

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 50 (1975)

Artikel: h-Cobordismes entre variétés homéomorphes.
Autor: Hausmann, Jean-Claude
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-38787>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.05.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

***h*-Cobordismes entre variétés homéomorphes**

JEAN-CLAUDE HAUSMANN

Soit M^m une variété semi-linéaire (PL) de dimension m . Soit $G(M)$ le sous-ensemble de $\text{Wh}(\pi_1(M))$ (où Wh désigne le foncteur «groupe de Whitehead» [5]) formé des torsions τ telles que si (W, M, M') est un h -cobordisme entre M et M' de torsion τ on ait M' PL-homéomorphe à M . Remarquons qu'avec cette définition il n'y a pas lieu de s'attendre à ce que $G(M)$ soit un sous-groupe de $\text{Wh}(\pi_1(M))$, à cause des problèmes d'identification de groupes fondamentaux.

Soit K un polyèdre de dimension k . Choisissons un plongement semi-linéaire $i: K \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$ et un voisinage régulier de $i(K)$ que nous dénoterons par $E^{2k+1}(K)$. On définit par récurrence: $E^n(K) = E^{n-1}(K) \times [0, 1]$ pour $n \geq 2k + 2$.

Dans cet article, on trouvera quelques considérations sur $G(M)$ lorsque M est $\text{Bd}(E^n(K))$ ou $E^n(K)$, $n \geq 2 \dim K + 2$. Les h -cobordismes de variétés à bord (comme $E^n(K)$) sont supposés être des produits sur le bord.

1. *h*-Cobordismes partant de $\text{Bd}(E^n(K))$

Comme $n \geq 2k + 2$, $E^n(K)$ est de la forme $E^{n-1}(K) \times [0, 1]$. Nous considérerons donc $E^{n-1}(K)$ comme une sous-variété PL de $\text{Bd}E^n(K)$ en l'identifiant avec $E^{n-1}(K) \times \{0\}$. Via ces identifications, nous considérerons toujours la torsion $\tau(W, \text{Bd}E^n(K), V)$ comme appartenant à $\text{Wh}(\pi_1(K))$.

Pour terminer avec ces conventions d'identifications de groupes fondamentaux, indiquons que si $f: K \rightarrow L$ est une équivalence d'homotopie entre deux polyèdres, la torsion $\tau(f)$ sera mesurée dans $\text{Wh}(\pi_1(K))$.

Soit $\varepsilon(K) \subset \text{Wh}(K)$ le sous-ensemble formé des éléments réalisables comme torsion d'une auto-équivalence d'homotopie $f: K \rightarrow K$. En général, il n'y a pas lieu de s'attendre à ce que $\varepsilon(K)$ soit un sous-groupe de $\text{Wh}(\pi_1(K))$.

PROPOSITION 1.1. *Soit K un polyèdre de dimension k et $n \geq 2k + 2$. Alors $\varepsilon(K) \subset G(\text{Bd}E^n(K))$.*

Démonstration. Soit $i: K \rightarrow E^n(K)$ l'inclusion naturelle et soit $f: K \rightarrow K$ une équivalence d'homotopie. $i \circ f$ est homotope à un plongement. Soit V^n un voisinage régulier de $i \circ f(K)$ dans $\text{int}E^n(K)$. Soit $W = [E^n(K) - \text{int}V]$. Il est aisé de voir que $(W, \text{bd}V, \text{Bd}E^n(K))$ est un h -cobordisme (on peut par exemple recopier la démonstration du lemme 7 de [4]).

Comme i et $i \circ f$ sont isotopes dans $R^n \supset E^n(K)$, il en résulte que V est PL-homéomorphe à $E^n(K)$.

Soit $h: E^n(K) \rightarrow V$ un PL-homéomorphisme tel que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccccc}
 K & \xrightarrow{f} & K & & \\
 \searrow i & & \searrow i & & \\
 & & & & E^n \\
 \downarrow i & & & & \uparrow \\
 \text{Bd } E^n(K) & \xrightarrow{h|_{\text{Bd } E^n(K)}} & \text{Bd } V & \xrightarrow{\sigma} & W \subset E^n \\
 \downarrow & & \downarrow v & & \\
 E^n(K) & \xrightarrow{h} & V & \xrightarrow{j} & E^n
 \end{array}$$

Nous obtiendrons le résultat escompté en montrant que

$$\chi \stackrel{\text{déf}}{=} i_*^{-1} (h|_{\text{Bd } E^n(K)})_*^{-1} (\tau(\sigma)) = \tau(f).$$

Ce genre de résultat a déjà été utilisé quelquefois (par exemple [7]) sans démonstration, à ma connaissance. Nous nous permettrons de donner quelques détails car, on a déjà pu s'en apercevoir, les questions d'identifications de groupes fondamentaux ne peuvent malheureusement pas être négligées ici. On a:

$$\chi = i_*^{-1} \circ h_*^{-1} \circ v_* (\tau(\sigma))$$

Les formules de somme des torsions (cf. [0] th. 23.1 ou [6] th. 6.9) donnent:

$$v_* (\tau(\sigma)) = \tau(j)$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \chi &= i_*^{-1} \circ h_*^{-1} (\tau(j)) = \tau(j \circ h \circ i) = \tau(i \circ f) \\
 &= \tau(f) + f_*^{-1} \tau(i) = \tau(f).
 \end{aligned}$$

COROLLAIRE 1.2. *Soit K un polyèdre de dimension 2 avec $\pi_1(K)$ cyclique. Alors, $G(\text{Bd } E^n(K)) = \text{Wh}(\pi_1(K))$ ($n \geq 6$).*

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la proposition 1.1 et du théorème A de [1], affirmant que $\varepsilon(K^2) = \text{Wh}(\pi_1(K^2))$. Remarquons que pour n pair, ce corollaire découle d'un résultat récemment annoncé de T. C. Lawson [3].

Dans [2], M. Kervaire pose la question de savoir si $G(M)$ dépend réellement de M . Nous pouvons maintenant donner la réponse:

COROLLAIRE 1.3. *Il existe deux variétés closes M et N , de même dimension et de groupes fondamentaux isomorphes, et telles que $G(M) \neq G(N)$.*

Démonstration. Soit K un polyèdre de dimension 2 avec $\pi_1(K) \simeq \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$. $\text{Bd } E^8(K)$ et $L(7, 1) \times S^4$ sont tous deux de dimension 7 et ont leur groupe fondamental isomorphe à $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$ (où $L(p, q)$ désigne l'espace lenticulaire de dimension 3 de type (p, q)). D'après le corollaire 1.2, $G(\text{Bd } E^8(K)) \cong \text{Wh}(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})$ tandis que ce n'est pas le cas pour $G(L(7, 1) \times S^4)$ d'après J. Milnor [4] théorème 4.

2. *h*-Cobordismes partant de $E^n(K)$

Soit $d_n: \text{Wh}(\pi_1(K)) \rightarrow \text{Wh}(\pi_1(K))$ l'homomorphisme donné par :

$$d_n(\tau) = \tau + (-1)^{n+1} \bar{\tau}$$

où $\bar{\tau}$ désigne le conjugué de τ (cf. [5], §6).

THEORÈME 2.1. *Si K est un polyèdre et $n \geq 2 \dim K + 2$ on a :*

$$G(E^n(K)) = d_n^{-1}(\varepsilon(K)).$$

On déduit immédiatement de ce théorème les corollaires suivants :

COROLLAIRE 2.2. *$\text{Ker } d_n \subset G(E^n(K))$. Comme $\text{Im } d_{n+1} \subset \text{Ker } d_n$, on retrouve le fait bien connu que le sous-groupe des éléments de la forme $\tau + (-1)^n \bar{\tau}$ est contenu dans $G(M)$.*

COROLLAIRE 2.3. *$G(E^n(K))$ est un sous-groupe de $\text{Wh}(\pi_1(K))$ si et seulement si $R_n(K)$ en est un.*

La démonstration du théorème 2.1 sera décomposée en quelques lemmes.

LEMMA 2.4. *Si M^n est une variété semi-linéaire, on a :*

$$G(M) \subset d_n^{-1}(\varepsilon(M)).$$

Démonstration. Soit (W, M, M') un *h*-cobordisme de torsion $\tau \in G(M)$. Il existera donc un PL-homéomorphisme $h: M' \rightarrow M$. Notons par $i: M \rightarrow W$ et $r: W \rightarrow M'$ les inclusion et rétraction par déformation. La torsion de l'auto-équivalence d'homotopie $h \circ r \circ i: M \rightarrow M$ est égale à $\tau + (-1)^{n+1} \bar{\tau}$ par la formule de dualité ([5], §10). D'où $d_n(\tau) \in \varepsilon(M)$.

LEMME 2.5. *$d_n^{-1}(\varepsilon(K)) \subset G(E^n(K))$, lorsque $n \geq 2 \dim K + 2$.*

Démonstration. Soit $(W, E^n(K), B)$ un *h*-cobordisme de torsion $\sigma \in d_n^{-1}(\varepsilon(K))$. Soient i et r comme dans la démonstration du lemme 2.4. Soit $f: K \rightarrow K$ une auto-équivalence d'homotopie avec $\tau(f) = d_n(\sigma)$, et $\varphi: K \rightarrow K$ un inverse homotopique de f .

Considérons l'équivalence d'homotopie $r \circ i \circ \varphi: K \rightarrow B$. Sa torsion est:

$$\begin{aligned} \tau(r \circ i \circ \varphi) &= \varphi_*^{-1}(\tau(r \circ i)) + \tau(\varphi) = \\ &= \varphi_*^{-1}(\tau(f)) + \tau(\varphi) = \tau(f \circ \varphi) = 0. \end{aligned}$$

D'où B a le type d'homotopie simple de K .

Le fait que B est PL-homéomorphe à $E^n(K)$ se déduit du lemme suivant:

LEMME 2.6. *Une PL-variété F^n ayant le type d'homotopie simple d'un polyèdre de K de dimension k ($n \geq 2k + 2$) est PL-homéomorphe à $E^n(K)$ si et seulement si $\text{Bd } F$ est PL-homéomorphe à $\text{Bd } E^n(K)$.*

Démonstration. Soit $h: \text{Bd } E^n(K) \rightarrow \text{Bd } F$ un PL-homéomorphisme et $\psi: K \rightarrow F$ une équivalence d'homotopie simple. Par position générale, ψ est homotope à un plongement de K dans $h(E^{n-1}(K)) \subset \text{Bd } F$. Soit V un voisinage régulier de $\psi(K)$ dans $\text{Bd } F$. Par le théorème du s -cobordisme, F est homéomorphe à $V \times [0, 1]$.

Le lemme 2.6 sera ainsi démontré lorsque nous aurons établi que V est PL-homéomorphe à $E^{n-1}(K)$. Si $n \geq 2k + 3$, cela résulte du fait que $h^{-1} \cdot \psi$ et i sont isotopes dans $\mathbf{R}^{n-1} \supset E^{n-1}(K)$. Si $n = 2k + 2$, on utilise le résultat suivant:

LEMME 2.7. *Soit K un polyèdre de dimension k et $f_1, f_2: K \rightarrow \mathbf{R}^{2k+1}$ deux plongements semi-linéaires. Si V_1 et V_2 désignent des voisinages réguliers de $f_1(K)$ et $f_2(K)$ respectivement, alors V_1 est PL-homéomorphe à V_2 .*

Démonstration. Considérons f_i comme un plongement dans \mathbf{R}^{2k+2} en plongeant \mathbf{R}^{2k+1} dans \mathbf{R}^{2k+2} de la manière standard. Les voisinages réguliers de $f_i(K)$ dans \mathbf{R}^{2k+2} sont de la forme $V_i \times [0, 1]$. Comme f_1 et f_2 sont isotopes dans \mathbf{R}^{2k+2} , on a un PL-homéomorphisme:

$$g: V_1 \times [0, 1] \rightarrow V_2 \times [0, 1].$$

Par position générale (le bord de $V_2 \times [0, 1]$ étant de dimension $2k + 1$), on peut supposer que $g(V_1 \times \{0\}) \subset V_2 \times \{0\}$. Le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \{0\} & \xrightarrow{g} & g(V_1 \times \{0\}) \subset V_2 \times \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_1 \times [0, 1] & \xrightarrow{g} & V_2 \times [0, 1] \end{array}$$

montre que l'inclusion de $g(V_1 \times \{0\})$ dans $g(V_2 \times \{0\})$ est une équivalence d'homotopie simple. Par le th. 23.1 de [0], $V_2 \times \{0\} - \text{int}(g(V_1 \times \{0\}))$ est un s -cobordisme, d'où on déduit que V_1 est PL-homéomorphe à V_2 .

BIBLIOGRAPHIE

- [0] COHEN, M. M., *A course in simple-homotopy theory*, Springer-Verlag 1973.
- [1] DYER, M. et SIERADSKI, *Tress of homotopy types of two dimensional spaces complexes*, Comment. Math. Helv. 48 (1973), 31–44.
- [2] KERVAIRE, M., *The theorem of Barden-Mazur-Stallings*, Comment. Math. Helv. 40 (1965), 31–42.
- [3] LAWSON, T. C., *Non trivial h-cobordisms between a manifold and itself*, Notices Amer. Math. Soc. 20 (1973), A-191.
- [4] MILNOR, J., *Two complexes wich are homeomorphic but combinatorialy distinct*, Ann. of Math. 74 (1961), 575–590.
- [5] ———, *Whitehead torsion*, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 358–426.
- [6] SIEBENMANN, L. C., *The obstruction to finding a boundary for an open manifold*, Thesis, Princeton (1965).
- [7] STALLINGS, J., *On infinite process leading the differentiability in the complement of a point*, Differential and Combinatorial topology. (Symposium M. Morse) Princeton (1965)

Université de Genève
Section de Mathématiques

Reçu Mars 1974

