Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 51 (1976)

Artikel: Sous-groupes distingués du groupe unitaire et du groupe général linéaire d'un espace de Hilbert

Autor: Harpe, Pierre de de

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39441

Comment. Math. Helvetici *51* (1976) 241–257 Birkhäuser Verlag, Basel

Sous-groupes distingués du groupe unitaire et du groupe général linéaire d'un espace de Hilbert.

PIERRE DE LA HARPE

I. Résultats.

Soit H un espace de Hilbert complexe, séparable et de dimension infinie. Nous notons $L(H)$ l'anneau des opérateurs linéaires bornés sur H, et $GL(H)$ le groupe des unités dans $L(H)$ ou *groupe général linéaire* de H. Le sous-groupe des éléments de $GL(H)$ qui conservent le produit scalaire est le *groupe unitaire* de H noté $U(H)$. L'objet de ce travail est l'étude des *sous-groupes distingués* de $GL(H)$ et $U(H)$. Ce faisant, nous précisons certains résultats de Kadison [12, 13, 14] concernant le facteur de type I_∞; notre contribution est en ce sens l'analogue de celle de Kaplansky [15, appendice IV] concernant le groupe général linéaire des facteurs de type II_1; de plus, nos méthodes s'étendent au cas des groupes $GL(H_R)$ et $O(H_R)$ définis comme ci-dessus lorsque H_R est un espace de Hilbert réel, séparable et de dimension infinie. Avant d'énoncer nos résultats, nous introduisons quelques sous-groupes remarquables de $GL(H)$, $U(H)$, $GL(H_R)$ et $O(H_R)$.

Calkin ([5], voir aussi Schatten [23] chapitre I) a montré que tout idéal bilatère non trivial de $L(H)$ contient l'idéal $C_0(H)$ des *opérateurs de rang fini*, et est contenu dans l'idéal $C(H)$ des *opérateurs compacts*. Par suite, il est naturel d'introduire les sous-groupes suivants de $GL(H)$, qui sont tous distingués. L'opérateur identité sur H est désigné par 1, et tout scalaire (= nombre complexe) est identifié au multiple correspondant de cet opérateur.

$$GE(H, C) = \{A \in GL(H) \mid A \text{ est congru à un scalaire modulo } C(H)\}$$

$$GL(H, C) = \{A \in GL(H) \mid A \text{ est congru à 1 modulo } C(H)\}$$

$$GL(H, C_0) = \{A \in GL(H) \mid A \text{ est congru à 1 modulo } C_0(H)\}$$

$$SL(H, C_0) = \text{groupe dérivé de } GL(H, C_0)\text{, qui est aussi le noyau de l'homomorphisme det: } GL(H, C_0) \to C^*$$

C^* est le sous-groupe de $GL(H)$ formé des scalaires non nuls.

De même pour les sous-groupes distingués de $U(H)$:

$$\begin{aligned} UE(H, C) &= U(H) \cap GE(H, C) \\ U(H, C) &= U(H) \cap GL(H, C) \\ U(H, C_0) &= U(H) \cap GL(H, C_0) \\ SU(H, C_0) &= U(H) \cap SL(H, C_0) \\ S^1 &= U(H) \cap C^*. \end{aligned}$$

On définit de façon semblable les sous-groupes distingués $GE(H_R, C), \ldots, R^*$ de $GL(H_R)$ et les sous-groupes distingués $OE(H_R, C), \ldots, Z_2$ de $O(H_R)$.

Nos résultats principaux s'expriment alors comme suit.

THEOREME I. *Soit U un sous-groupe distingué non trivial de $U(H)$. Alors*
(*i*) *ou bien U est central: $U \subset S^1$;*
(*ii*) *ou bien $SU(H, C_0) \subset U \subset UE(H, C)$.*

Preuve: voir propositions 1 et 3; analogue réel: voir propositions 1R et 3.

COROLLAIRE. *Soit U un sous-groupe distingué non trivial de $U(H)$ qui est fermé dans la topologie uniforme (ou normique). Alors*
(*i*) *ou bien U est central, et donc isomorphe à S^1 ou à un groupe cyclique fini;*
(*ii*) *ou bien U est un sous-groupe de congruence de niveau $C(H)$: $U(H, C) \subset U \subset UE(H, C)$; et donc $U/U(H, C)$ est isomorphe à $UE(H, C)/U(H, C) \cong S^1$ ou à un groupe cyclique fini.*

Preuve: voir proposition 4.

THEOREME II. *Soit G un sous-groupe distingué non trivial de $GL(H)$. Alors*
(*i*) *ou bien G est central: $G \subset C^*$;*
(*ii*) *ou bien $SL(H, C_0) \subset G \subset GE(H, C)$.*

Preuve: voir propositions 6 et 3; analogue réel: voir propositions 6R et 3.

COROLLAIRE. *Soit G un sous-groupe distingué non trivial de $GL(H)$ qui est fermé dans la topologie uniforme. Alors*
(*i*) *ou bien G est central;*
(*ii*) *ou bien G est un sous-groupe de congruence de niveau $C(H)$: $GL(H, C) \subset G \subset GE(H, C)$.*

Preuve: voir la fin de la section V.

Les deux corollaires ont été démontrés par Kadison selon une preuve très différente de la nôtre. (Voir [12] théorème 4, [13] théorème 4 et [14] théorème 1.) A notre connaissance, les deux théorèmes sont nouveaux, de même que leurs analogues pour les sous-groupes distingués de $O(H_R)$ et $GL(H_R)$; dans le cas réel, on doit évidemment remplacer S^1 par le groupe à deux éléments Z_2, ainsi que C^* par R^*.

Si l'on ne tient pas compte des sous-groupes centraux, les théorèmes I et II affirment que les sous-groupes considérés sont pris en sandwich entre des groupes minimaux et maximaux, les tranches supérieures se révèlent être plus longues à maîtriser que les tranches inférieures. Les sections II et III sont respectivement consacrées aux tranches supérieure et inférieure du théorème I et de son analogue réel. La section IV expose des préliminaires algébriques à la section V, qui consiste elle-même en la preuve du théorème II et de son analogue réel. La section VI contient un corollaire et formule une question restée jusqu'ici sans réponse.

Je remercie le fonds national suisse de la recherche scientifique, qui m'a supporté pendant ce travail, ainsi que M. Karoubi, à qui je dois un allègement de la section IV.

II. Les sous-groupes distingués maximaux de U(H) et O(H$_R$).

Le point de départ pour la preuve du théorème I utilise un ingrédient crucial dû à Brown et Pearcy [4], et qui est reformulé dans notre premier lemme. L'ensemble des entiers naturels est désigné par N.

LEMME 1. *Soit U un sous-groupe distingué de $U(H)$. Supposons qu'il existe $A \in U$ avec $A \notin UE(H, C)$. Alors il existe*
une base orthonormale $\varepsilon = (\varepsilon_n^I)_{n\in N} \cup (\varepsilon_n^{II})_{n\in N} \cup (\varepsilon_n^{III})_{n\in N}$
un nombre réel θ_{inf} avec $0 < \theta_{inf} \leqslant \pi$
une suite de nombres réels $(\theta_n)_{n\in N}$ avec $\theta_{inf} \leqslant \theta_n \leqslant \pi$ pour tout $n \in N$
tels que $D \in U$, où D est l'opérateur unitaire défini sur H par

$$\left.\begin{aligned} D\varepsilon_n^I &= exp(-i\theta_n)\varepsilon_n^I \\ D\varepsilon_n^{II} &= exp(+i\theta_n)\varepsilon_n^{II} \\ D\varepsilon_n^{III} &= \varepsilon_n^{III} \end{aligned}\right\} \textit{pour tout } n \in N.$$

Preuve.

Echelon 1. Notons $\langle | \rangle$ le produit scalaire sur H. En vertu du lemme 3.3 de [4], il existe une suite orthononormale $(\varepsilon_n^I)_{n\in N}$ dans H et un nombre réel τ avec

$0 \leqslant \tau < 1$ tels que, si $\varphi_n = A\varepsilon_n^I$ pour tout $n \in N$, alors:

(i) $\langle \varepsilon_m^I \mid \varphi_n \rangle = 0$ pour tous m, $n \in N$ avec $m \neq n$

(ii) $|\langle \varepsilon_n^I \mid \varphi_n \rangle| \leqslant \tau$ pour tout $n \in N$

(iii) le complémentaire orthogonal de la famille $(\varepsilon_n^I)_{n \in N} \cup (\varphi_n)_{n \in N}$ est de dimension infinie.

Pour tout $n \in N$, soit alors ε_n^{II} un vecteur de norme unité, orthogonal à ε_n^I, et dans le plan engendré par ε_n^I et φ_n; soient α_n et β_n des nombres complexes tels que $\varphi_n = \alpha_n \varepsilon_n^I + \beta_n \varepsilon_n^{II}$, de sorte que $|\alpha_n| = |\langle \varepsilon_n^I | \varphi_n \rangle| \leqslant \tau$ et $|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 = 1$. Soit $(\varepsilon_n^{III})_{n \in N}$ une suite orthonormale dans H telle que $\varepsilon = (\varepsilon_n^I)_{n \in N} \cup (\varepsilon_n^{II})_{n \in N} \cup (\varepsilon_n^{III})_{n \in N}$ soit une base de H. Les matrices de A et de son adjoint A^* relativement à ε sont donc respectivement

$$\begin{pmatrix} \alpha & p & r \\ \beta & s & t \\ 0 & u & w \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} & 0 \\ p^* & s^* & u^* \\ r^* & t^* & w^* \end{pmatrix}$$

où α [resp. β] est la $(N \times N)$-matrice diagonale définie par les α_n [resp. les β_n]. Comme A est unitaire, $AA^* = 1$:

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha\bar{\alpha} + pp^* + rr^* = 1 & \alpha\bar{\beta} + ps^* + rt^* = 0 & pu^* + rw^* = 0 \\ \beta\bar{\alpha} + sp^* + tr^* = 0 & \beta\bar{\beta} + ss^* + tt^* = 1 & su^* + tw^* = 0 \\ up^* + wr^* = 0 & us^* + wt^* = 0 & uu^* + ww^* = 1 \end{cases}$$

Echelon 2. Soit J l'opérateur unitaire de matrice $\begin{pmatrix} +1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$. Alors U contient l'opérateur $B = JAJ^*A^*$, dont la matrice se calcule aisément grâce aux formules (1):

$$\begin{pmatrix} 2\alpha\bar{\alpha} - 1 & 2\alpha\bar{\beta} & 0 \\ -2\beta\bar{\alpha} & 1 - 2\beta\bar{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour tout $n \in N$, le sous-espace H_n de H engendré par ε_n^I et ε_n^{II} est invariant par B. La matrice relativement à la base $(\varepsilon_n^I, \varepsilon_n^{II})$ de la réduction de B à H_n s'écrit

$$B_n = \begin{pmatrix} 2|\alpha_n|^2 - 1 & 2\alpha_n\beta_n \\ -2\bar{\alpha}_n\beta_n & 2|\alpha_n|^2 - 1 \end{pmatrix} \text{ avec } |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 = 1.$$

Ses valeurs propres sont données par $\lambda_n^{\pm} = \gamma_n \pm i\delta_n$ où

$$\gamma_n = 2|\alpha_n|^2 - 1 \qquad \text{et} \quad -1 \leqslant \gamma_n \leqslant 2\tau - 1 < 1$$

$$\delta_n = 2\sqrt{|\alpha_n|^2 - |\alpha_n|^4} \qquad 0 \leqslant \delta_n \leqslant 1.$$

Comme $\gamma_n^2 + \delta_n^2 = 1$, il existe un unique nombre réel θ_n avec $0 < \theta_{\min} \leqslant \theta_n \leqslant \pi$ et

$\lambda_n^{\pm} = \exp(\pm i\theta_n)$ où $\theta_{\min} = \operatorname{Arc}\cos(2\tau^2 - 1)$ est indépendant de n. De plus, il existe une (2×2)-matrice unitaire V_n qui diagonalise B_n:

$$D_n = V_n B_n V_n^* = \begin{pmatrix} \exp(-i\theta_n) & 0 \\ 0 & \exp(+i\theta_n) \end{pmatrix}.$$

Soit enfin V l'opérateur unitaire sur H défini par $V\varepsilon_n^I = V_n\varepsilon_n^I$, $V\varepsilon_n^{II} = V_n\varepsilon_n^{II}$ et $V\varepsilon_n^{III} = \varepsilon_n^{III}$ pour tout $n \in N$. Alors $D = VBV^*$ a les propriétés désirées.

Nous rappelons ensuite un lemme-clé dans la preuve standard de la simplicité de $SU(2)$ modulo son centre. L'espace C^2 est muni du produit scalaire, de la norme associée, et de la base orthonormale (e, e') canoniques; le groupe $SU(2)$ agit canoniquement sur C^2.

LEMME 2. *Soit ε un nombre réel avec $0 < \varepsilon \leq 2$. Alors il existe un entier positif k ayant la propriété suivante: Pour tout $A \in SU(2)$ avec $\|Ae - e\| \geq \varepsilon$, il existe k éléments $V_1, \ldots, V_k$ dans $SU(2)$ tels que $(V_k A V_k^* V_{k-1} A V_{k-1}^* \cdots V_1 A V_1^*)(e) = -e$*

Preuve: Voir dans Artin ([2], chapitre V, § 2) le cas presqu'identique de $SO(3)$. Les V_j dépendent évidemment de A; l'importance du lemme 2 ici est que leur nombre ne dépend que de ε.

DÉFINITION. Une *involution* de H est un opérateur unitaire J sur H avec $J^2 = 1$. Si J est une telle involution, soient $H_J^+ = \{x \in H \mid Jx = x\}$ et $H_J^- = \{x \in H \mid Jx = -x\}$. Si $p = \dim H_J^+$ et $q = \dim H_J^-$, nous disons que J est de *type* (p, q); on a $p, q \in N \cup \{\infty\}$ et $p+q = \dim H = \infty$.

Nous montrons dans les lemmes 3 et 4 que le groupe U du lemme 1 contient toutes les involutions de H.

LEMME 3. *Soit U comme dans le lemme* 1. *Alors U contient une involution de type* (∞, ∞).

Preuve.

Echelon 1. Pour tout $n \in N$, soit $D_n = \begin{pmatrix} \exp(-i\theta_n) & 0 \\ 0 & \exp(+i\theta_n) \end{pmatrix}$ comme dans le lemme 1; alors

$$\|D_n\varepsilon_n^I - \varepsilon_n^I\| = |\exp(-i\theta_n) - 1| \geq |\exp(-i\theta_{\inf}) - 1| = \varepsilon > 0.$$

Il existe donc en vertu du lemme 2 un entier k (indépendant de n) et des (2×2)-matrices unitaires $V_{n,1}, \ldots, V_{n,k}$ tels que

$$(V_{n,k} D_n V_{n,k}^* \cdots V_{n,1} D_n V_{n,1}^*)(\varepsilon_n^I) = -\varepsilon_n^I.$$

Pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$, soit $V_{(j)}$ l'opérateur unitaire sur H défini par

$$\left.\begin{aligned} V_{(j)}\varepsilon_n^I &= V_{n,j}\varepsilon_n^I \\ V_{(j)}\varepsilon_n^{II} &= V_{n,j}\varepsilon_n^{II} \\ V_{(j)}\varepsilon_n^{III} &= \varepsilon_n^{III} \end{aligned}\right\} \text{ pour tout } \quad n \in N.$$

Alors l'opérateur $E = V_{(k)}DV_{(k)}^* \cdot \cdot V_{(1)}DV_{(1)}^*$ est dans U, et sa matrice relativement à la base ε est de la forme

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Echelon 2. Soit F l'opérateur unitaire dont la matrice relativement à ε est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme E est dans U, il en est de même de $J = FEF^*E^*$, dont la matrice est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. L'opérateur J est donc une involution de type (∞, ∞) qui est dans U.

LEMME 4. *Soit U comme dans le lemme 1. Alors U contient toutes les involutions de H.*

Preuve. Il est évident que deux involutions de H sont conjuguées par un élément de $U(H)$ si et seulement si elles sont de même type; il suffit donc de vérifier que U contient une involution de chaque type (p, q). Si $p = q = \infty$, il n'y a plus rien à démontrer. Si p est fini, soit Δ un décalage bilatéral d'ordre p, donné dans une base orthonormale $(\varepsilon_n)_{n\in Z}$ de H par $\Delta\varepsilon_n = \varepsilon_{n+p}$; et soit J_1 l'involution donnée par $J_1\varepsilon_n = \varepsilon_n$ si $n \leq 0$ et $J_1\varepsilon_n = -\varepsilon_n$ si $n > 0$. Comme J_1 est de type (∞, ∞), c'est un élément de U, et il en est de même de $J_2 = \Delta J_1 \Delta^* J_1$. On vérifie facilement que J_2 est une involution de type (∞, p). Enfin l'involution $-J_1$ est dans U puisque de type (∞, ∞), et $J_3 = -J_1^2 J_2$ est une involution de type (p, ∞) qui est dans U.

Nous sommes en mesure d'établir la partie non banale du théorème I.

PROPOSITION 1. *Soit U un sous-groupe distingué de $U(H)$. Alors: ou bien $U = U(H)$, ou bien $U \subset UE(H, C)$.*

Preuve. Les lemmes 1 à 4 montrent que, si $U \not\subset UE(H, C)$, alors U contient toutes les involutions de H. La proposition résulte du théorème de Halmos et Kakutani, selon lequel tout opérateur unitaire sur un espace de Hilbert complexe de dimension infinie est un produit de quatre involutions. (Voir par exemple Halmos [7], problème 112.)

Considérons maintenant l'espace de Hilbert H_R. L'énoncé et la preuve du lemme 3.3 de Brown et Pearcy [4] s'étendent immédiatement au cas réel. Par suite, si O est un sous-groupe distingué de $O(H_R)$ qui n'est pas contenu dans $OE(H_R, C)$, alors on montre comme dans le lemme 1 que O contient un opérateur D_R, dont la matrice relativement à une base ad hoc n'exhibe que des (3×3)-blocs centrés sur la diagonale; ces blocs sont de deux types: une infinité de blocs du type $\begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n & 0 \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $0 < \theta_{\inf} \leq \theta_n \leq \pi$ et une infinité de blocs égaux à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'analogue du lemme 2 pour le groupe $SO(3)$ est bien connu (voir Artin [2] chapitre V § 2). On peut donc montrer comme aux lemmes 3 et 4 que O contient toutes les involutions de H_R.

La preuve du théorème de Halmos et Kakutani, utilisé pour la proposition 1, s'étend également sans peine au cas réel. Le seul point qui mérite quelque commentaire est l'existence, pour tout opérateur A normal sur H_R, d'une suite infinie de sous-espaces fermés orthogonaux de H_R, tous de dimension infinie et tous invariants par A. Ce dernier fait résulte du théorème spectral (voir Halmos [7] problème 111), et se démontre de la même manière dans le cas réel que dans le cas complexe. On trouvera une rédaction du théorème spectral pour les opérateurs normaux sur H_R dans un article de Goodrich [6]. Il suffirait d'ailleurs dans notre cas d'utiliser deux résultats plus anciens; d'abord le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints sur H_R (voir Stone [25], fin du chapitre IX § 2); ensuite la forme des opérateurs orthogonaux sur H_R mise en évidence par Martin ([19], théorème IV): pour tout $A \in O(H_R)$, il existe une involution J et un opérateur anti-adjoint S sur H_R tels que $A = J\exp(S)$ avec $JS = SJ$. Nous avons montré:

PROPOSITION 1R. *Soit O un sous-groupe distingué de $O(H_R)$. Alors: ou bien $O = O(H_R)$, ou bien $O \subset OE(H_R, C)$.*

III. Les sous-groupes distingués minimaux; preuve du théorème I.

Soient H et H_R comme dans la section I.

PROPOSITION 2. *Les groupes* $SU(H, C_0)$, $SO(H_R, C_0)$, $SL(H, C_0)$ *et* $SL(H_R, C_0)$ *sont simples.*

Preuve. On montre d'abord que ces groupes sont localement presque simples. En d'autres termes: tout sous-ensemble fini d'un de ces groupes est contenu dans un sous-groupe, respectivement de la forme $SU(n)$, $SO(n)$, $SL_n(C)$ ou $SL_n(R)$; et chacun de ces groupes classiques n'a comme sous-groupes distingués non triviaux que des sous-groupes centraux finis. La proposition 2 résulte alors du fait que les groupes de l'énoncé ont des centres triviaux (c'est le lemme de Schur; voir Lang [17] appendice II). Les détails sont identiques à ceux qui concernent les algèbres de Lie correspondantes ([8], proposition 1A page I. 2).

LEMME 5. *Soient* Γ *un groupe et* Γ_0 *un sous-groupe distingué de* Γ. *Supposons que*

(*i*) Γ_0 *est simple;*

(*ii*) $\{\sigma \in \Gamma \mid \sigma\gamma = \gamma\sigma$ *pour tout* $\gamma \in \Gamma_0\}$ *est égal au centre de* Γ.

Soit N *un sous-groupe distingué non central de* Γ. *Alors* N *contient* Γ_0.

Preuve. Soit $\nu \in N$ avec ν non central. Par (ii), il existe $\gamma \in \Gamma_0$ tel que $\alpha = \nu\gamma\nu^{-1}\gamma^{-1} \neq 1$. Donc $\Gamma_0 \cap N$ n'est pas réduit à $\{1\}$; comme c'est un sous-groupe distingué de Γ_0, il résulte de (i) que $\Gamma_0 \cap N = \Gamma_0$.

PROPOSITION 3.

(*i*) *Soit* U [*resp.* O] *un sous-groupe distingué non central de* $U(H)$ [*resp.* $O(H_R)$]. *Alors* U [*resp.* O] *contient* $SU(H, C_0)$ [*resp.* $SO(H_R, C_0)$].

(*ii*) *Soit* G *un sous-groupe distingué non central de* $GL(H)$ [*resp.* $GL(H_R)$]. *Alors* G *contient* $SL(H, C_0)$ [*resp.* $SL(H_R, C_0)$].

Preuve. Il suffit d'appliquer le lemme 5, dont la première condition est vérifiée vu la proposition 2 et la deuxième vu le lemme de Schur.

Les propositions 1 et 3(i) établissent le théorème I de la première section. Le corollaire résulte alors du résultat suivant, qui est bien connu des spécialistes du folklore, mais que nous redémontrons ici faute de référence convenable.

PROPOSITION 4.

(*i*) *L'adhérence de* $SU(H, C_0)$ *dans* $U(H)$ *pour la topologie normique est* $U(H, C)$.

(*ii*) *L'adhérence de* $SO(H_R, C_0)$ *dans* $O(H_R)$ *pour la topologie normique est la composante connexe de* $O(H_R, C)$.

Remarque: On sait que $U(H, C)$ est connexe et que la composante connexe de $O(H_R, C)$ est d'indice 2 dans $O(H_R, C)$; voir par exemple [9]. Nous formulons quelques lemmes avant de démontrer la proposition 4 proprement dite.

LEMME 6. *Soit K l'un des corps R, C. Soit f_0 l'espace des suites finies $(\lambda_n)_{n\in N}$ d'éléments de K telles que $\sum_{n\in N} \lambda_n = 0$; soit c_0 l'ensemble des suites $(\lambda_n)_{n\in N}$ d'éléments de K qui convergent vers zéro, ensemble que l'on muni de sa structure usuelle d'espace de Banach sur K. Alors f_0 est dense cans c_0.*

Preuve. Soit $\lambda = (\lambda_n)_{n\in N} \in c_0$. Pour tout $j \in N$, soit $\mu^j = (\mu^j_n)_{n\in N}$ la suite dans f_0 définie comme suit: Si $n < j : \mu^j_n = \lambda_n$; si $j \leqslant n \leqslant 2j-1$: $\mu^j_n = -1/j \sum_{n=0}^{j-1} \lambda_n$; si $n \geqslant 2j$: $\mu^j_n = 0$. Alors les μ^j convergent vers λ.

Dans l'énoncé du lemme 7, on écrit H_C au lieu de H, et K désigne toujours l'un des corps R, C. L'espace vectoriel des opérateurs de rang fini et à trace nulle sur H_K est noté $sl(H_K, C_0)$. L'espace des opérateurs compacts sur H_K est noté $gl(H_K, C)$.

LEMME 7. *L'espace $sl(H_K, C_0)$ est dense dans $gl(H_K, C)$.*

Preuve. Soit d'abord A un opérateur normal dans $gl(H_C, C)$. Alors A est diagonal dans une base ad hoc, et les coefficients diagonaux de la matrice correspondante forment une suite dans c_0; (voir Halmos [7] problèmes 132 et 133). Le lemme 7 résulte donc du lemme 6, puisque tout opérateur dans $gl(H_C, C)$ est la somme de deux opérateurs normaux: $A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*)$. Soit ensuite A un opérateur normal dans $gl(H_R, C)$. Alors A a une représentation matricielle dans une base ad hoc qui ne contient que des coefficients diagonaux et des (2×2)-blocs centrés sur la diagonale (Goodrich [6] remarque 3). Le lemme 6 permet à nouveau de conclure.

Soient alors $shilb(H_K, C_0) = \{A \in sl(H_K, C_0) \mid A^* = -A\}$ et $hilb(H_K, C) = \{A \in gl(H_K, C) \mid A^* = -A\}$.

LEMME 8. *L'espace $shilb(H_K, C_0)$ est dense dans $hilb(H_K, C)$.*

Preuve. Soit $A \in hilb(H_K, C)$. Il existe par le lemme 7 une suite $(A_n)_{n\in N}$ de $sl(H_K, C_0)$ qui converge vers A. *Posons* $B_n = \frac{1}{2}(A_n - A_n^*)$ pour tout $n \in N$. Alors $(B_n)_{n\in N}$ est une suite de $shilb(H_K, C_0)$ qui converge aussi vers A.

Preuve de la Proposition 4. Nous faisons la démonstration dans le cas réel. Il suffit de montrer que tout élément d'un voisinage de l'identité dans $O(H_R, C)$ peut être arbitrairement approché par des éléments de $SO(H_R, C_0)$. Soit donc $A \in O(H_R, C)$ tel que la norme de $A-1$ soit petite. Alors il existe un opérateur anti-adjoint compact S sur H_R tel que $A = \exp(S)$. (C'est un cas particulier facile—puisque $A-1$ est compact—d'un résultat de Putnam et Wintner [21].) Par le lemme 8, il existe une suite $(S_n)_{n \in N}$ de $so(H_R, C_0)$ qui converge en norme vers S. Comme l'exponentielle est continue pour les topologies normiques, les opérateurs $A_n = \exp(S_n)$ convergent vers A, et ils sont évidemment tous dans $SO(H_R, C_0)$.

IV. Un résultat algébrique sur certains anneaux de matrices 2×2.

Dans toute cette section, nous désignons par $\mathscr{A}$ un anneau associatif avec unité 1. Nous supposons que $\mathscr{A}$ possède un idéal bilatère maximal $\mathscr{C}$ distinct de $\mathscr{A}$, tel que tout idéal bilatère non trivial de $\mathscr{A}$ soit contenu dans $\mathscr{C}$. De plus, nous supposons systématiquement que $\mathscr{A}$ possède les deux propriétés suivantes:

(P1): 2 est inversible dans $\mathscr{A}$;

(P2): tout élément de $\mathscr{A}$ est une somme finie d'éléments inversibles de $\mathscr{A}$.

Les anneaux qui vérifient (P2) ont été étudiés par exemple par Henriksen (voir [10] et sa bibliographie); ils ont été classés dans le cas fini par Stewart [24]. Les anneaux d'opérateurs usuels sur H ou H_R satisfont certainement (P1) et (P2).

Le groupe dérivé du groupe $GL_1(\mathscr{A})$ des éléments inversibles de $\mathscr{A}$ sera désigné par $SL_1(\mathscr{A})$, et le groupe des (2×2)-matrices inversibles sur $\mathscr{A}$ par $GL_2(\mathscr{A})$.

PROPOSITION 5. *Soit G un sous-groupe distingué de $GL_2(\mathscr{A})$. Supposons qu'il existe des éléments a, b, c, j_1, j_2, j_3, j_4 dans $\mathscr{A}$ avec*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in G \qquad \begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ j_3 & j_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^{-1} \qquad j_1 \notin \mathscr{C}.$$

Soient x, y, z, $t \in \mathscr{A}$ avec t inversible et $tx - tyt^{-1}z \in SL_1(\mathscr{A})$. Alors $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ est inversible et $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in G$.

Nous décomposons la preuve de la proposition 5 en trois lemmes, où G est une fois pour toutes un sous-groupe distingué de $GL_2(\mathscr{A})$. On aura remarqué que, si $\mathscr{A}$ est un corps gauche, alors la condition $tx - tyt^{-1}z \in SL_1(\mathscr{A})$ s'écrit $\det \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = 1$; toutefois, dans ce cas, la proposition serait vide, puisqu'on aurait forcément $j_1 = 0 \in \mathscr{C}$.

LEMME 9. *Soient $a, \ldots, j_4$ comme dans la proposition 5. Alors il existe r, s dans $\mathcal{A}$ avec r inversible, $s \notin \mathcal{C}$, tels que* $\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

Preuve. Soit n un multiple entier de l'unité de $\mathcal{A}$. L'opérateur

$$X_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & n+j_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ j_3 & j_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n+j_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} a+nc & b+aj_1+ncj_1 \\ c & cj_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2-nj_1-j_1^2 \\ j_3 & j_4-nj_3-j_3j_1 \end{pmatrix}$$

est évidemment dans G. Vu les hypothèses de la proposition 5:

$$\begin{aligned} aj_1+bj_3 &= 1 \qquad & aj_2+bj_4 &= 0 \\ cj_1 &= 0 \qquad & cj_2 &= 1; \end{aligned}$$

et par suite:

$$X_n = \begin{pmatrix} 1+aj_1j_3 & N(n) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} N(n) &= (a+nc)(j_2-nj_1-j_1^2)+(b+aj_1)(j_4-nj_3-j_3j_1) = \\ &= aj_2-naj_1-aj_1^2+ncj_2+ \\ &\quad + bj_4-nbj_3-bj_3j_1+aj_1j_4-naj_1j_3-aj_1j_3j_1 \\ &= -j_1+aj_1(j_4-nj_3-j_3j_1). \end{aligned}$$

Mais $N(0)$ et $N(1)$ ne sont pas tous les deux dans $\mathcal{C}$, sinon: $(N(0)-N(1))b = aj_1(j_3b) = aj_1$ serait dans $\mathcal{C}$, et donc aussi $j_1 = -N(1)+aj_1(j_4-j_3-j_3j_1)$, ce qui est contraire aux hypothèses.

LEMME 10. *Soient r, s dans $\mathcal{A}$ avec r inversible, $s \notin \mathcal{C}$, et* $\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$. *Alors* $\begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ *pour tout $w \in \mathcal{A}$.*

Preuve. Comme 2 est inversible et comme $\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} r^{-1} & -r^{-1}s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r^{-1} & -r^{-1}s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

Par suite, pour toute paire u, v d'éléments inversibles de $\mathscr{A}$:

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & usv \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

Il résulte alors de ce que $\mathscr{A}$ satisfait (P2) que $\begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ pour tout élément w dans l'idéal bilatère engendré par s dans $\mathscr{A}$, donc pour tout w dans $\mathscr{A}$ par maximalité de $\mathscr{C}$.

LEMME 11. *Si* $\begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ *pour tout* $w \in \mathscr{A}$, *alors* $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in G$ *pour tous* x, y, z, t *dans* $\mathscr{A}$ *avec* t *inversible et* $tx - tyt^{-1}z \in SL_1(\mathscr{A})$.

Preuve. Pour tout $w \in \mathscr{A}$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix} \in G$. Donc, pour tout g inversible dans $\mathscr{A}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g \\ -g^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in G;$$

et aussi:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -g^{-1} \\ g & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{-1} \end{pmatrix} \in G.$$

De sorte que, pour tout commutateur multiplicatif $ghg^{-1}h^{-1}$ dans $\mathscr{A}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & gh \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & h \\ -h^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & gh \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -ghg^{-1}h^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ghg^{-1}h^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

Il en résulte que $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ pour tout $k \in SL_1(\mathscr{A})$. Soient enfin $x, y, z, t \in \mathscr{A}$ avec t inversible et $tx - tyt^{-1}z \in SL_1(\mathscr{A})$; alors:

$$\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} tx - tyt^{-1}z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & (tx - tyt^{-1}z)^{-1}ty \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^{-1}z & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} tx - tyt^{-1}z & ty \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^{-1}z & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} tx & ty \\ t^{-1}z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in G.$$

V. Les sous-groupes distingués de GL(H) et Gl(H_R).

Soit G un sous-groupe distingué de $GL(H)$. Supposons qu'il existe $A \in G$ avec $A \notin GE(H, C)$. Brown et Pearcy ont montré ([4], corollaire 3.4) qu'il existe un opérateur linéaire borné inversible $T: H \to H \oplus H$ tel que

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(L(H)) = GL(H \oplus H)$$

et tel que le noyau de l'adjoint b^* de b est de dimension infinie. Soit alors $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ j_3 & j_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^{-1}$. L'opérateur j_1 n'est pas compact. En effet, s'il l'était et vu que $aj_1 + bj_3 = 1$, il existerait $d \in C(H)$ avec $bj_3 = 1 - d^*$, et on aurait $j_3{}^*b^* = 1 - d$, ce qui est impossible puisque le noyau de $j_3{}^*b^*$ est de dimension infinie.

Considérons l'isomorphisme de groupes

$$\tau: \begin{cases} GL(H) \to GL_2(L(H)) = GL(H \oplus H) \\ \quad A \longrightarrow TAT^{-1} \end{cases}.$$

Comme $C(H)$ est un idéal bilatère absolument maximal dans $L(H)$ (voir Calkin [5]), la proposition 5 implique que le sous-groupe distingué $\tau(G)$ de $GL(H \oplus H)$ contient toutes les matrices $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ avec t inversible et $tx - tyt^{-1}z$ dans le groupe des commutateurs de $GL(H)$. Mais $GL(H)$ est égal à son groupe des commutateurs (voir par exemple Halmos [7] problème 192). Donc $\tau(G)$ contient toutes les matrices $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ avec t et $tx - tyt^{-1}z$ inversibles.

PROPOSITION 6. *Soit G un sous-groupe distingué de $GL(H)$. Alors: ou bien $G = GL(H)$, ou bien $G \subset GE(H, C)$.*

Preuve. Supposons que $G \not\subset GE(H, C)$. Les notations étant comme ci-dessus, il suffit de montrer que $\tau(G) = GL(H \oplus H)$. Lorsqu'on le munit de la topologie normique, $GL(H \oplus H)$ est un groupe topologique connexe (voir par exemple Kuiper [16]); il suffit donc de montrer que $\tau(G)$ contient un voisinage de l'origine dans $GL(H \oplus H)$.

Soit $\mathfrak{V}$ l'ensemble des (2×2)-matrices $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ à coefficients dans $L(H)$ telles que les normes des quatre opérateurs $1 - x$, y, z, $1 - t$ soient suffisamment petites (par exemple: plus petites que $1/10$). Alors $\mathfrak{V}$ est un voisinage de l'origine dans $GL(H \oplus H)$. De plus, si $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathfrak{V}$, alors x et $tx - tyt^{-1}z$ sont inversibles, puisque les normes de $1-x$ et de $1-(tx-tyt^{-1}z)$ sont suffisament petites. Il résulte des remarques qui précèdent la proposition que $\mathfrak{V}\subset\tau(G)$, ce qui achève la preuve.

Les ingrédients utilisés dans la preuve de la proposition 6 sont les suivants.

(1°) Le corollaire 3.4 de Brown et Pearcy [4], dont l'énoncé et la preuve passent sans aucune difficulté au cas réel. (On pourrait aussi étendre, sans doute, les preuves plus récentes de Anderson et Stampfli [1].)

(2°) La maximalité absolue de l'idéal bilatère $C(H)$ dans $L(H)$, qui s'étend aussi au cas réel.

(3°) L'égalité de $GL(H)$ et de son groupe dérivé, qui est encore vraie dans le cas réel. (Voir Halmos [7] problème 192, et les commentaires à la fin de notre section II concernant le théorème spectral pour les opérateurs normaux sur $H_{\mathbf{R}}$ [6].)

(4°) La connexité de $GL(H)$ dans la topologie normique, qui n'offre pas davantage de difficulté dans le cas réel.

Nous avons donc montré:

PROPOSITION 6R. *Soit G un sous-groupe distingué de $GL(H_{\mathbf{R}})$. Alors: ou bien $G=GL(H_{\mathbf{R}})$, ou bien $G\subset GE(H_{\mathbf{R}}, C)$.*

Le théorème II résulte des propositions 3 et 6. On vérifie comme pour la proposition 4 que l'adhérence de $SL(H, C_0)$ [resp. $SL(H_{\mathbf{R}}, C_0)$] dans $GL(H)$ [resp. $GL(H_{\mathbf{R}})$] muni de la topologie normique est $GL(H, C)$ [resp. la composante connexe de $GL(H_{\mathbf{R}}, C)$]. Le corollaire du théorème II énoncé dans l'introduction est alors immédiat.

Remarques.

(i) La proposition 6 peut rappeler certains résultats exposés par Bass ([3], chapitre V). Toutefois l'analogie n'est guère instructive au niveau des preuves, puisque les "stable range conditions" de [3] ne sont pas vérifiées par l'anneau $L(H)$.

(ii) L'étude des sous-groupes distingués du groupe général linéaire d'un espace vectoriel de dimension infinie (*non* muni d'aucune topologie) a été entreprise par Rosenberg [22]. Mais ses preuves ne s'adaptent pas non plus aux cas qui nous intéressent.

(iii) Dans la preuve de la proposition 6, il serait sans doute intéressant de pouvoir remplacer l'introduction du voisinage $\mathfrak{V}$ par un argument de nature plus algébrique; nous ne savons pas offrir une telle alternative.

(iv) Les propositions 1, 1R, 6 et 6R montrent que les sous-groupes distingués non triviaux de $U(H)$, $O(H_{\mathbf{R}})$, $GL(H)$ et $GL(H_{\mathbf{R}})$ sont formés de perturbations compactes des scalaires, c'est-à-dire précisément d'opérateurs pour lesquels le théorème spectral est "facile". Nous espérons revenir prochaînement sur ce point, et en indiquer une application.

VI. Un corollaire sur l'algèbre de Calkin et une question.

Soit $\mathrm{Cal}(H) = L(H)/C(H)$ l'*algèbre de Calkin* de H, qui est une algèbre stellaire. Soient $\mathrm{Cal}(H)^{inv}$ le groupe de ses éléments inversibles et $\mathrm{Cal}(H)^{u}$ le groupe de ses éléments unitaires.

Lorsqu'il est muni de la topologie normique, $\mathrm{Cal}(H)^{inv}$ est un groupe topologique dont la composante connexe $\mathrm{Cal}(H)_0^{\mathrm{inv}}$ est l'image de $GL(H)$ par la projection canonique de $L(H)$ sur $\mathrm{Cal}(H)$. On sait que $\mathrm{Cal}(H)^{\mathrm{inv}}/\mathrm{Cal}(H)_0^{\mathrm{inv}}$ est isomorphe au groupe Z, et que l'isomorphisme est donné par l'indice des opérateurs de Fredholm (voir par exemple Palais [20], fin du chapitre VII). Ecrivons enfin $P\mathrm{Cal}(H)_0^{\mathrm{inv}}$ le quotient de $\mathrm{Cal}(H)_0^{\mathrm{inv}}$ par son centre C^*. Schématiquement:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{C}^* & & \\ & & \downarrow & & \\ GL(H)/GL(H,\ C) \approx & & \mathrm{Cal}(H)_0^{\mathrm{inv}} & \to \mathrm{Cal}(H)^{\mathrm{inv}} & \to Z \\ & & \downarrow & & \\ GL(H)/GE(H,\ C) \approx & & P\mathrm{Cal}(H)_0^{\mathrm{inv}} & & \end{array}$$

De même pour les groupes unitaires:

$$\begin{array}{ccccc} & & S^1 & & \\ & & \downarrow & & \\ U(H)/U(H,\ C) \approx & & \mathrm{Cal}(H)_0^{u} & \to \mathrm{Cal}(H)^{u} & \to Z \\ & & \downarrow & & \\ U(H)/UE(H,\ C) \approx & & P\mathrm{Cal}(H)_0^{u} & & \end{array}$$

PROPOSITION 7. *Les groupes $P\mathrm{Cal}(H)_0^{u}$ et $P\mathrm{Cal}(H)_0^{inv}$ sont simples.*

Preuve: immédiate à partir des propositions 1 et 6.

Il en résulte que les sous-groupes distingués de $\mathrm{Cal}(H)^{\mathrm{inv}}$ et $\mathrm{Cal}(H)^{u}$ sont peu nombreux (très petits ou très gros) et tous connus. L'anneau $\mathrm{Cal}(H)$ est simple; la proposition 7 ajoute un exemple à la théorie générale des relations entre les propriétés de simplicité d'un anneau [resp. d'un anneau avec involution] et les propriétés de simplicité du groupe de ses éléments inversibles [resp. unitaires]; voir à ce sujet Herstein [11] et Lanski [18].

* * * * *

Soient q un idéal bilatère non trivial de $L(H)$ et p l'application canonique de $GL(H)$ dans le groupe des éléments inversibles de $L(H)/q$. Soit $GE(H, q) = p^{-1}(C^*)$, et soit $GL(H, q)'$ le groupe dérivé du noyau de p. Soit alors G un sous-groupe distingué de $GL(H)$; nous dirons que G est un *groupe de congruence* de niveau q s'il existe un idéal bilatère q de $L(H)$ tel que $GL(H, q)' \subset G \subset GE(H, q)$.

Question: Les sous-groupes distingués de $GL(H)$ sont-ils tous des groupes de congruence?

VII. REFERENCES.

[1] J. H. ANDERSON et J. G. STAMPFLI: *Commutators and compressions.* Israel J. Math. *10* (1971) 433–441.

[2] E. ARTIN: *Algèbre géométrique.* Gauthier-Villars 1962.

[3] H. BASS: *Algebraic K-theory.* Benjamin 1968.

[4] A. BROWN et C. PEARCY: *Structure of commutators of operators.* Ann. of Math. *82* (1965) 112–127.

[5] J. W. CALKIN: *Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space.* Ann. of Math *42* (1941) 839–873.

[6] R. K. GOODRICH: *The spectral theorem for real Hilbert space.* Acta Sci. Math. (Szeged) *33* (1972) 123–127.

[7] P. R. HALMOS: *A Hilbert space problem book.* Van Nostrand 1967.

[8] P. DE LA HARPE: *Classical Banach-Lie algebras and Banach-Lie groups of operators in Hilbert space.* Springer Lecture Notes in Math. *285* (1972).

[9] ——: *Some properties of infinite-dimensional orthogonal groups.* In "Global analysis and its applications, vol. II", publié par IAEA, Vienne 1974.

[10] M. HENRIKSEN: *Two classes of rings generated by their units.* J. of Algebra *31* (1974) 182–193.

[11] I. N. HERSTEIN: *On the multiplicative group of a Banach algebra.* Symposia Mathematica *8* (1972) 227–232.

[12] R. V. KADISON: *Infinite unitary groups.* Trans. Amer. Math. Soc. *72* (1952) 386–399.

[13] ——: *Infinite general linear groups.* Trans. Amer. Math. Soc. *76* (1954) 66–91.

[14] ——: *On the general linear groups of infinite factors.* Duke Math. J. *22* (1955) 119–122.

[15] I. KAPLANSKY: *Rings of operators.* Benjamin 1968.

[16] N. KUIPER: *The homotopy type of the unitary group of Hilbert space.* Topology *3* (1965) 19–30.

[17] S. LANG: *Introduction aux variétés différentiables.* Dunod 1967.

[18] C. LANSKI: *The group of units of a simple ring,* I & II. J. of Algebra *15* (1970) 554–569 & *16* (1970) 108–128.

[19] M. H. MARTIN: *On infinite orthogonal matrices.* Am. J. Math.*54* (1932) 579–631.

[20] R. S. PALAIS: *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem.* Princeton Univ. Press 1965.

[21] C. R. PUTNAM et A. WINTNER: *The orthogonal group in Hilbert space.* Am. J. Math. *74* (1952) 52–78.

[22] A. ROSENBERG: *The structure of the infinite linear groups.* Ann. of Math. *68* (1958) 278–294.

[23] R. SCHATTEN: *Norm ideals of completely continuous operators.* Springer 1960.

[24] I. STEWART: *Finite rings with a specified group of units.* Math. Z. *126* (1972) 51–58 & *128* (1972) 187.

[25] M. H. STONE: *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis.* Amer. Math. Soc. Colloquium Pub., *15* (1932)

Institut de Mathématiques
Université de Lausanne
1015 *Dorigny-Lausanne*
(*Suisse*).

Reçu. le 7 Mai 1975