,$$

$$C_{(p,q)} = \partial B_{((p-1)(q-1))} + C_{(p,q-1)} \dots C_{(p,1)} = \partial B_{(p-1,0)}$$

puisque $\partial A_{(p,0)} = 0$ implique $\partial' A_{(p,0)} = 0$ donc $A_{(p,0)} = 0$ (lemme 2). On en déduit par addition que tout p -cocycle 1-différentiable de L est *exact*. On a

THÉOREME 1. *Pour tout p , le p^e espace de cohomologie 1-différentiable $H_{(1)}^p(L)$ de l'algèbre de Lie L est nul.*

Ainsi la cohomologie 1-différentiable de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs d'une variété différentiable est toujours triviale.

3. Les 2-cocycles m -différentiables

Nous nous proposons d'étudier les 2-cocycles m -différentiables sur L . Les deux cocycles étant tous exacts pour $m = 1$, nous pouvons prendre $m \geq 2$.

(a) Soit U le domaine d'une carte locale $\{x^i\}$ de W . Nous notons R un indice multiple de différentiation défini par un ensemble de h entiers (r_1, \dots, r_h) dont chacun prend des valeurs de 1 à n et indique la coordonnée sur laquelle porte la différentiation. Nous posons $|R| = h$ et convenons que $h = 0$ signifie l'absence de différentiation.

Une 2-cochaîne $C_{(2)}^{(m)} = C^{(m)}$, m -différentiable peut s'écrire sur U , pour $X, Y \in L$:

$$C^{(m)i}(X, Y)|_U = A_{kl}^{iRS} \nabla_R X^h \nabla_S Y^l \quad (3-1)$$

où $R = (r_1, \dots, r_h)$, $S = (s_1, \dots, s_{h'})$ sont des indices de différentiation vérifiant $0 \leq |R| \leq m$, $0 \leq |S| \leq m$. Les coefficients

$$A_{kl}^{iRS} = A_{kl}^{ir_1 \dots r_h s_1 \dots s_{h'}}$$

sont supposés symétriques par rapport aux indices r_1, \dots, r_h , symétriques par rapport aux indices $s_1, \dots, s_{h'}$, antisymétriques par rapport aux couples (R, k) et (S, l) . Ils définissent sur W des tenseurs. La connexion ∇ étant donnée, la décomposition (3-1) de $C^{(m)}$ est unique.

Si $\partial C^{(m)} = 0$, on a sur U :

$$\begin{aligned} & SZ^a \nabla_a (A_{kl}^{iRS} \nabla_R X^k \nabla_S Y^l) - SA_{kl}^{aRS} \nabla_R X^k \nabla_S Y^l \nabla_a Z^i \\ & - \frac{1}{2} SA_{kl}^{iRS} \nabla_R (Z^a \nabla_a X^k - X^a \nabla_a Z^k) \nabla_S Y^l \\ & + \frac{1}{2} SA_{kl}^{iRS} \nabla_R Y^k \nabla_S (Z^a \nabla_a X^l - X^a \nabla_a Z^l) = 0. \quad (3-2) \end{aligned}$$

(b) Au premier membre de (3-2), considérons les termes comportant des opérateurs différentiels *d'ordre maximum* qui sera $(m, m', 1)$ (avec $m' \leq m$) par rapport aux trois arguments vectoriels. Supposons $m' > 1$. Etant donné un point x de U , choisissons des vecteurs X, Y, Z nuls en x et tels que $(\nabla X)(x) = (\nabla Y)(x) = 0$. Les termes considérés sont obtenus pour $|R|$ ou $|S| = m$, $|S|$ ou $|R| = m' > 1$ et l'on a *au point x* en termes de dérivées ordinaires:

$$\begin{aligned} & -A_{kl}^{aRS} \partial_R X^k \partial_S Y^l \partial_a Z^i + A_{kl}^{iRS} (\partial_R X^k \partial_S Y^a - \partial_R Y^k \partial_S X^a) \partial_a Z^l \\ & + \left(\sum_{\alpha=1}^h A_{kl}^{ir_1 \dots a \dots r_h S} \delta_{b^\alpha}^r + \sum_{\beta=1}^{h'} A_{kl}^{iR s_1 \dots a \dots s_{h'}} \delta_{b^\beta}^{s_{h'}} \right) \partial_R X^k \partial_S Y^l \partial_a Z^b = 0 \quad (3-3) \end{aligned}$$

On en déduit, compte-tenu de l'arbitraire existant sur les vecteurs X, Y, Z :

$$\begin{aligned} & A_{kl}^{aRS} \delta_b^i - A_{bl}^{iRS} \delta_k^a - A_{kb}^{iRS} \delta_l^a + \sum_{\alpha=1}^h A_{kl}^{ir_1 \dots a \dots r_h S} \delta_{b^\alpha}^r \\ & + \sum_{\beta=1}^{h'} A_{kl}^{iR s_1 \dots a \dots s_{h'}} \delta_{b^\beta}^{s_{h'}} = 0 \quad (3-4) \end{aligned}$$

Dans (3-4) contractons les indices a et b . Il vient après simplifications:

$$(m + m' - 1) A_{kl}^{iRS} = 0$$

c'est à dire

$$A_{kl}^{iRS} = 0$$

pour $|R|$ ou $|S| = m$, $|S|$ ou $|R| = m' > 1$. Nous avons établi

LEMME 4. Soit $C^{(m)}$ un 2-cocycle m -différentiable, où m est ≥ 2 . On a

$$C^{(m)} = \Gamma^{(m)} + C^{(m-1)}$$

où $C^{(m-1)}$ est une 2-cochaîne $(m-1)$ -différentiable et $\Gamma^{(m)}$ une 2-cochaîne m -différentiable ne comportant que des opérateurs bidifférentiels d'ordre maximum $(m, 1)$.

Pour $X, Y \in L$, la partie $\Gamma^{(m)}$ d'ordre m de $C^{(m)}$ peut s'écrire sur U

$$\Gamma^{(m)i}(X, Y)|_U = A_{kl}^{iRs}(\nabla_R X^k \nabla_s Y^l - \nabla_R Y^k \nabla_s X^l) + B_{kl}^{iR}(\nabla_R X^k Y^l - \nabla_R Y^k X^l) \quad (3-5)$$

où $R = (r_1, \dots, r_m)$. Les coefficients

$$A_{kl}^{iRs} = A_{kl}^{ir_1 \dots r_m s} \quad B_{kl}^{iR} = B_{kl}^{ir_1 \dots r_m}$$

sont supposés symétriques par rapport aux indices r_1, \dots, r_m . Ils définissent sur W des tenseurs.

4. Exactitude des 2-cocycles m -différentiables

(a) Prenons pour $C^{(m)}$ le cobord d'une 1-cochaîne $T^{(m)}$ m -différentiable. Nous posons sur U :

$$T^{(m)i}(X)|_U = T_k^{iR} \nabla_R X^k \quad (|R| = m)$$

on a pour cette 1-cochaîne $T^{(m)}$:

$$\begin{aligned} \partial T^{(m)i}(X, Y)|_U &= X^a \nabla_a (T_k^{iR} \nabla_R Y^k) - Y^a \nabla_a (T_k^{iR} \nabla_R X^k) \\ &\quad + T_k^{aR} (\nabla_R X^k \nabla_a Y^i - \nabla_R Y^k \nabla_a X^i) \\ &\quad - T_k^{iR} \nabla_R (X^a \nabla_a Y^k - Y^a \nabla_a X^k). \end{aligned}$$

Les opérateurs d'ordre m ne figurent dans $\partial T^{(m)}$ que par:

$$\begin{aligned} &\nabla_a T_k^{iR} (X^a \nabla_R Y^k - Y^a \nabla_R X^k) \\ &\quad + T_k^{aR} (\nabla_R X^k \nabla_a Y^i - \nabla_R Y^k \nabla_a X^i) - T_k^{iR} (\nabla_R X^a \nabla_a Y^k - \nabla_R Y^a \nabla_a X^k) \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^m T_k^{iR} (\nabla_{r_\alpha} X^a \nabla_{r_1 \dots \hat{r}_\alpha \dots r_m} Y^k - \nabla_{r_\alpha} Y^a \nabla_{r_1 \dots \hat{r}_\alpha \dots r_m} X^k) \quad (4-1) \end{aligned}$$

où $\hat{}$ est le signe d'omission. Posons:

$$A'_{kl}{}^{iRs} = T_k^{sR} \delta_l^i - T_l^{iR} \delta_k^s + \sum_{\alpha=1}^m T_k^{ir_1 \dots s \dots r_m} \delta_l^{r_\alpha}; \quad (4-2)$$

$$B'_{kl}{}^{iR} = -\nabla_l T_k^{iR}.$$

Avec les notations de (3-5), on voit que la 2-cochaîne $\Gamma'^{(m)}$ donnée par

$$\Gamma'^{(m)}(X, Y)|_U = A_{kl}^{'iRs}(\nabla_R X^k \nabla_s Y^l - \nabla_R Y^k \nabla_s X^l) + B_{kl}^{'iR}(\nabla_R X^k Y^l - \nabla_R Y^k X^l)$$

ne diffère de (4-1) que par des termes inférieurs en ordre à m . Ainsi

$$\partial T^{(m)} - \Gamma'^{(m)}$$

est une 2-cochaîne différentiable d'ordre inférieur à m .

(b) Soit maintenant $C^{(m)}$ un 2-cocycle m -différentiable quelconque, $\Gamma^{(m)}$ sa partie d'ordre m . On a avec les notations de (3-5):

$$\begin{aligned} \partial \Gamma^{(m)i}(X, Y, Z)|_U = & SZ^a \nabla_a \{A_{kl}^{iRs}(\nabla_R X^k \nabla_s Y^l - \nabla_R Y^k \nabla_s X^l)\} \\ & - SA_{kl}^{aRs}(\nabla_R X^k \nabla_s Y^l - \nabla_R Y^k \nabla_s X^l) \nabla_a Z^i \\ & - SA_{kl}^{iRs} \nabla_R (Z^a \nabla_a X^k - X^a \nabla_a Z^k) \nabla_s Y^l \\ & + SA_{kl}^{iRs} \nabla_R Y^k \nabla_s (Z^a \nabla_a X^l - X^a \nabla_a Z^l) \\ & + SZ^a \nabla_a \{B_{kl}^{iR}(\nabla_R X^k \cdot Y^l - \nabla_R Y^k \cdot X^l)\} \\ & - SB_{kl}^{aR}(\nabla_R X^k Y^l - \nabla_R Y^k X^l) \nabla_a Z^i \\ & - SB_{kl}^{iR} \nabla_R (Z^a \nabla_a X^k - X^a \nabla_a Z^k) Y^l \\ & + SB_{kl}^{iR} (Z^a \nabla_a X^l - X^a \nabla_a Z^l) \nabla_R Y^k \end{aligned} \quad (4-3)$$

dont la partie d'ordre m doit être nulle. Au second membre de (4-3) considérons les termes comportant des opérateurs différentiels d'ordre $(m, 1, 1)$ par rapport aux trois arguments vectoriels. Etant donné un point x de U , choisissons les vecteurs X, Y, Z nuls en x , le $(m-1)$ -jet de X en x étant nul. Il vient au point x en annulant les termes obtenus et compte-tenu de l'identité de Ricci:

$$\begin{aligned} & - A_{kl}^{aRs} \nabla_R X^k (\nabla_s Y^l \nabla_a Z^i - \nabla_s Z^l \nabla_a Y^i) \\ & - A_{kl}^{iRs} \nabla_R X^a (\nabla_a Y^k \nabla_s Z^l - \nabla_a Z^k \nabla_s Y^l) \\ & + A_{kl}^{iRs} \nabla_R X^k (\nabla_s Y^a \nabla_a Z^l - \nabla_s Z^a \nabla_a Y^l) \\ & - \sum_{\alpha=1}^m (A_{kl}^{ir_1 \dots a \dots r_m s} \delta_b^{r_\alpha} - A_{kb}^{ir_1 \dots s \dots r_m a} \delta_l^{r_\alpha}) \nabla_R X^k \nabla_s Y^l \nabla_a Z^b = 0. \end{aligned}$$

On en déduit, compte-tenu de l'arbitraire existant sur les vecteurs X, Y, Z :

$$\begin{aligned} & - A_{kl}^{aRs} \delta_b^i + A_{kb}^{sRa} \delta_l^i - A_{lb}^{iRa} \delta_k^s + A_{bl}^{iRs} \delta_k^a + A_{kb}^{iRs} \delta_l^a - A_{kl}^{iRa} \delta_b^s \\ & - \sum_{\alpha} A_{kl}^{ir_1 \dots a \dots r_m s} \delta_b^{r_\alpha} + \sum_{\alpha} A_{kb}^{ir_1 \dots s \dots r_m a} \delta_l^{r_\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (4-4)$$

Dans (4-4), contractons les indices a et b et posons:

$$A_{ka}^{iR} = m T_k^{iR}. \quad (4-5)$$

Il vient après simplifications:

$$A_{kl}^{iRs} = T_k^{sR} \delta_l^i - T_l^{iR} \delta_k^s + \sum_{\alpha=1}^m T_k^{ir_1 \cdots s \cdots r_m} \delta_l^{r_\alpha}. \quad (4-6)$$

Il en résulte d'après (4-2) que, $T^{(m)}$ étant défini par (4-5), le 2-cocycle m -différentiable $C^{(m)} - \partial T^{(m)}$ peut s'écrire:

$$C^{(m)} - \partial T^{(m)} = \hat{\Gamma}^{(m)} + C^{(m-1)}$$

où $C^{(m-1)}$ est $(m-1)$ -différentiable et où $\hat{\Gamma}^{(m)}$ ne comporte que des opérateurs bidifférentiels d'ordre $(m, 0)$:

$$\hat{\Gamma}^{(m)i}(X, Y)|_U = \hat{B}_{kl}^{iR} (\nabla_R X^k \cdot Y^l - \nabla_R Y^k \cdot X^l).$$

En appliquant (4-3) à $\partial \hat{\Gamma}^{(m)}$, considérons dans $\partial \hat{\Gamma}^{(m)}$ les termes comportant des opérateurs différentiels d'ordre $(m, 1, 0)$ par rapport aux trois arguments vectoriels. Etant donné un point x de U , choisissons les vecteurs X, Y, Z tels que X et Y soient nuls en x et que le $(m-1)$ -jet de X en x soit nul. Il vient au point x en annulant les termes obtenus, compte-tenu de l'identité de Ricci:

$$\begin{aligned} \hat{B}_{kl}^{iR} \nabla_R X^k \nabla_a Y^l Z^a + \hat{B}_{kl}^{aR} \nabla_R X^k \nabla_a Y^i Z^l - \hat{B}_{kl}^{iR} \nabla_R X^a \nabla_a Y^k Z^l \\ - \hat{B}_{kl}^{iR} \nabla_R X^k \nabla_a Y^l Z^a + \sum_{\alpha=1}^m \hat{B}_{kl}^{ir_1 \cdots s \cdots r_m} \nabla_R X^k \nabla_s Y^{r_\alpha} Z^l = 0. \end{aligned}$$

Il vient, compte-tenu de l'arbitraire des vecteurs:

$$\hat{B}_{kl}^{iR} \delta_a^s + \hat{B}_{ka}^{sR} \delta_l^i - \hat{B}_{la}^{iR} \delta_k^s - \hat{B}_{kl}^{iR} \delta_a^s + \sum_{\alpha=1}^m \hat{B}_{ka}^{ir_1 \cdots s \cdots r_m} \delta_l^{r_\alpha} = 0. \quad (4-7)$$

Contractons les indices s et l dans (4-7). Il vient après simplifications $\hat{B}_{ka}^{iR} = 0$; donc $\hat{\Gamma}^{(m)} = 0$. Ainsi si $C^{(m)}$ est un 2-cocycle m -différentiable ($m \geq 2$), il existe une 1-cochaîne $T^{(m)}$ m -différentiable telle que:

$$C^{(m)} = \partial T^{(m)} + C^{(m-1)} \quad (4-8)$$

où $C^{(m-1)}$ est un 2-cocycle $(m-1)$ -différentiable.

On sait que les 2-cocycles 1-différentiables sont tous exacts. Il résulte de (4-8) par récurrence que, pour tout $m \geq 1$, les 2-cocycles m -différentiables sont tous exacts. Nous énonçons:

THÉORÈME 2. *Pour tout entier $m \geq 1$, le second espace de cohomologie m -différentiable $H_{(m)}^2(L)$ de l'algèbre de Lie est nul.*

II. 1-Cochaines à cobord m -différentiable

5. 1-Cochaine de $L(U)$ à cobord m -différentiable et opérateur différentiel

Nous avons établi dans [3] une proposition concernant, pour l'algèbre de Lie dynamique d'une variété symplectique (algèbre de Lie définie sur $C^\infty(W; R)$ par le crochet de Poisson), les 1-cochaînes à cobord m -différentiable. Nous nous proposons dans cette section d'établir une propriété analogue pour l'algèbre de Lie L des champs de vecteurs d'une variété différentiable. En dehors de son intérêt propre, une telle proposition intervient de manière essentielle dans la théorie de la trivialité des déformations différentiables de L .

Les énoncés correspondant aux deux cas ne diffèrent que par le statut de la localité des 1-cochaînes envisagées. Les méthodes de preuve sont très proches l'une de l'autre, mais le cas envisagé ici présente, par rapport au cas symplectique, des difficultés supplémentaires dues principalement au caractère vectoriel des valeurs des 1-cochaînes. Nous ne développons ici que celles des démonstrations qui nécessitent, par rapport au cas symplectique, un certain effort.

(a) Soit U le domaine d'une carte locale $\{x^k\}$ de W . Cette carte détermine en chaque point x de U une base naturelle $\{e_{(k)}(x)\}$ de l'espace tangent. Nous nous donnons un endomorphisme T_U de $L(U)$ tel que ∂T_U soit une 2-cochaîne m -différentiable ($m \geq 1$): pour $X, Y \in L(U)$ on a sur U

$$T_U[X, Y] - [T_U X, Y] - [X, T_U Y] = C^{(m)}(X, Y) \quad (5-1)$$

la 2-cochaîne $C^{(m)}$ s'exprimant par

$$C^{(m)i}(X, Y) = A_{kl}^{iRS} (\partial_R X^k \partial_S Y^l - \partial_R Y^k \partial_S X^l)$$

où R, S sont des indices multiples de différentiation vérifiant $0 \leq |R| \leq m, 0 \leq |S| \leq m$.

LEMME 5. *T_U et la carte $\{x^k\}$ de domaine U étant donnés, il existe un*

opérateur différentiel unique P_U d'ordre m sur $L(U)$ tel que:

$$T_U^{(m)} = T_U - P_U$$

annule tous les vecteurs dont les composantes sont des polynômes de degré m en les coordonnées; P_U vérifie (5-1) pour une 2-cochaîne m -différentiable convenable et est invariant par translation de la carte.

En effet posons sur U :

$$P_{(0)k}^i = T_U^i(e_{(k)})P_{(0)}(X) = P_{(0)k}^i X^k e_{(i)}.$$

On définit ainsi sur U un opérateur $P_{(0)}$ tel que l'endomorphisme:

$$T_U^{(0)}: X \in L(U) \rightarrow (T_U - P_{(0)})X \in L(U)$$

annule les vecteurs à composantes constantes et vérifie (5-1). En procédant par récurrence, on part d'un endomorphisme $T_U^{(h-1)}$ annulant les vecteurs à composantes polynômes de degré $(h-1)$ et vérifiant (5-1) pour $m \geq (h-1)$. On pose alors:

$$h! P_{(h)k}^{ij_1 \dots j_h} = T_U^{(h-1)i}(x^{j_1} \dots x^{j_h} e_{(k)})$$

$$P_{(h)}(X) = P_{(h)k}^{ij_1 \dots j_h} \partial_{j_1} \dots \partial_{j_h} X^k e_{(i)}.$$

On définit sur U un opérateur différentiel $P_{(h)}$ qui satisfait (5-1) avec un second membre h -différentiable. L'endomorphisme

$$T_U^{(h)}: X \in L(U) \rightarrow (T_U^{(h-1)} - P_{(h)})X \in L(U)$$

annule les vecteurs à composantes polynômes de degré h et vérifie (5-1) pour $m \geq h$. On aboutit ainsi à l'endomorphisme $T_U^{(m)} = T_U - P_U$, avec $P_U = \sum_{h=0}^m P_{(h)}$. On établit comme dans [3] que P_U vérifie les conditions énoncées dans le lemme.

(b) LEMME 6. L'endomorphisme $T_U^{(m)}$ du lemme 5 annule les vecteurs à composantes polynômes de degré $(m+1)$ en les coordonnées choisies.

Soit $x_0 \in U$ le point de coordonnées nulles dans la carte envisagée. Nous posons:

$$X = (x^1)^{j_1} \dots (x^n)^{j_n} e_{(k)} \tag{5-2}$$

avec

$$j_1 + j_2 + \dots + j_n = m + 1 \geq 2 \quad (5-3)$$

On a:

$$[e_{(l)}, X] = j_l(x^1)^{j_1} \dots (x^l)^{j_l-1} \dots (x^n)^{j_n} e_{(k)}$$

En appliquant (5-1) à $T_U^{(m)}$ pour les vecteurs $e_{(l)}$ et X , on voit qu'en x_0 , on a $dT_U^{(m)i}(X) = 0$. Par translation, cela est vrai en tout point de U et $T_U^{(m)}(X)$ a des composantes constantes:

$$T_U^{(m)}(X) = a^i e_{(i)} \quad (a^i = \text{const.})$$

Il résulte de (5-3) qu'ou bien deux des indices j sont ≥ 1 , ou bien l'un d'entre eux est ≥ 2 . Nous sommes ainsi conduits à étudier soit le cas $j_1 \geq 1, k \neq 1$, soit le cas $j_1 \geq 2, k = 1$.

Dans le premier cas, considérons les vecteurs $x^1 e_{(l)}$ et

$$Y = (x^1)^{j_1-1} \dots \frac{(x^l)^{j_l+1}}{j_l+1} \dots (x^n)^{j_n} e_{(k)} \quad \text{pour } l \neq 1, \quad Y = X/j_1 \quad \text{pour } l = 1$$

Pour tout l :

$$[x^1 e_{(l)}, Y] = X$$

En appliquant (5-1) à $T_U^{(m)}$ et aux vecteurs $x^1 e_{(l)}$ et Y , il vient en x_0 :

$$a^i e_{(i)} = -T_U^{(m)1}(Y)(x_0) \cdot e_{(l)}$$

et d'après l'arbitraire de l , on a $a^i = 0$ pour tout i .

Dans le second cas, on procède de même pour les vecteurs $x^1 e_{(1)}$ et $Y = X/(j_1 - 1)$ de sorte que

$$[x^1 e_{(1)}, Y] = X$$

On obtient:

$$a^i e_{(i)} = -a^1 e_{(1)}/(j_1 - 1)$$

et l'on a encore $a^i = 0$ pour tout i , ce qui démontre le lemme.

6. Détermination des 1-cochaînes de $L(U)$ à cobord m -différentiable

(a) Nous voulons établir le lemme suivant:

LEMME 7. Si $T_U^{(m)}$ est l'endomorphisme défini par le lemme 5 et si $X \in L(U)$ admet un $(m+1)$ -jet $j^{m+1}(X)(x_0)$ nul en $x_0 \in U$, $T_U^{(m)}(X)$ est nul en x_0 .

Soit $x_0 \in U$ le point de coordonnées nulles. Si $j^{m+1}(X)(x_0) = 0$, X peut être pris égal à:

$$X = (x^1)^{h_1} \cdots (x^n)^{h_n} \chi(x^i) e_{(n)} \quad (6-1)$$

avec

$$h_1 + \cdots + h_n = m + 2 \geq 3. \quad (6-2)$$

Il résulte de (6-2) qu'on a l'une des hypothèses suivantes:

α – deux des indices h_1, \dots, h_{n-1} sont ≥ 1

β – l'un des indices h_1, \dots, h_{n-1} est ≥ 2 , les autres étant nuls

γ – $h_n \geq 2$, l'un des indices h_1, \dots, h_{n-1} valant 1 et les autres 0

δ – $h_n \geq 3$, les autres indices étant nuls.

Dans les deux premières hypothèses (soit $\alpha - h_1 \geq 1$, $h_2 \geq 1$, $2 \neq n$, ou $\beta - h_1 \geq 2$, $h_2 = \cdots = h_{n-1} = 0$) développons $\chi(x^i)$ selon les puissances de x^1 par la formule de Taylor:

$$\chi(x^i) = \chi_0(x^a) + x^1 \chi_1(x^a) + \cdots + (x^1)^r \chi_r(x^a) + (x^1)^{r+1} \chi_{r+1}(x^i), \quad (a \neq 1).$$

Dans les deux dernières hypothèses (soit $\gamma - h_n \geq 2$, $h_1 = 1$, $h_2 = \cdots = h_{n-1} = 0$, ou $\delta - h_n \geq 3$, $h_1 = \cdots = h_{n-1} = 0$) procédons de même selon les puissances de x^n . Si nous échangeons le nom des indices 1 et n , nous sommes amenés à étudier les éléments X des deux grands types suivants:

$$(I) \quad X = (x^1)^{j_1} (x^2)^{j_2} \cdots (x^n)^{j_n} \varphi(x^a) e_{(k)}, \quad (a \neq 1; k = n \text{ ou } 1)$$

avec

$$j_1 + j_2 + \cdots + j_n \geq m + 2 \geq 3$$

et

$$(II) \quad X = (x^1)^{m+3} \psi(x^i) e_{(k)}, \quad (k = n \text{ ou } 1).$$

En analysant le type (I) comme il vient d'être fait pour (6-1), nous distinguons les cas suivants:

$$(1) \quad X = (x^1)^{j_1}(x^2)^{j_2} \cdots (x^n)^{j_n} \varphi(x^a) e_{(n)}, \quad (j_1 \geq 1, j_2 \geq 1)$$

$$(2) \quad X = (x^1)^{j_1}(x^2)^{j_2} \cdots (x^n)^{j_n} \varphi(x^a) e_{(n)}, \quad (j_1 \geq 2)$$

$$(3) \quad X = (x^1)^{j_1}(x^2)^{j_2} \cdots (x^n)^{j_n} \varphi(x^a) e_{(1)}, \quad (j_1 \geq 2, j_2 \geq 1)$$

$$(4) \quad X = (x^1)^3 \varphi(x^a) e_{(1)}$$

$$(5) \quad X = (x^1)^{j_1} \varphi(x^a) e_{(1)}, \quad (j_1 \geq 4)$$

Quant au type II, il donne naissance aux deux cas:

$$(6) \quad X = (x^1)^{m+3} \psi(x^i) e_{(n)}$$

$$(7) \quad X = (x^1)^{m+4} \psi(x^i) e_{(1)}$$

ce dernier étant obtenu par développement de II (avec $k = 1$) par la formule de Taylor, développement qui fournit (7), compte-tenu de (5).

(b) Il convient d'étudier successivement ces cas. Nous notons que, d'après le lemme 6, $T_U^{(m)}$ annule certainement les vecteurs dont les composantes sont des polynômes du second degré en les coordonnées.

$$\text{CAS (1). } X = (x^1)^{j_1}(x^2)^{j_2} \cdots (x^n)^{j_n} \varphi(x^a) e_{(n)}; \quad j_1 \geq 1, j_2 \geq 1.$$

Considérons les deux vecteurs $x^1 x^2 e_{(1)}$ et

$$Y = \frac{(x^1)^{j_1}}{j_1} (x^2)^{j_2-1} \cdots (x^n)^{j_n} \varphi(x^a) e_{(n)}$$

pour lequel:

$$j_1 + (j_2 - 1) + \cdots + j_n \geq m + 1.$$

On vérifie immédiatement que:

$$[x^1 x^2 e_{(1)}, Y] = X.$$

En appliquant (5-1) à $T_U^{(m)}$ et aux vecteurs $x^1 x^2 e_{(1)}$ et Y , il vient immédiatement en x_0 :

$$(T_U^{(m)} X)(x_0) = 0.$$

CAS (2). $X = (x^1)^{j_1}(x^2)^{j_2} \cdots (x^n)^{j_n} \varphi(x^a) e_{(n)}$; $j_1 \geq 2$.

Même raisonnement appliqué aux deux vecteurs $(x^1)^2 e_{(1)}$ et

$$Y = \frac{(x^1)^{j_1-1}}{j_1-1} (x^2)^{j_2} \cdots (x^n)^{j_n} \varphi(x^a) e_{(n)}.$$

CAS (3). $X = (x^1)^{j_1}(x^2)^{j_2} \cdots (x^n)^{j_n} \varphi(x^a) e_{(1)}$; $j_1 \geq 2, j_2 \geq 1$.

Même raisonnement appliqué aux deux vecteurs $x^1 x^2 e_{(1)}$ et

$$Y = \frac{(x^1)^{j_1}}{j_1-1} (x^2)^{j_2-1} \cdots (x^n)^{j_n} \varphi(x^a) e_{(1)}.$$

CAS (4). $X = (x^1)^3 \varphi(x^a) e_{(1)}$, avec nécessairement $m = 1$.

On peut développer $\varphi(x^a)$ selon la formule de Taylor à plusieurs variables, au voisinage du point de coordonnées nulles et écrire:

$$\varphi(x^a) = \varphi_0 + x^2 \varphi_2(x^a) + \cdots + x^n \varphi_n(x^a)$$

où φ_0 est une constante et $\varphi_2, \dots, \varphi_n$ des fonctions convenables des variables x^a . Nous sommes ainsi ramenés à envisager soit le vecteur $X = (x^1)^3 e_{(1)}$, soit le vecteur $X = (x^1)^3 x^2 \varphi(x^a) e_{(1)}$ qui relève du cas (3). Etudions donc $T_U^{(m)} X$ (avec $m = 1$) pour $X = (x^1)^3 e_{(1)}$. On a:

$$[x^1 e_{(1)}, X] = 2X.$$

En appliquant (5-1) à $T_U^{(m)}$ et aux vecteurs $x^1 e_{(1)}$ et X , il vient en x_0 :

$$2(T_U^{(m)} X)(x_0) = -(T_U^{(m)1} X)(x_0) e_{(1)}$$

On en déduit $(T_U^{(m)} X)(x_0) = 0$.

CAS (5). $X = (x^1)^{j_1} \varphi(x^a) e_{(1)}$; $j_1 \geq 4$.

Même raisonnement que pour le cas (1), appliqué aux deux vecteurs $(x^1)^2 e_{(1)}$ et:

$$Y = \frac{(x^1)^{j_1-1}}{j_1-3} \varphi(x^a) e_{(1)}.$$

CAS (6). $X = (x^1)^{m+3} \psi(x^i) e_{(n)}$.

Même raisonnement appliqué aux deux vecteurs $(x^1)^2 e_{(n)}$ et

$$Y = (x^1)^{m+1} \Psi(x^i) e_{(n)}$$

où $\Psi(x^i)$ est une primitive en x^n de $\psi(x^i)$, définie sur U .

CAS (7). $X = (x^1)^{m+4} \psi(x^i) e_{(1)}$.

Considérons les deux vecteurs $(x^1)^2 e_{(n)}$ et

$$Y = Y^1 e_{(1)} = (x^1)^{m+2} \Psi(x^i) e_{(1)}$$

où Ψ a la même signification que dans le cas (6). On vérifie que:

$$[(x^1)^2 e_{(n)}, Y] = X - 2x^1 Y^1 e_{(n)}$$

où le vecteur $x^1 Y^1 e_{(n)} = (x^1)^{m+3} \Psi(x^i) e_{(n)}$ relève du cas (6). En appliquant (5-1) à $T_U^{(m)}$ et aux vecteurs $(x^1)^2 e_{(n)}$ et Y , on obtient en x_0 :

$$(T_U^{(m)} X)(x_0) = 2\{T_U^{(m)}(x^1 Y^1 e_{(n)})\}(x_0) = 0.$$

Notre lemme est établi.

(c) Des lemmes 6 et 7, on déduit par un raisonnement identique à celui de [3] (p. 57) la proposition suivante:

PROPOSITION 1. *Si T_U est un endomorphisme de $L(U)$ tel que ∂T_U soit une 2-cochaîne m -différentiable ($m \geq 1$) de $L(U)$, on a $T_U = P_U$, où P_U est un opérateur différentiel d'ordre m sur $L(U)$.*

P_U peut s'exprimer explicitement par:

$$P_U(X) = \left(\sum_{q=0}^m A_{(q)s}^{ir_1 \dots r_q} \nabla_{r_1 \dots r_q} X^s \right) e_{(i)} \quad (6-3)$$

où les coefficients $A_{(q)}$, symétriques en r_1, \dots, r_q , définissent, relativement aux changements de cartes sur U , des tenseurs.

7. 1-cochaînes de L à cobord m -différentiable

(a) On a d'abord

PROPOSITION 2. *Une 1-cochaîne T sur L telle que ∂T soit une 2-cochaîne locale est nécessairement locale.*

En effet supposons que:

$$T[X, Y] - [TX, Y] - [X, TY] = C(X, Y) \quad (7-1)$$

où C est une 2-cochaîne locale. Soit U un domaine de W , $\{x^i\}$ une carte de domaine U . Donnons $X \in L$ tel que $X|_U = 0$. Choisissons un vecteur Y à support compact $S(Y) \subset U$. On a $[X, Y] = 0$ et il résulte de (7-1)

$$[TX, Y]|_U = 0$$

soit dans la carte $\{x^i\}$

$$T(X)^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j T(X)^i = 0. \quad (7-2)$$

Etant donné un point x de U , on peut choisir Y tel que $Y(x) = 0$ et que le 1-jet $j^1 Y$ soit régulier en x ; (7-2) donne $(TX)(x) = 0$. Ainsi $TX|_U = 0$ et T est nécessairement locale.

(b) Soit T une 1-cochaîne de L telle que ∂T soit une 2-cochaîne m -différentiable. Il résulte de la propriété précédente que T est nécessairement locale.

Soit U un domaine de W ; si $X_U \in L(U)$, il existe des vecteurs $X \in L$ tels que $X|_U = X_U$. L'endomorphisme local T de L induit sur U par $T_U(X_U) = T(X)|_U$ un endomorphisme T_U bien déterminé de $L(U)$, qui est tel que ∂T_U soit une 2-cochaîne m -différentiable de $L(U)$. D'après la proposition 1 (§6), T_U est défini par un opérateur différentiel P_U d'ordre m .

En introduisant un recouvrement localement fini de W , on en déduit par un raisonnement standard.

THÉORÈME 3. *Si T est une 1-cochaîne de L telle que ∂T soit une 2-cochaîne m -différentiable ($m \geq 1$), la 1-cochaîne T est m -différentiable.*

(c) Désignons par T une dérivation de L : ∂T étant nulle, T est nécessairement 1-différentiable d'après le théorème précédent. Il résulte du théorème 1 que le 1-cocycle 1-différentiable T est nécessairement exact. Ainsi T est une dérivation intérieure de L . Il vient

COROLLAIRE (Takens). *Toute dérivation de L est 1-différentiable, donc intérieure.*

III. Déformations différentiables de l'algèbre de Lie L

8. Déformations de l'algèbre de Lie L

Rappelons, en les adaptant à notre but, les éléments de la théorie algébrique des déformations [4]

(a) Soit $E(L; \lambda)$ l'espace des fonctions formelles en λ à coefficients dans L . Considérons une application bilinéaire alternée $L \times L \rightarrow E(L; \lambda)$ qui donne une série formelle en λ :

$$[X, Y]_\lambda = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r C_r(X, Y) \quad (8-1)$$

où $C_0(X, Y) = [X, Y]$ et où les C_r ($r \geq 1$) sont des 2-cochaînes sur L . Ces cochaînes s'étendent naturellement à $E(L; \lambda)$. Si S est la sommation après permutation circulaire sur $X, Y, Z \in L$, on a immédiatement:

$$S[[X, Y]_\lambda, Z]_\lambda = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t D_t(X, Y, Z) \quad (8-2)$$

où l'on a introduit les 3-cochaînes:

$$D_t(X, Y, Z) = \sum_{r+s=t} SC_s(C_r(X, Y), Z), \quad (r, s \geq 0). \quad (8-3)$$

(8-1) définit une *déformation formelle* de l'algèbre de Lie L si l'identité de Jacobi correspondante est formellement satisfaite, soit

$$S[[X, Y]_\lambda, Z]_\lambda = 0,$$

D_0 étant nul, cette condition peut se traduire par

$$D_t = 0, \quad (t = 1, 2, \dots)$$

Posons selon Gerstenhaber [4]:

$$E_t(X, Y, Z) \equiv \sum_{r+s=t} SC_s(C_r(X, Y), Z), \quad (r, s \geq 1). \quad (8-4)$$

On vérifie immédiatement que:

$$D_t \equiv E_t - \partial C_t. \quad (8-5)$$

Si (8-1) est tronquée à l'ordre q , nous dirons que c'est une déformation à l'ordre q si l'identité de Jacobi correspondante est satisfaite à l'ordre $(q+1)$ près. S'il en est ainsi, on sait, d'après Gerstenhaber, que E_{q+1} est un 3-cocycle de L . On peut trouver une 2-cochaîne C_{q+1} vérifiant:

$$D_{q+1} = E_{q+1} - \partial C_{q+1} = 0$$

si et seulement si E_{q+1} est *exact*. La classe définie par E_{q+1} est l'*obstruction* à l'ordre $(q+1)$ à la construction d'une déformation formelle de L .

Pour $t=1$, on a seulement $\partial C_1 = 0$.

(b) Considérons une série formelle en λ

$$T_\lambda = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s T_s = Id + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s T_s \quad (8-6)$$

où $T_0 = Id$ est l'opérateur identité et les T_s ($s \geq 1$) des endomorphismes de l'espace vectoriel L ; T_λ opère naturellement sur l'espace $E(L; \lambda)$.

A partir de l'application bilinéaire (8-1) et de (8-6), formons:

$$T_\lambda[X, Y]_\lambda - [T_\lambda X, T_\lambda Y] = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t F_t(X, Y) \quad (8-7)$$

où l'on introduit les 2-cochaînes:

$$F_t(X, Y) = \sum_{r+s=t} T_s C_r(X, Y) - \sum_{r+s=t} [T_r X, T_s Y], \quad (r, s \geq 0). \quad (8-8)$$

Posons:

$$G_t(X, Y) = \sum_{r+s=t} T_s C_r(X, Y) - \sum_{r+s=t} [T_r X, T_s Y], \quad (r, s \geq 1). \quad (8-9)$$

On obtient immédiatement:

$$F_t \equiv C_t - \partial T_t + G_t. \quad (8-10)$$

On a le lemme suivant:

LEMME 8. Pour toute application bilinéaire (8-1) et série formelle (8-6), on a:

$$\begin{aligned} D_t(X, Y, Z) + \sum_{r+s=t} T_s D_r(X, Y, Z) = & -\partial F_t(X, Y, Z) + \sum_{r+s=t} S\{F_r(C_s(X, Y)Z) \\ & + [F_r(X, Y), T_s Z]\} \end{aligned} \quad (8-11)$$

avec $r, s \geq 1, t = 1, 2, \dots$

En effet d'une part

$$ST_\lambda[[X, Y]_\lambda, Z]_\lambda = T_\lambda S[[X, Y]_\lambda] = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t \sum_{r+s=t} T_s D_r(X, Y, Z), \quad (r, s \geq 0).$$

Il vient d'autre part:

$$ST_\lambda[[X, Y]_\lambda, Z]_\lambda = S[[T_\lambda X, T_\lambda Y], T_\lambda Z] + \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r S\{F_r([X, Y]_\lambda, Z) + [F_r(X, Y), T_\lambda Z]\}$$

où le premier terme du second membre est nul d'après l'identité de Jacobi. On note que $D_0 = 0$, $F_0 = 0$. Le second membre s'écrit donc:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t \sum_{r+s=t} S\{F_r(C_s(X, Y), Z) + [F_r(X, Y), T_s Z]\}, \quad (r, s \geq 0).$$

En distinguant les termes en $s = 0$ dans

$$\sum_{r+s=t} T_s D_r(X, Y, Z) = \sum_{r+s=t} S\{F_r(C_s(X, Y), Z) + [F_r(X, Y), T_s Z]\} \quad (r, s \geq 0; t = 1, 2, \dots)$$

on obtient (8-11).

(c) Supposons (8-1) et (8-6) telles que l'identité

$$T_\lambda[X, Y]_\lambda - [T_\lambda X, T_\lambda Y] = 0 \quad (8-12)$$

soit formellement satisfaite. On a $F_t = 0$ ($t = 1, 2, \dots$), soit

$$C_t = \partial T_t - G_t, \quad (t = 1, 2, \dots).$$

Il en résulte que (8-6) détermine (8-1) vérifiant (8-12) de manière unique. Pour cette application (8-1), les relations (8-11) se réduisent à:

$$D_t(X, Y, Z) + \sum_{r+s=t} T_s D_r(X, Y, Z) = 0, \quad (r, s \geq 1; t = 1, 2, \dots).$$

et entraînent par récurrence $D_t = 0$ ($t = 1, 2, \dots$). L'identité de Jacobi relative à (8-1) est formellement satisfaite.

PROPOSITION 3. *Toute série formelle en λ du type (8-6) engendre une application bilinéaire unique $[X, Y]_\lambda$ du type (8-1) vérifiant l'identité (8-12). Cette application est une déformation formelle de l'algèbre de Lie L .*

Nous sommes conduits à la définition suivante:

DÉFINITION. Une déformation formelle de l'algèbre de Lie L est dite triviale s'il existe (8-6) telle que l'identité (8-12) soit formellement satisfaite.

(d) Considérons une déformation formelle de L ($D_t = 0$ pour $t = 1, 2, \dots$) et supposons la triviale jusqu'à l'ordre q : par hypothèse $F_t = 0$ pour $t = 1, 2, \dots, q$; c'est-à-dire:

$$C_t + G_t = \partial T_t, \quad (t = 1, 2, \dots, q). \quad (8-13)$$

Pour $t = (q+1)$ la relation (8-11) se réduit à:

$$\partial(C_{q+1} + G_{q+1}) = 0. \quad (8-14)$$

La déformation est triviale à l'ordre $(q+1)$ si et seulement si le 2-cocycle $(C_{q+1} + G_{q+1})$ est exact. La classe définie par ce 2-cocycle est l'obstruction à la trivialité à l'ordre $(q+1)$ de cette déformation

9. Déformations formelles différentiables de l'algèbre de Lie L

Une déformation formelle (8-1) de l'algèbre de Lie est dite *différentiable* si les 2-cochaînes C_r sur L sont différentiables pour tout r .

Supposons que le 2-cocycle C_1 soit m -différentiable. D'après le théorème 3, si la déformation envisagée est triviale à l'ordre 1, T_1 est nécessairement un opérateur différentiel d'ordre m . Inversement, d'après le théorème 2, tout 2-cocycle C_1 m -différentiable est le cobord d'un opérateur différentiel T_1 d'ordre m .

En procédant par récurrence, on démontre à partir de (8-9), (8-13) et du théorème 2 que toute déformation formelle différentiable (8-1) est *triviale* et que les termes de la série (8-6) qui engendre (8-1) sont nécessairement définis par des opérateurs différentiels. C'est ce dernier fait que nous traduirons en disant que (8-1) est différentiablement triviale.

THÉORÈME 4. *Toute déformation formelle différentiable de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs d'une variété différentiable est différentiablement triviale.*

IV. Idéaux de L

10. Lemme principal et idéaux dérivés

(a) Nous nous proposons maintenant d'étudier les idéaux de l'algèbre de Lie L (voir [12]) et notons L_0 l'idéal de L défini par les champs de vecteurs à supports compacts. Dans l'étude des idéaux, l'instrument essentiel est fourni par ce que nous nommons un lemme principal (pour les lemmes analogues voir [2], [7], [8]). Les raisonnements sont parallèles à ceux concernant une structure unimodulaire [8]. On a [12]:

LEMME 9. Soit U, U' deux domaines contractiles de W tels que $\bar{U}' \subset U$. Si $\{x^j\}$ est une carte locale de domaine U' , on pose $\eta_{U'} = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Donnons-nous n champs de vecteurs $Z_{(j)} \in L_0$, à supports $S(Z_{(j)}) \subset U$, tels que $Z_{(j)}|_{U'} = \partial_j$. Si X est un vecteur à support compact $S(X) \subset U'$ tel que:

$$\int_{U'} X^i \eta_{U'} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

il existe n champs de vecteurs $Y_{(j)} \in L_0$, à supports $S(Y_{(j)}) \subset U'$, tels que:

$$X = \sum_j [Y_{(j)}, Z_{(j)}].$$

(b) Pour $n \geq 3$, on en déduit [12]:

LEMME PRINCIPAL 10. Soit U, U' deux domaines contractiles de W tels que $\bar{U}' \subset U$. Donnons-nous une carte locale arbitraire $\{x^{(0)j}\}$ de domaine U' et n vecteurs $Z_{(j)}^{(0)} \in L_0$, à supports $S(Z_{(j)}^{(0)}) \subset U$, tels que $Z_{(j)}^{(0)}|_{U'} = \partial_j^{(0)}$. On peut trouver $(n+1)$ cartes locales $\{x^{(A)j}\}$ ($A = 0, 1, \dots, n$) de domaine U' et $n(n+1)$ vecteurs $Z_{(j)}^{(A)} \in L_0$, à supports $S(Z_{(j)}^{(A)}) \subset U$, tels que $Z_{(j)}^{(A)}|_{U'} = \partial_j^{(A)}$, vérifiant la condition suivante: si $X \in L_0$ est à support $S(X) \subset U'$, il existe $n(n+1)$ vecteurs $Y_{(j)}^{(A)} \in L_0$, à supports $S(Y_{(j)}^{(A)}) \subset U'$, tels que:

$$X = \sum_A \sum_j [Y_{(j)}^{(A)}, Z_{(j)}^{(A)}]. \quad (10-1)$$

De plus, pour chaque $A \neq 0$, on peut choisir $Z_{(j_A)}^{(A)} = Z_{(j_A)}^{(0)}$ pour un indice j_A .

On a posé dans cet énoncé $\partial_j^{(A)} = \partial / \partial x^{(A)j}$ dans la carte $\{x^{(A)j}\}$.

(c) De ce lemme, on déduit d'abord, selon un raisonnement standard mettant en oeuvre un recouvrement de Palais, la proposition suivante:

PROPOSITION 4. *Les algèbres de Lie et L_0 coïncident avec leurs idéaux dérivés respectifs.*

$$[L, L] = L, \quad [L_0, L_0] = L_0.$$

11. Idéaux et idéaux canoniques

(a) Soit M un sous-espace vectoriel de L . Le fermé de nullité $n(M)$ est l'ensemble fermé f des points x de W tels que $X(x) = 0$ pour tout $X \in M$; Cf est l'ouvert complémentaire. L'espace M est transitif en $x_0 \in Cf$ si les valeurs en x_0 des éléments de M engendrent l'espace tangent en x_0 .

Etant donné un fermé de W , considérons l'espace $I_c(f)$ des vecteurs $X \in L_0$ tels que $S(X) \subset Cf$; $I_c(f)$ est un idéal de L admettant f comme fermé de nullité, transitif sur Cf ; il est appelé *l'idéal canonique* associé à f . On a

LEMME 11. *Soit M [avec $n(M) = f$] un sous-espace de L invariant par $I_c(f)$. Si $x_0 \in Cf$, on peut trouver des domaines contractiles U, U' de W , avec $x_0 \in U'$, $\bar{U}' \subset U \subset Cf$ tels que si $\{x^j\}$ est une carte de domaine U' , $[M, I_c(f)]$ contienne n vecteurs $Z_{(j)} \in L_0$, à supports $S(Z_{(j)}) \subset U$, tels que $Z_{(j)}|_{U'} = \partial_j$.*

Si $x_0 \in Cf$, soit $T \in M$ tel que $T(x_0) \neq 0$; il existe une carte $\{x^j\}$ de domaine U' contenant x_0 , telle que $T|_{U'} = \partial_1$. Choisissons un domaine contractile U tel que $\bar{U}' \subset U \subset Cf$. Soit $X_{(j)} \in L_0$ un vecteur à support $S(X_{(j)}) \subset U$ tel que $X_{(j)}|_{U'} = x^1 \partial_j$ ($j = 1, \dots, n$). Le vecteur $Z_{(j)} = [T, X_{(j)}]$ appartient à $[M, I_c(f)]$, est tel que $S(Z_{(j)}) \subset U$ et vérifie $Z_{(j)}|_{U'} = \partial_j$.

Des lemmes 10 et 11 on déduit:

THÉORÈME 5. *Si M est un sous-espace de L tel que $n(M) = f$ et est invariant par $I_c(f)$, on a*

$$I_c(f) \subset M, \quad [M, I_c(f)] = I_c(f).$$

En particulier $M \neq \{0\}$ ne peut être de dimension finie.

Soit $x_0 \in Cf$, U et U' les domaines introduits par le lemme 11. Dans le lemme 10, prenons $\{x^{(0)j}\} = \{x^j\}$ et $Z_{(j)}^{(0)} = Z_{(j)} \in [M, I_c(f)]$, les notations étant celles du lemme 10. Pour $A \neq 0$ fixé, les vecteurs $Z_{(j)}^{(A)}$ introduits par le lemme 10 sont tels

que l'un d'entre eux $Z_{(j_A)}^{(A)}$ peut être choisi appartenant à $[M, I_c(f)]$. En prenant $T = Z_{(j_A)}^{(A)}$ dans le lemme 11 et en adoptant la carte $\{x^{(A)j}\}$, on déduit du raisonnement du lemme que les $Z_{(j)}^{(A)}$ du lemme 10 peuvent tous être choisis appartenant à $[M, I_c(f)]$.

Soit X un élément de L_0 tel que $S(X) \subset U'$. D'après le lemme 10, il existe $n(n+1)$ vecteurs $Y_{(j)}^{(A)} \in L_0$ à supports dans U' tels que

$$X = \sum_A \sum_j [Y_{(j)}^{(A)}, Z_{(j)}^{(A)}]$$

où $Y_{(j)}^{(A)} \in I_c(f)$. Ainsi X appartient à $[M, I_c(f)]$. Si $X \in I_c(f)$, on établit au moyen d'un recouvrement fini convenable d'un voisinage ouvert de $S(X)$ que $X \in [M, I_c(f)]$. Ainsi

$$I_c(f) \subset [M, I_c(f)]$$

ce qui démontre le théorème.

(b) Soit A une sous-algèbre de Lie de L contenant L_0 . En prenant pour M un idéal I de A , on déduit du théorème précédent:

PROPOSITION 4. *Si I est un idéal de A tel que $n(I) = f$, on a:*

$$I_c(f) \subset I, \quad [I, I_c(f)] = I_c(f).$$

En particulier $I \neq \{0\}$ ne peut être de dimension finie.

Des résultats semblables sont valables pour un idéal J de I . En prenant J abélien, on obtient:

PROPOSITION 5. *Tout idéal I d'une sous-algèbre A de L contenant L_0 est semi-simple. En particulier L , L_0 et tous leurs idéaux sont semisimples.*

(c) Soit I (avec $n(I) = f$) un idéal de A . On vérifie immédiatement que le centralisateur $Z(I)$ de I dans A coïncide avec l'espace des éléments de A qui s'annulent en tout point de Cf . Il vient:

PROPOSITION 6. *Un idéal I non trivial de A n'admet jamais un idéal supplémentaire dans A .*

Si I admet un idéal supplémentaire, celui-ci est nécessairement $Z(I)$ et l'on a $L_0 \subset A = I \oplus Z(I)$. Chaque élément de A devant être nul sur $f \cap \overline{Cf}$ on a $f \cap \overline{Cf} = \phi$ et soit $f = \phi$, soit $\overline{Cf} = \phi$.

(d) Soit G_0 le groupe des difféomorphismes de W à supports compacts. Considérons un idéal $I \neq \{0\}$ de L_0 supposé stable par G_0 (c'est-à-dire par la représentation adjointe de G_0 dans L_0); $n(I)$ est nécessairement vide car, pour tout élément g de G_0 , il doit vérifier $gCn(I) \subset Cn(I)$. Il résulte alors de la proposition 4:

PROPOSITION 7. *Tout idéal $I \neq \{0\}$ de L_0 stable par le groupe G_0 , coïncide avec L_0 .*

Cette proposition peut apparaître comme une version très faible du théorème d'Epstein-Herman-Mather-Thurston.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. AVEZ et A. LICHNEROWICZ, C.R. Acad. Sc. Paris 275, série A (1972), 113–117.
- [2] —, — et A. DIAZ-MIRANDA, Sur l'algèbre des automorphismes infinitésimaux d'une variété symplectique. J. of Diff. Geom. 9, (1974), 1–40.
- [3] M. FLATO, A. LICHNEROWICZ et D. STERNHEIMER. C.R. Acad. Sc. Paris 279, série A, (1974), 877–881. *Déformations 1-différentiables des algèbres de Lie attachées à une variété symplectique ou de contact.* Comp. Math. 31, (1975), 47–82.
- [4] M. GERSTENHABER. Ann. of Math. 79, (1964), 59–103.
- [5] V. GUILLEMIN et S. STERNBERG. *Deformation theory of pseudogroup structures.* Mem. Amer. Math. Soc. n° 64, (1966).
- [6] I. M. GELFAND et D. B. FUCHS. Funct. Anal. 4, (1970), 10–25 et suiv.
- [7] A. LICHNEROWICZ. *Algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure de contact.* J. Math. Pures et appl. 52, (1973), 473–508.
- [8] —, *Algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure unimodulaire.* Ann. Inst. Fourier Grenoble 24, 3 (1974), 219–266.
- [9] —, *Cohomologie 1-différentiable des algèbres de Lie attachées à une variété symplectique ou de contact.* J. Math. pures et appl. 53, (1974), 459–484.
- [10] F. TAKENS, *Derivations of vector fields.* Comp. Math. 26, (1973), 95–99.
- [11] A. LICHNEROWICZ, C.R. Acad. Sc. Paris 276, série A, (1973), 1113–1118.
- [12] —, *Algèbre de Lie des champs de vecteurs: cohomologie 1-différentiable et déformations.* C.R. Acad. Sc. Paris 281, série A (1975), 507–512.
- [13] C. CHEVALLEY et S. EILENBERG, Trans. Amer. Math. Soc. 63, (1948) 85–124.
- [14] M. V. LOSIK, Funct. Anal. 4, (1970), p. 127–135; 6, (1972), p. 289–291.

Ajouté en épreuves (avril 1976): depuis que cet article a été écrit j'ai eu connaissance du travail de K. SHIGA (J. Math. Soc. Jap. 26, 1974, 324–361) qui apparaît comme impliquant les résultats de la section I. La trivialité de la cohomologie 1-différentiable implique celle du complexe diagonal.

6 Avenue Paul Appell
7-75014 Paris

Reçu le 6 novembre 1975.