Comment. Math. Helvetici 39 (51) 301–318 Birkhäuser Verlag, Basel

Konvergenzbetrachtungen bei quasikonformen Abbildungen im $\mathbb{R}^3$ mittels Sätzen von K. Strebel

NIKLAUS BÜHLMANN

1. Einleitung

Bei einer Folge (f_n) von konformen Abbildungen der Ebene, welche in einem Gebiet D lokal gleichmässig gegen die konforme Abbildung f konvergiert, konvergiert bekanntlich auch die Folge der Ableitungen (f'_n) lokal gleichmässig gegen f'.

Da die K-quasikonformen Abbildungen f.ü. differenzierbar sind, ist es sinnvoll, das obige Problem auch für Folgen von K-quasikonformen Abbildungen zu untersuchen. Einfachste Beispiele zeigen allerdings, dass wir keine Konvergenz f.ü. der partiellen Ableitungen erwarten dürfen.

Das Motiv dieser Arbeit besteht deshalb darin, zu untersuchen, wieviel Information über die Ableitungen der Folge auf die Grenzabbildung übertragen wird. Dabei werden die partiellen Ableitungen durch Grössen ersetzt, welche vom Koordinatensystem unabhängig sind.

Wir beschränken uns hier auf die äussere und die innere Dilatation; gelegentlich kommt noch die lineare Dilatation hinzu. Diese Grössen konvergieren i.A. nicht. Hingegen kann eine Reihe von Ungleichungen für den Limes superior und den Limes inferior bewiesen werden. Diese Ungleichungen gelten teilweise ohne zusätzliche Bedingungen, so die Aussagen über den Limes superior der Dilatationen. Um hingegen Sätze über den Limes inferior der Dilatationen zu erhalten, muss man weitere Bedingungen an die Folge (f_n) und den Limes f stellen (S-Approximation).

In der Ebene wurden ähnliche Probleme von K. Strebel untersucht [1] und [2]. Einige Ergebnisse meiner Arbeit sind Verallgemeinerungen von Sätzen von Strebel in den $\mathbb{R}^3$. Für Ungleichungen über den Limes inferior und den Limes superior der Funktionaldeterminanten möchte ich auf die Arbeiten von K. Leschinger [3] und [4] verweisen.

Diese Dissertation entstand unter der Betreuung meines Lehrers, Professor Dr. Kurt Strebel, von dem ich auch in diese Problemkreise eingeführt wurde. Für seine wertvollen Anregungen und Ermutigungen möchte ich ihm vielmals danken.

2. Bezeichnungen und Hilfssätze

Ein Homöomorphismus $f(x)$ heisst K-quasikonform $(1 \leq K < \infty)$ in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$, falls er absolut stetig auf Geraden, f.ü. differenzierbar ist und falls gilt:

$$\frac{1}{K} \max_{|\Delta x|=1} |f'(x)\,\Delta x|^3 \leq |\mathcal{J}(x)| \leq K \min_{|\Delta x|=1} |f'(x)\,\Delta x|^3 \quad \text{f.ü. in } D$$

(Caraman [5], pg. 83)

Dabei ist $\mathcal{J}(x)$ die Funktionaldeterminante im Punkte x. Sei $x_0 \in D$ ein regulärer Punkt, d.h. ein Punkt, wo $f'(x_0)$ existiert und $|\mathcal{J}(x_0)| > 0$ ist. $f'(x_0)$ ist also eine lineare Abbildung, welche die Einheitskugel $B^3(x_0)$ mit Zentrum x_0 auf ein Ellipsoid $E^3(x_0)$ mit den Halbachsenvektoren $a_1(x_0)$, $a_2(x_0)$, $a_3(x_0)$ abbildet, wobei wir voraussetzen, dass $|a_1(x_0)| > |a_2(x_0)| > |a_3(x_0)| > 0$ sei. Auf die ausgearteten Fälle von Kugeln und Rotationsellipsoiden werden wir später zu sprechen kommen. $e_1(x_0)$, $e_2(x_0)$ und $e_3(x_0)$ seien jene drei paarweise orthogonalen Einheitsvektoren, für welche gilt: $f'(x_0)e_i(x_0) = a_i(x_0)$ $(i = 1, 2, 3)$. Die entsprechenden Grössen der Funktion f_n bezeichnen wir mit $a_{in}(x_0)$, $e_{in}(x_0)$, $f'_n(x_0)e_{in}(x_0)$. Die Koordinaten des $\mathbb{R}^3$ seien ξ_1, ξ_2 und ξ_3.

In regulären Punkten lassen sich die folgenden Grössen definieren:

$$H_0(x_0) := \frac{|a_1(x_0)|^3}{|\mathcal{J}(x_0)|}$$: die äussere Dilatation von f im Punkte x_0

$$H_I(x_0) := \frac{|\mathcal{J}(x_0)|}{|a_3(x_0)|^3}$$: die innere Dilatation von f im Punkte x_0

$$H(x_0) := \frac{|a_1(x_0)|}{|a_3(x_0)|}$$: die lineare Dilatation von f im Punkte x_0.

Da f K-quasikonform ist, gilt f.ü. in D:

$$H_0(x_0) \leq K, \quad H_I(x_0) \leq K \quad \text{and} \quad H(x_0) \leq K^{2/3}.$$

Für zwei Geraden $g_1(x_0)$ und $g_2(x_0)$, welche sich im Punkte x_0 unter dem Winkel $\sphericalangle(g_1(x_0), g_2(x_0))$ schneiden, gilt f.ü.:

$$\begin{aligned} K^{-2/3} \sphericalangle(f'(x_0)g_1(x_0), f'(x_0)g_2(x_0)) &\leq \sphericalangle(g_1, g_2) \\ &\leq K^{2/3} \sphericalangle(f'(x_0)g_1(x_0), f'(x_0)g_2(x_0)). \quad (2.1) \end{aligned}$$

(Caraman [5], pg. 255)

Eine Folge von beschränkten messbaren Mengen E_n konvergiert regulär gegen einen Punkt x, falls gilt: (1) $x \in E_n$ für alle n. (2) $m(E_n)/q_n^3 \geq \alpha > 0$ für alle n und ein $\alpha > 0$. (3) $q_n \to 0$ für $n \to \infty$. Dabei ist q_n die Seitenlänge des kleinsten abgeschlossenen Würfels mit Zentrum x, welcher E_n enthält. ([6], pg. 183).

LEMMA 2.1. ([6], pg. 189). *Sei h eine reellwertige integrierbare Funktion im* $\mathbb{R}^3$. *Dann gilt für fast alle* x_0:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} |h(x) - h(x_0)| \, dm = 0 \tag{2.2}$$

für jede Folge von Mengen E_n, *welche regulär gegen den Punkt* x_0 *konvergiert.*

LEMMA 2.2. (K. Strebel [1]). *Sei E eine Menge von endlichem Mass und* (h_n) *eine Folge von reellwertigen integrierbaren Funktionen. Die folgenden drei Bedingungen sind hinreichend dafür, dass*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |h_n(x)| \, dm = 0 \quad \text{ist:} \tag{2.3}$$

(1) $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, h_n(x) \leq 0$ f.ü. *auf* E

(2) *Für fast alle* $x_0 \in E$ *existiert zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein beliebig kleiner Würfel* $Q_n(x_0)$ *mit Zentrum* x_0 *und Seitenlänge q, sodass gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{Q_q \cap E} h_n(x) \, dm > -\varepsilon q^3$$

(3) *Es gibt eine integrierbare Funktion h auf E, sodass:* $|h_n(x)| < h(x)$ *für alle n ist.*

3. Der Limes superior der Dilatationen

Nach K. Strebel [2], S. 469, kann der Limes inferior der Dilatationen f.ü. kleiner als die Dilatation der Grenzabbildung sein. Die Dilatationen können sogar konvergieren und trotzdem kann ihr Limes grösser als die Dilatation der Grenzabbildung sein, wie die folgende 3-dimensionale Variante eines Beispiels von K. Strebel [1] zeigt.

BEISPIEL 3.1. Wir betrachten eine Folge $(f_n(x))$ von K-quasikonformen Abbildungen des Einheitswürfels Q, welche gegen jene Streckung f konvergiert, die Q auf den Quader mit den Seiten 1,1,4 abbildet. Dabei seien die f_n stetige, stückweise affine Abbildungen, welche wie folgt definiert sind: Q wird durch $n-1$ parallele Ebenen, welche senkrecht zur 3-Achse stehen, in n kongruente Teilquader unterteilt. Durch f_n werde jeder Teilquader affin auf ein Parallelepiped mit den rechtwinklig aufeinanderstehenden Seiten 1,1 und der Höhe $4/n$ abgebildet. Dabei soll f_n auf den Parallelebenen $\xi_3 = c/n$ mit geradem Zähler c mit f übereinstimmen. Wenn für alle n die Bilder der Teilquaderseiten, welche zur 3-Achse parallel sind, dem Betrag nach die gleiche Neigung gegenüber den Parallelebenen haben, so gilt $\lim_{n\to\infty} H_{on}(x) > H_0(x)$ f.ü. auf Q.

Auch für die Fälle, in welchen nicht beide Eigenvektoren $e_1(x)$ und $e_3(x)$ ausgezeichnet sind, wollen wir diese nun festlegen:

1. FALL. $H_0(x) = H(x)$ und $H_I(x) > H(x)$. Hier ist nur $e_3(x)$ ausgezeichnet. Wir wählen $e_1(x) \perp e_3(x)$ beliebig und wie überall im folgenden $e_2(x) = e_3(x) \times e_1(x)$.

2. FALL. $H_0(x) > H(x)$ und $H_I(x) = H(x)$. Da nur $e_1(x)$ ausgezeichnet ist, wählen wir $e_3(x) \perp e_1(x)$ beliebig.

3. FALL. $H_0(x) = H_I(x) = H(x)$. Weder $e_1(x)$ noch $e_3(x)$ ist ausgezeichnet. Deshalb legen wir zuerst $e_1(x)$ willkürlich fest und wählen dann $e_3(x) \perp e_1(x)$ beliebig.

LEMMA 3.1. *Sei $(f_n(x))$ eine Folge von K-quasikonformen Abbildungen, welche im Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$ lokal gleichmässig gegen die quasikonforme Abbildung $f(x)$ konvergiert. $x_0 \in D$ sei ein regulärer Punkt für alle f_n sowie für f. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$, sodass gilt:*

$$\begin{aligned} H_0(x_0) - \varepsilon &\leq \frac{1}{q^3} \int_{Q_q(x_0)} H_{on}(x)\, dm - \frac{1}{q^3} \int_{Q_q(x_0)} \frac{|a_{1n}(x)|^3 - |f_n'(x) e_1(x_0)|^3}{|\mathcal{J}_n(x)|}\, dm \\ &\leq \frac{1}{q^3} \int_{Q_q(x_0)} H_{on}(x)\, dm \end{aligned} \tag{3.1}$$

für alle $q < \delta(\varepsilon, x_0)$ und $n > n_q$. Dabei ist n_q eine natürliche Zahl, welche von q abhängt und $Q_q(x_0)$ ein abgeschlossener Würfel mit Zentrum x_0 und Seitenlänge q, dessen Achsen die Richtungen $e_1(x_0)$, $e_2(x_0)$ und $e_3(x_0)$ haben.

Beweis. In einem regulären Punkt x_0 haben wir die Entwicklung $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x + o(|\Delta x|)$, $x = x_0 + \Delta x$. Also existiert zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$, sodass $|f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x)| < q \cdot \varepsilon$ ist für alle $q < \delta$ und alle $x \in Q_q(x_0)$. Halten wir q fest, so existiert ein $n_q \in \mathbb{N}$, sodass gilt:

$$|f_n(x) - (f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x)| < q \cdot \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n > n_q \quad \text{und} \quad x \in Q_q(x_0).$$

Die Integration entlang einer Geraden parallel zu $e_1(x_0)$ ergibt für $n > n_q$ und $x = x_0 + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$ die folgende Abschätzung:

$$q(|a_1(x_0)| - 2\varepsilon) < \int_{-q/2}^{q/2} |f'_n(x) e_1(x_0)| \, d\xi_1 \quad \text{für fast alle} \quad \xi_2 \quad \text{und} \quad \xi_3.$$

Nach Integration über ξ_2 und ξ_3 erhalten wir aus der Hölderungleichung:

$$\begin{aligned} q^9(|a_1(x_0)| - 2\varepsilon)^3 &\leqslant \left(\int_{Q_q(x_0)} \frac{|f'_n(x) e_1(x_0)|}{|\mathscr{I}_n(x)|^{1/3}} |\mathscr{I}_n(x)|^{1/3} \, dm \right)^3 \\ &\leqslant \int_{Q_q} \frac{|f'_n(x) e_1(x_0)|^3}{|\mathscr{I}_n(x)|} \, dm \left(\int_{Q_q} |\mathscr{I}_n(x)|^{1/2} \, dm \right)^2 \\ &\leqslant q^3 \int_{Q_q} |\mathscr{I}_n(x)| \, dm \int_{Q_q} \frac{|f'_n(x) e_1(x_0)|^3}{|\mathscr{I}_n(x)|} \, dm \end{aligned}$$

Die beiden letzten Integrale schätzen wir folgendermassen ab:

$$\int_{Q_q} |\mathscr{I}_n(x)| \, dm < q^3 \prod_{i=1}^{3} (|a_i(x_0)| + 2\varepsilon) \quad \text{für} \quad n > n_q$$

$$\begin{aligned} \int_{Q_q} \frac{|f'_n(x) e_1(x_0)|^3}{|\mathscr{I}_n(x)|} \, dm &= \int_{Q_q} H_{on}(x) \, dm \\ &\quad - \int_{Q_q} \frac{|a_{1n}(x)|^3 - |f'_n(x) e_1(x_0)|^3}{|\mathscr{I}_n(x)|} \, dm \end{aligned}$$

Dies ergibt:

$$\frac{q^9(|a_1(x_0)| - 2\varepsilon)^3}{q^6 \prod_{i=1}^{3} (|a_i(x_0)| + 2\varepsilon)} \leqslant \int_{Q_q} H_{on}(x) \, dm - \int_{Q_q} \frac{|a_{1n}(x)|^3 - |f'_n(x) e_1(x_0)|^3}{|\mathscr{I}_n(x)|} \, dm$$

Die linke Seite können wir schreiben als $q^3(H_0(x_0) - \langle \varepsilon \rangle)$, wobei $\langle \varepsilon \rangle \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ ist. Durch Umdefinieren von δ und ε erhalten wir (3.1).

LEMMA 3.2. *Unter den Voraussetzungen von Lemma* 3.1 *existiert zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$, *sodass die Ungleichung*

$$\begin{aligned} H_I(x_0) - \varepsilon &\leqslant \frac{1}{q^3} \int_{Q_q} H_{In}(x) \, dm - \frac{1}{q^3} \int_{Q_q} \frac{|\mathscr{I}_n(x)|}{|a_{3n}(x)|^3} - \frac{g_n(x, x_0)^{3/2}}{|\mathscr{I}_n(x)|^2} \, dm \\ &\leqslant \frac{1}{q^3} \int_{Q_q} H_{In}(x) \, dm \qquad (3.2) \end{aligned}$$

erfüllt ist für alle $q<\delta(\varepsilon, x_0)$ und $n>n_q$. Dabei ist $g_n(x, x_0)=|f'_n(x)e_1(x_0)\times f'_n(x)e_2(x_0)|^2$, wobei $\times$ das Vektorprodukt bedeutet.

Beweis. Wir gehen ähnlich vor wie bei Lemma 3.1, bilden jedoch keine Gerade ab, sondern ein Quadrat E, welches parallel zu $e_1(x_0)$ und $e_2(x_0)$ ist und durch Q begrenzt wird. Sein Bild vermöge f_n sei E'_n. Da die f_n absolut stetig auf Geraden in Q sind, sind sie auch absolut stetig auf Geraden auf fast allen E. Nach dem Satz von Tonelli (Saks [7], pg. 181) lassen sich daher die üblichen Formeln zur Flächenberechnung verwenden. Für $n>n_q$ erhalten wir für fast alle E:

$$q^2(|a_1(x_0)|-2\varepsilon)(|a_2(x_0)|-2\varepsilon)\leq m(E'_n)=\iint_E g_n(x, x_0)^{1/2}\,d\xi_1\,d\xi_2,$$

und daraus durch Integration über ξ_3

$$q^3(|a_1|-2\varepsilon)(|a_2|-2\varepsilon)\leq \int_{Q_q} g_n(x, x_0)^{1/2}\,dm.$$

Die Hölderungleichung ergibt:

$$\begin{aligned} q^9(|a_1|-2\varepsilon)^3(|a_2|-2\varepsilon)^3 &\leq \left(\int_{Q_q} |\mathcal{J}_n(x)|^{2/3}\frac{g_n(x, x_0)^{1/2}}{|\mathcal{J}_n(x)|^{2/3}}\,dm\right)^3 \\ &\leq \left(\int_{Q_q}|\mathcal{J}_n(x)|\,dm\right)^2\int_{Q_q}\frac{g_n(x, x_0)^{3/2}}{|\mathcal{J}_n(x)|^2}\,dm \end{aligned}$$

Für die beiden letzten Integrale haben wir die Abschätzungen:

$$\left(\int_{Q_q}|\mathcal{J}_n(x)|\,dm\right)^2\leq q^6\prod_{i=1}^{3}(|a_i|+2\varepsilon)^2$$

$$\int_{Q_q}\frac{g_n(x, x_0)^{3/2}}{|\mathcal{J}_n(x)|^2}\,dm=\int_{Q_q}H_{In}(x)\,dm-\int_{Q_q}\left(\frac{|\mathcal{J}_n(x)|}{|a_{3n}(x)|^3}-\frac{g_n(x, x_0)^{3/2}}{|\mathcal{J}_n(x)|^2}\right)dm$$

Die erste Abschätzung bringen wir auf die linke Seite, für welche wir dann schreiben können: $q^3(H_I(x_0)-\langle\varepsilon\rangle)$, wobei $\langle\varepsilon\rangle\to 0$ geht für $\varepsilon\to 0$. Durch Umdefinieren von δ und ε erhalten wir die linke Seite von (3.2). Die rechte Seite erhalten wir aus der Beziehung

$$|f'_n(x)e_1(x_0)\times f'_n(x)e_2(x_0)|\leq|a_{1n}(x)|\,|a_{2n}(x)|,$$

welche geometrisch klar ist.

LEMMA 3.3. *Unter den gleichen Voraussetzungen wie bei Lemma* 3.1 *gilt für die linearen Dilatationen: zu jedem* $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$, *sodass die Ungleichung*

$$H(x_0) - \varepsilon \leq \frac{1}{q^3} \int_{Q_q} H_n(x)\, dm - \frac{1}{q^3} \int_{Q_q} \left(\frac{|a_{1n}(x)|^2}{|a_{1n}(x)|\,|a_{3n}(x)|} - \frac{|f'_n(x) e_1(x_0)|^2}{g_n^{1/2}(x, x_0)} \right) dm \tag{3.3}$$

$$\leq \frac{1}{q^3} \int_{Q_q} H_n(x)\, dm \quad \textit{erfüllt ist für alle} \quad q < \delta(\varepsilon, x_0) \quad \text{und} \quad n > n_q.$$

Dabei ist $g_n(x, x_0) = |f'_n(x) e_1(x_0) \times f'_n(x) e_3(x_0)|^2$.

Beweis. Wir gehen ähnlich vor wie bei Lemma 3.1, integrieren aber über ein Quadrat E, welches parallel zu $e_1(x_0)$ und $e_3(x_0)$ ist und durch Q begrenzt wird. Für $n > n_q$ erhalten wir für fast alle E:

$$q^2(|a_1| - 2\varepsilon) \leq \iint_E |f'_n(x) e_1(x_0)|\, d\xi_1\, d\xi_3,$$

und daraus mittels der Schwarzschen Ungleichung:

$$q^4(|a_1| - 2\varepsilon)^2 \leq \left(\iint_E g_n^{1/4}(x, x_0) \frac{|f'_n(x) e_1(x_0)|}{g_n^{1/4}(x, x_0)}\, d\xi_1\, d\xi_3 \right)^2$$

$$\leq \iint_E g_n^{1/2}(x, x_0)\, d\xi_1\, d\xi_3 \iint_E \frac{|f'_n(x) e_1(x_0)|^2}{g_n^{1/2}(x, x_0)}\, d\xi_1\, d\xi_3$$

Für das erste Integral rechts erhalten wir:

$$\iint_E g_n^{1/2}(x, x_0)\, d\xi_1\, d\xi_3 \leq q^2(|a_1(x_0)| + 2\varepsilon)(|a_3(x_0)| + 2\varepsilon)$$

Wir nehmen diesen Ausdruck auf die linke Seite, integrieren über ξ_2 und erhalten durch Umdefinieren von ε und δ die linke Seite von (3.3). Die rechte Seite von

(3.3) gilt, weil $|f'_n(x)e_1(x_0)|^2/g_n^{1/2}(x, x_0)$ höchstens gleich dem Achsenverhältnis der Ellipse des Schnittes von $f'_n(x)B^3(x)$ mit der von den beiden Vektoren $f'_n(x)e_1(x_0)$ und $f'_n(x)e_3(x_0)$ aufgespannten Ebene und daher durch $H_n(x)$ nach oben beschränkt ist.

SATZ 3.1. *Sei (f_n) eine Folge von K-quasikonformen Abbildungen, welche in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$ lokal gleichmässig gegen die quasikonforme Abbildung f konvergiert. Dann gelten die folgenden Ungleichungen:*

$$\overline{\lim}\, H_{on}(x) \geq H_0(x) \quad \textit{f.ü. in} \quad D \tag{3.4}$$

$$\overline{\lim}\, H_{In}(x) \geq H_I(x) \quad \textit{f.ü. in} \quad D \tag{3.5}$$

$$\overline{\lim}\, H_n(x) \geq H(x) \quad \textit{f.ü. in} \quad D \tag{3.6}$$

Beweis. Nach dem Lemma von Fatou gilt:

$$\begin{aligned} Kq^3 - \overline{\lim} \int_{Q_q} H_{on}(x)\, dm &= \underline{\lim} \int_{Q_q} (K - H_{on}(x))\, dm \\ &\geq \int_{Q_q} \underline{\lim}\, (K - H_{on}(x))\, dm = Kq^3 - \int_{Q_q} \overline{\lim}\, H_{on}(x)\, dm \end{aligned}$$

Durch Anwendung von Lemma 3.1 erhalten wir:

$$H_0(x_0) - \varepsilon \leq \frac{1}{q^3} \overline{\lim} \int_{Q_q} H_{on}(x)\, dm \leq \frac{1}{q^3} \int_{Q_q} \overline{\lim}\, H_{on}(x)\, dm$$

$$\text{für} \quad q < \delta(\varepsilon, x_0) \quad \text{und für f.a.} \quad x_0 \in D.$$

Daraus folgt (3.3) für $q \to 0$ und $\varepsilon \to 0$ nach dem Satz von Lebesgue. Der Beweis für (3.5) und (3.6) verläuft gleich.

Bemerkung. Beispiel 3.1 zeigt, dass wir für die Achsenverhältnisse $|a_{1n}(x)|/|a_{2n}(x)|$ und $|a_{2n}(x)|/|a_{3n}(x)|$ keine Aussagen machen können, welche (3.6) entsprechen.

4. Der Limes inferior der Dilatationen

Aus dem Beispiel (3.1) wird deutlich, dass $\underline{\lim}\, H_{on}(x) > H_0(x)$ f.ü. sein kann. Im folgenden wollen wir zusätzliche Forderungen an die Konvergenz stellen, welche hinreichend dafür sind, dass der Limes inferior der Dilatationen f.ü. kleiner oder gleich der Dilatation der Grenzabbildung ist.

Für die folgenden Lemmata seien $e_1(x_0)$ und $e_3(x_0)$ wie in §3 festgelegt.

LEMMA 4.1. *Unter den Voraussetzungen von Lemma* 3.1 *gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$, *sodass die Ungleichung*

$$\frac{1}{H_I(x_0)} - \varepsilon \leq \frac{1}{q^3} \int_{Q_q} \frac{1}{H_{In}(x)}\, dm - \frac{1}{q^3} \int_{Q_q} \frac{|a_{3n}(x)|^3 - |f'_n(x) e_3(x_0)|^3}{|\mathcal{J}_n(x)|}\, dm \tag{4.1}$$

erfüllt ist für alle $q < \delta(\varepsilon, x_0)$ *und* $n > n_q$.

Beweis. Wie beim Beweis von Lemma 3.1 erhalten wir für $n > n_q$:

$$q(|a_3(x_0)| - 2\varepsilon) \leq \int_{-q/2}^{q/2} |f'_n(x) e_3(x_0)|\, d\xi_3 \quad \text{für f.a.} \quad \xi_1 \text{ und } \xi_2,$$

und durch Integration über ξ_1 und ξ_2:

$$q^3(|a_3| - 2\varepsilon) \leq \int_{Q_q} |f'_n(x) e_3(x_0)|\, dm.$$

Darauf wenden wir die Hölderungleichung an:

$$\begin{aligned} q^9(|a_3| - 2\varepsilon)^3 &\leq \left(\int_{Q_q} |\mathcal{J}_n(x)|^{1/3} \frac{|f'_n(x) e_3(x_0)|}{|\mathcal{J}_n(x)|^{1/3}}\, dm \right)^3 \\ &\leq \int_{Q_q} |\mathcal{J}_n(x)|\, dm \left(\int_{Q_q} \frac{|f'_n(x) e_3(x_0)|^{3/2}}{|\mathcal{J}_n(x)|^{1/2}}\, dm \right)^2 \\ &\leq q^3 \int_{Q_q} |\mathcal{J}_n(x)|\, dm \int_{Q_q} \frac{|f'_n(x) e_3(x_0)|^3}{|\mathcal{J}_n(x)|}\, dm \end{aligned}$$

Für das erste Integral rechts haben wir die Abschätzung $\int_{Q_q} |\mathcal{J}_n(x)|\, dm \leq q^3 \prod_{i=1}^3 (|a_i| + 2\varepsilon)$. Diesen Ausdruck bringen wir auf die linke Seite, spalten rechts $1/H_{In}(x)$ ab und erhalten (4.1) durch Umdefinieren von δ und ε.

LEMMA 4.2. *Unter den Voraussetzungen von Lemma* 3.1 *gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$, *sodass die Ungleichung*

$$\frac{1}{H_0(x_0)} - \varepsilon \leq \frac{1}{q^3} \int_{Q_q} \frac{1}{H_{on}(x)}\, dm - \frac{1}{q^3} \int_{Q_q} \left(\frac{|a_{2n}(x)|\, |a_{3n}(x)|}{|a_{1n}(x)|^2} - \frac{g_n(x, x_0)^{3/2}}{|\mathcal{J}_n(x)|^2} \right) dm \tag{4.2}$$

erfüllt ist für alle $q < \delta(\varepsilon, x_0)$ *und* $n > n_q$. *Dabei ist* $g_n(x, x_0) = |f_n'(x)e_2(x_0) \times f_n'(x)e_3(x_0)|^2$.

Beweis. Wie beim Beweis von Lemma 3.2 erhalten wir für $n > n_q$:

$$q^2(|a_2| - 2\varepsilon)(|a_3| - 2\varepsilon) \leq \int_{-q/2}^{q/2} \int_{-q/2}^{q/2} g_n(x, x_0)^{1/2} \, d\xi_2 \, d\xi_3$$

für fast alle Ebenen $\xi_1 = $ konstant. Nach Integration über ξ_1 erhalten wir mittels der Hölderungleichung:

$$q^9(|a_2| - 2\varepsilon)^3(|a_3| - 2\varepsilon)^3 \leq \left(\int_{Q_q} |\mathcal{J}_n(x)|^{2/3} \frac{g_n(x, x_0)^{1/2}}{|\mathcal{J}_n(x)|^{2/3}} \, dm \right)^3$$
$$\leq \left(\int_{Q_q} |\mathcal{J}_n(x)| \, dm \right)^2 \int_{Q_q} \frac{g_n(x, x_0)^{3/2}}{|\mathcal{J}_n(x)|^2} \, dm.$$

Nun ist aber $(\int_{Q_q} |\mathcal{J}_n(x)| \, dm)^2 \leq q^6 \prod_{i=1}^3 (|a_i| + 2\varepsilon)^2$.

Diesen Ausdruck bringen wir auf die linke Seite, spalten rechts $1/H_{on}(x)$ ab und erhalten (4.2) durch Umdefinieren von δ und ε.

DEFINITION 4.1. Eine Folge (f_n) von K-quasikonformen Abbildungen, welche im Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$ lokal gleichmässig gegen die quasikonforme Abbildung f konvergiert, heisst eine *S-Approximation* von f auf der messbaren Menge E, falls

(1) Die Teilfolge der ausgezeichneten $e_{in}(x)$ f.ü. auf E konvergiert (falls es so eine Teilfolge gibt):
lim $e_{in}(x) = e_i'(x)$, wobei die linke Seite den Grenzwert der betreffenden Teilfolge bedeutet ($i = 1$ und 3).
(2) $e_i'(x) = e_i(x)$ ist, falls $e_i(x)$ ausgezeichnet ist.
(3) $e_1'(x) \perp e_3'(x)$ ist, falls beide existieren.

SATZ 4.1. *Falls die Folge (f_n) eine S-Approximation von f auf D ist, so gilt*

$$\underline{\lim}\, H_{In}(x) \leq H_I(x) \quad \textit{f.ü. auf } D \tag{4.3}$$

und

$$\underline{\lim}\, H_{on}(x) \leq H_0(x) \quad \textit{f.ü. auf } D. \tag{4.4}$$

Beweis. (1) Innere Dilatation. Wir zeigen, dass im Falle einer S-Approximation der zweite Term rechts in (4.1) für $n \to \infty$ und $q \to 0$ verschwindet. Wegen $\sphericalangle(e_{3n}(x), e_3(x)) \to 0$ f.ü. in D (auch wenn die Vektoren $e_{3n}(x)$ und $e_3(x)$ nicht ausgezeichnet sind, lassen sie sich nach Definition 4.1 so festlegen) folgt aus (2.1)

$$\sphericalangle(a_{3n}(x), f_n'(x)e_3(x)) \to 0 \quad \text{f.ü. in } D.$$

Also gilt

$$\frac{|f_n'(x)e_3(x)|}{|a_{3n}(x)|} \to 1. \tag{4.5}$$

Den zweiten Term rechts in (4.1) schreiben wir als:

$$\frac{1}{q^3}\int_{Q_q} \frac{|a_{3n}(x)|^3 - |f_n'(x)e_3(x)|^3}{|\mathcal{J}_n(x)|}\,dm \\ + \frac{1}{q^3}\int_{Q_q} \frac{|f_n'(x)e_3(x)|^3 - |f_n'(x)e_3(x_0)|^3}{|\mathcal{J}_n(x)|}\,dm \tag{4.6}$$

Der Integrand des ersten Integrals in (4.6) konvergiert wegen (4.5) gegen null. Da er im Intervall $[-K, 0]$ liegt, konvergiert auch das Integral gegen null. Für den Betrag des zweiten Integranden in (4.6) benutzen wir die Abschätzung

$$\left|\frac{|f_n'(x)e_3(x)|^3 - |f_n'(x)e_3(x_0)|^3}{|\mathcal{J}_n(x)|}\right| \\ \leqslant 3K\left|\frac{|f_n'(x)e_3(x)| - |f_n'(x)e_3(x_0)|}{|a_{1n}(x)|}\right| \\ \leqslant 3K\frac{|a_{3n}(x)|}{|a_{1n}(x)|}K^{2/3}\,|e_3(x) - e_3(x_0)| \\ \leqslant 3K^{5/3}\,|e_3(x) - e_3(x_0)|. \tag{4.7}$$

$e_3(x)$ hat offenbar integrierbare Komponenten, weshalb wir aus (2.2) schliessen:

$$\lim_{q\to 0}\frac{1}{q^3}\int_{Q_q} |e_3(x) - e_3(x_0)|\,dm = 0 \quad \text{f.ü.} \tag{4.8}$$

Aus (4.7) und (4.8) folgt, dass das zweite Integral von (4.6) für $q \to 0$ verschwindet. Aus (4.1) erhalten wir für beliebige $\varepsilon > 0$:

$$\frac{1}{H_I(x_0)} - \varepsilon \leqslant \lim_{q \to 0} \frac{1}{q^3} \int_{Q_q} \overline{\lim} \frac{1}{H_{In}(x)}\, dm = \frac{1}{\underline{\lim}\, H_{In}(x_0)} \text{ f.ü.}$$

Nach dem Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ erhalten wir (4.3).

(2) Äussere Dilatation. Es soll gezeigt werden, dass der zweite Term rechts in (4.2) für $n \to \infty$ und $q \to 0$ verschwindet. Er kann folgendermassen geschrieben werden:

$$\frac{1}{q^3} \int_{Q_q} \left(\frac{|a_{2n}(x)|\,|a_{3n}(x)|}{|a_{1n}(x)|^2} - \frac{g_n(x, x)^{3/2}}{|\mathcal{J}_n(x)|^2} \right) dm$$
$$+ \frac{1}{q^3} \int_{Q_q} \frac{g_n(x, x)^{3/2} - g_n(x, x_0)^{3/2}}{|\mathcal{J}_n(x)|^2}\, dm \tag{4.9}$$

In (4.9) schätzen wir zuerst das erste Integral ab: nach Voraussetzung gilt $\alpha_n(x) = \sphericalangle(e_{1n}(x), e_1(x)) \to 0$ f.ü. in D. Und wegen (2.1) folgt, dass

$$\alpha'_n(x) = \sphericalangle(a_{1n}(x), f'_n(x) e_1(x)) \to 0 \quad \text{f.ü. in } D$$

ist. Für die Winkel $\beta'_n(x)$ zwischen den Ebenen $(a_{2n}(x), a_{3n}(x))$ und $(f'_n(x)e_2(x), f'_n(x)e_3(x))$ gilt $\beta'_n(x) \leqslant \alpha'_n(x)$, woraus folgt, dass

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|f'_n(x)e_2(x) \times f'_n(x)e_3(x)|}{|a_{2n}(x)|\,|a_{3n}(x)|} = 1 \quad \text{f.ü. in } D \text{ ist.}$$

Der Integrand des ersten Integrals in (4.9) geht also gegen null für $n \to \infty$ und weil er beschränkt ist, auch das Integral. Den Betrag des zweiten Integranden schätzen wir folgendermassen ab:

$$\left| \frac{g_n(x, x)^{3/2} - g_n^{3/2}(x, x_0)}{|\mathcal{J}_n(x)|^2} \right| \leqslant 3K^{4/3} \frac{|g_n(x, x)^{1/2} - g_n(x, x_0)^{1/2}|}{|a_{1n}(x)|^2}$$
$$\leqslant 3K^{8/3} \frac{|a_{3n}(x)|^2}{|a_{1n}(x)|^2} |e_1(x) - e_1(x_0)|$$
$$\leqslant 3K^{8/3} |e_1(x) - e_1(x_0)| \tag{4.10}$$

Wegen (2.2) haben wir:

$$\lim_{q\to 0}\frac{1}{q^3}\int_{Q_q}|e_1(x)-e_1(x_0)|\,dm=0. \tag{4.11}$$

Aus (4.10) und (4.11) folgt, dass das zweite Integral in (4.9) für $q\to 0$ verschwindet und aus (4.2) schliessen wir für ein beliebiges $\varepsilon>0$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{H_0(x_0)}-\varepsilon &\leq \lim_{q\to 0}\frac{1}{q^3}\int_{Q_q}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{H_{on}(x)}\,dm\\ &=\frac{1}{\underline{\lim}_{n\to\infty}H_{on}(x)}\quad \text{f.ü. in}\quad D.\end{aligned}$$

Durch den Grenzübergang $\varepsilon\to 0$ erhalten wir (4.4).

5. Teilfolgen mit speziellen Konvergenzeigenschaften

SATZ 5.1. *Sei (f_n) eine Folge von K-quasikonformen Abbildungen, welche im Gebiet $D\subset\mathbb{R}^3$ lokal gleichmässig gegen die K-quasikonforme Abbildung f konvergiert. E sei eine Menge von positivem endlichem Mass. Wir haben dann die folgenden Implikationen:*

$$\overline{\lim}\,H_{on}(x)=H_0(x)\quad \textit{f.ü. auf}\quad E\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_E|H_{on}(x)-H_0(x)|\,dm=0 \tag{5.1}$$

$$\overline{\lim}\,H_{In}(x)=H_I(x)\quad \textit{f.ü. auf}\quad E\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_E|H_{In}(x)-H_I(x)|\,dm=0 \tag{5.2}$$

$$\overline{\lim}\,H_{n}(x)=H(x)\quad \textit{f.ü. auf}\quad E\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_E|H_{n}(x)-H(x)|\,dm=0 \tag{5.3}$$

Beweis. Nach (3.1) ist $H_0(x_0)-\varepsilon\leq(1/q^3)\int_{Q_q}\overline{\lim}\,H_{on}(x)\,dm$ f.ü. in D, wobei Q_q wie in Lemma 3.1 definiert ist. Im Dichtepunkt x_0 von E sei

$$\lim_{q\to 0}\frac{1}{q^3}\int_{Q_q}\overline{\lim}\,H_{on}(x)\,dm=\overline{\lim}\,H_{on}(x_0)=H_0(x_0).$$

Also haben wir:

$$\begin{aligned} H_0(x_0) &\leq \lim_{q\to 0} \frac{1}{q^3} \varliminf_{n\to\infty} \int_{Q_q} H_{on}(x)\, dm \\ &\leq \lim_{q\to 0} \frac{1}{q^3} \overline{\lim} \int_{Q_q} H_{on}(x)\, dm \\ &\leq \lim_{q\to 0} \frac{1}{q^3} \int_{Q_q} \overline{\lim}\, H_{on}(x)\, dm = H_0(x_0) \quad \text{f.ü.} \end{aligned} \tag{5.4}$$

In (5.4) besteht daher Gleichheit für fast alle x_0. Wegen $1 \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} H_{on}(x) \leq K$ und $1 \leq H_{on}(x) \leq K$ gilt auch

$$\lim_{q\to 0} \frac{1}{q^3} \int_{Q_q \setminus E} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, H_{on}(x)\, dm \leq \lim_{q\to 0} \frac{1}{q^3} Km(Q_q \setminus E) = 0$$

und analog $\lim_{q\to 0} (1/q^3) \int_{Q_q\setminus E} H_{on}(x)\, dm = 0$ gleichmässig in n. Die Integrale über Q_q können daher durch Integrale über $Q_q \cap E$ ersetzt werden:

$$H_0(x_0) = \lim_{q\to 0} \frac{1}{q^3} \varliminf_{n\to\infty} \int_{Q_q \cap E} H_{on}(x)\, dm \quad \text{f.ü. auf} \quad E.$$

$h_n(x) := H_{on}(x) - H_0(x)$ erfüllt die Bedingungen von Lemma 2.2, woraus (5.1) folgt. Die Beweise für (5.2) und (5.3) gehen gleich.

KOROLLAR. *Ist auf einer messbaren Menge* $E \subset D$ $\overline{\lim}\, H_{on}(x) = H_0(x)$, *so existiert eine Teilfolge, für welche* $\lim_{i\to\infty} H_{on_i}(x) = H_0(x)$ *f.ü. auf* E *erfüllt ist. Entsprechendes gilt für die innere und die lineare Dilatation.*

Beweis. Hat E ein endliches Mass, so folgt die Existenz einer Teilfolge aus der Konvergenz im Mittel. Hat E unendliches Mass, so betrachten wir die Mengen $E_m := E \cap \{x \mid |x| < m\}$, $m = 1, 2, 3 \ldots$. Mit Hilfe des Cantorschen Diagonalverfahrens erhalten wir eine gewünschte Teilfolge.

Für die weiteren Ergebnisse beschränken wir uns auf Punkte, in welchen sowohl $e_1(x)$, als auch $e_3(x)$ ausgezeichnet sind: sei

$$\tilde{D} := \{x \in D \mid H_0(x) > H(x) \quad \text{und} \quad H_I(x) > H(x)\}.$$

LEMMA 5.1. *Sei (f_n) eine Folge von K-quasikonformen Abbildungen eines Gebietes $D \subset \mathbb{R}^3$, welche lokal gleichmässig gegen die quasikonforme Abbildung $f(x)$ konvergiert. Ferner sei $\overline{\lim}\, H_{on}(x) = H_0(x)$ auf einer Menge $E \subset \tilde{D}$ von positivem endlichem Mass. Dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \frac{|a_{1n}(x)|^3 - |f'_n(x)e_1(x)|^3}{|\mathcal{J}_n(x)|}\, dm = 0 \tag{5.5}$$

Beweis. x_0 sei ein Dichtepunkt von E. Aus (3.1) und dem Lemma von Fatou erhalten wir für ein beliebiges $\varepsilon > 0$:

$$\frac{1}{q^3} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{Q_q} \frac{|a_{1n}(x)|^3 - |f'_n(x)e_1(x_0)|^3}{|\mathcal{J}_n(x)|}\, dm \leq \frac{1}{q^3} \int_{Q_q \cap E} \overline{\lim}\, H_{on}(x)\, dm$$
$$+ \frac{1}{q^3} \int_{Q_q \setminus E} K\, dm - H_0(x_0) + \varepsilon \tag{5.6}$$

Die rechte Seite von (5.6) geht für $q \to 0$ gegen ε f.ü. In der linken Seite dürfen wir $e_1(x_0)$ durch $e_1(x)$ ersetzen, denn es gelten die Ueberlegungen zu (4.6). Für $h_n(x) = (|f'_n(x)e_1(x)|^3 - |a_{1n}(x)|^3)/|\mathcal{J}_n(x)|$ sind für $\varepsilon \to 0$ in (5.6) alle Bedingungen von Lemma 2.2 erfüllt, woraus (5.5) folgt.

LEMMA 5.2. *Sei (f_n) eine Folge von K-quasikonformen Abbildungen eines Gebietes $D \subset \mathbb{R}^3$, welche lokal gleichmässig gegen die quasikonforme Abbildung $f(x)$ konvergiert. Ferner sei $\overline{\lim}\, H_{In}(x) = H_I(x)$ auf einer Menge $E \subset \tilde{D}$ von positivem endlichem Mass. Dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \left(\frac{\mathcal{J}_n(x)}{|a_{3n}(x)|^3} - \frac{g_n(x, x)^{3/2}}{|\mathcal{J}_n(x)|^2} \right) dm = 0 \tag{5.7}$$

wo $g_n(x, x) = |f'_n(x)e_1(x) \times f'_n(x)e_2(x)|^2$ ist.

Beweis. x_0 sei ein Dichtepunkt von E. Aus (3.2) und dem Lemma von Fatou erhalten wir für ein beliebiges $\varepsilon > 0$:

$$\frac{1}{q^3} \overline{\lim} \int_{Q_q} \left(\frac{|\mathcal{J}_n(x)|}{|a_{3n}(x)|^3} - \frac{g_n(x, x_0)^{3/2}}{|\mathcal{J}_n(x)|^2} \right) dm \leq \frac{1}{q^3} \int_{Q_q \cap E} \overline{\lim}\, H_{In}(x)\, dm$$
$$+ \frac{1}{q^3} \int_{Q_q \setminus E} K\, dm - H_I(x_0) + \varepsilon \tag{5.8}$$

Die rechte Seite von (5.8) geht für $q \to 0$ gegen ε f.ü. In der linken Seite können wir für $q \to 0$ $g_n(x, x_0)$ durch $g_n(x, x)$ ersetzen, denn es gelten die Ueberlegungen zu (4.9). Für $h_n(x) = (g_n(x, x)^{3/2}/|\mathcal{J}_n(x)|^2) - (|\mathcal{J}_n(x)|/|a_{3n}(x)|^3)$ sind für $\varepsilon \to 0$ in (5.8) alle Bedingungen von Lemma 2.2 erfüllt, woraus (5.7) folgt.

SATZ 5.2. *Sei (f_n) eine Folge von K-quasikonformen Abbildungen, welche im Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$ lokal gleichmässig gegen die quasikonforme Abbildung f konvergiere. Auf einer Menge $E \subset \tilde{D}$ von positivem endlichem Mass seien die beiden Bedingungen*

$$H_{on}(x) \to H_0(x) \quad \textit{f.ü. auf} \quad E \tag{5.9}$$

und

$$H_{In}(x) \to H_I(x) \quad \textit{f.ü. auf} \quad E \quad \textit{erfüllt.} \tag{5.10}$$

Dann existiert eine Teilfolge, welche eine S-Approximation von f auf E ist.

Beweis. Wegen (5.5) existiert eine Teilfolge (f_{n_i}) mit der Eigenschaft

$$\frac{|a_{1n_i}(x)|^3 - |f'_{n_i}(x)e_1(x)|^3}{|\mathcal{J}_{n_i}(x)|} \to 0 \quad \text{f.ü. auf} \quad E; \tag{5.11}$$

und aus (5.9) und (5.10) schliessen wir:

$$H_n(x) = (H_{on}(x)H_{In}(x))^{1/3} \to (H_0(x)H_I(x))^{1/3} = H(x) \quad \text{f.ü. auf} \quad E. \tag{5.12}$$

Da $E \subset \tilde{D}$ ist, existiert auf E eine Funktion $\alpha(x) > 1$ und eine natürliche Zahl $N(x)$, sodass

$$H_{on}(x) \geqslant \alpha(x)H_n(x) \quad \text{f.ü. auf} \quad E \quad \text{für alle} \quad n > N(x) \quad \text{ist.} \tag{5.13}$$

Aus (5.11) und (5.13) folgt

$$\sphericalangle(a_{1n_i}(x), f'_{n_i}(x)e_1(x)) \to 0 \quad \text{f.ü. und nach (2.1):}$$

$$\sphericalangle(e_{1n_i}(x), e_1(x)) \to 0 \quad \text{f.ü. auf} \quad E.$$

Ausgehend von dieser Teilfolge erhalten wir aus (5.7) eine Teilfolge, für welche zusätzlich gilt:

$$\frac{|\mathcal{J}_{n_k}(x)|}{|a_{3n_k}(x)|^3} - \frac{g_{n_k}(x, x)^{3/2}}{|\mathcal{J}_{n_k}(x)|^2} \to 0 \quad \text{f.ü. auf} \quad E. \tag{5.14}$$

Wegen (5.12) existiert auf E eine Funktion $\beta(x)$ und eine natürliche Zahl $M(x)$, sodass

$$H_{In}(x) \geq \beta(x) H_n(x) \quad \text{f.ü. auf} \quad E \quad \text{für alle} \quad n > M(x) \quad \text{ist.} \tag{5.15}$$

Aus (5.14) und (5.15) folgt:

$$\sphericalangle(a_{3n_k}(x), f'_{n_k}(x) e_3(x)) \to 0 \quad \text{f.ü. und nach (2.1)}$$

$$\sphericalangle(e_{3n_k}(x), e_3(x)) \to 0 \quad \text{f.ü. auf} \quad E.$$

KOROLLAR. *Sei (f_n) eine Folge von K-quasikonformen Abbildungen, welche im Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$ lokal gleichmässig gegen die quasikonforme Abbildung f konvergiere. Auf einer Menge $E \subset \tilde{D}$ von positivem endlichem Mass gelte*

$$\overline{\lim}\, H_{on}(x) = H_0(x) \quad \textit{f.ü. auf} \quad E \tag{5.16}$$

und

$$\overline{\lim}\, H_{In}(x) = H_I(x) \quad \textit{f.ü. auf} \quad E. \tag{5.17}$$

Dann existiert eine Teilfolge, welche eine S-Approximation von f auf E ist.

Beweis. Nach dem Korollar zu Satz 5.1 existiert wegen (5.16) eine Teilfolge (f_{n_i}), für welche $\lim_{i\to\infty} H_{on_i}(x) = H_0(x)$ f.ü. auf E erfüllt ist. Für diese Teilfolge gilt (5.17). Eine nochmalige Anwendung von demselben Korollar zeigt, dass zu dieser Teilfolge eine Teilfolge $(f_{n_{i_k}})$ existiert, für welche wir zusätzlich noch $\lim_{k\to\infty} H_{In_{i_k}}(x) = H_I(x)$ f.ü. auf E haben. Wenden wir den Satz 5.2 auf diese neue Teilfolge an, so folgt die Behauptung.

LITERATUR

[1] K., STREBEL, *Some convergence theorems for quasiconformal mappings.* Lecture Notes Minneapolis (1969).

[2] K. STREBEL, *Ein Konvergenzsatz fur Folgen quasikonformer Abbildungen*. Comment. Math. Helv. *44* (1969), S.469–475.

[3] K., LESCHINGER, *Untersuchungen über Jacobideterminanten von zweidimensionalen quasikonformen Abbildungen*. Bonner Math. Schr. *72* (1974).

[4] ——, *Konvergenzsätze für Jacobi-Determinanten von n-dimensionalen quasikonformen Abbildungen*. Comment. Math. Helv. 51/2.

[5] P., CARAMAN, *n-Dimensional quasiconformal mappings*. Abacus Press, Kent, England (1974).

[6] MCSHANE and BOTTS, *Real analysis*. Van Nostrand (1959).

[7] S., SAKS, *Theory of the integral*. Dover Publications, New York (1964).

Kernstrasse 27
8406 *Winterthur*

Eingegangen am 19. Dezember 1975.