

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 50 (1975)

Artikel: Eine Interpolationseigenschaft des Raumes BMO.
Autor: Rychener, Thomas
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-38822>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 04.05.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Eine Interpolationseigenschaft des Raumes BMO

THOMAS RYCHENER

1. Einführung und Ergebnis

Der Raum BMO der Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation spielt in der Theorie der Interpolation eine wichtige Rolle (für die Definition von BMO verweisen wir auf [3]). Wir geben im folgenden mit Hilfe der komplexen Methode der Interpolation (siehe [1]) interpolierende Räume zwischen BMO und den homogenen bzw. inhomogenen Soboleffräumen V_k^p bzw. W_k^p an. Die vorliegende Arbeit geht auf eine Anregung von H. M. Reimann zurück: in [6] wird bewiesen, dass der folgende Zusammenhang zwischen BMO und der Theorie der quasikonformen Abbildungen besteht:

SATZ (Reimann [6]). *Ist q eine quasikonforme Abbildung von R^n auf sich, so ist durch $T(f) = f \circ q^{-1}$ ein Isomorphismus von BMO festgelegt, und es gilt $\|T(f)\|_* \leq C \|f\|_*$ für alle $f \in \text{BMO}$ und eine nur von K und n abhängige Konstante C .*

Bezeichnet V_1^n den Raum der lokal integrierbaren Funktionen f mit $f_{x_j} \in L^n$ ($j=1, 2, \dots, n$) und $\|f\|_{V_1^n} = \sum_j \|f_{x_j}\|_n$, so gilt ein entsprechendes Resultat auch für V_1^n (siehe [11]), und es stellt sich die Frage, ob zwischen V_1^n und BMO interpoliert werden kann. Die Antwort auf diese Frage gibt der in Abschnitt 1.4 formulierte Satz, wonach die Räume V_t^p das Interpolationsproblem lösen. Ein entsprechendes Resultat gilt auch für die Soboleffräume W_k^p und BMO.

Ergebnisse dieses Typs sind für BMO bekannt. Wir führen hier zwei wichtige Beispiele an, in denen BMO als Grenzraum der Lipschitzräume $\text{Lip}(t)$ für $t \rightarrow 0$ und der L^p -Räume für $p \rightarrow \infty$ auftritt.

(1) (Stampacchia [7]). Seien $p_1, p_2 \geq 1, 0 < \theta < 1$. Ist T ein auf der Menge E der einfachen Funktionen definierter Operator mit

$$\|T(e)\|_* \leq A_1 \|e\|_{p_1}, \quad \|T(e)\|_{\text{Lip}(t)} \leq A_2 \|e\|_{p_2}$$

für alle $e \in E$, so folgt $T(e) \in \text{Lip}(s)$, und es gilt

$$\|T(e)\|_{\text{Lip}(s)} \leq CA_1^{1-\theta} A_2^\theta \|e\|_p$$

mit $p^{-1} = (1-\theta)/p_1 + \theta/p_2$ und $s = \theta t$.

(2) (Fefferman und Stein [3]). Es bezeichne $[\]_{\theta}$ die komplexe Methode der Interpolation. Dann gilt für $1 < p < \infty$, $0 < \theta < 1$ und $q^{-1} = \theta/p$

$$[L^p, \text{BMO}]_{\theta} = L^q.$$

Zunächst beschreiben wir das Analytizitätsverhalten des Riesz-Potentials von Funktionen eines Testraumes \mathcal{S}_0 (siehe 1.1). Zu diesem Zweck muss der Rieszkernel $|x|^{-n+t}$ in geeigneter Weise analytisch fortgesetzt werden. Weiter konstruieren wir in 1.2. Approximationen der Einheit aus \mathcal{S}_0 . In 1.4 führen wir die Räume V_t^p und W_t^p ein und formulieren das Ergebnis der Interpolation zwischen BMO und den Soboleffräumen, in dem wir in natürlicher Weise auf gewisse Räume von Potentialen bezüglich des Riesz- und des Besselkerns stossen (die Räume V_t^p, W_k^p). Der Beweis stützt sich auf die in [3] verwendeten Methoden.

1.1. Riesz-Potentiale von \mathcal{S}_0 -Distributionen

Wir betrachten stets auf R^n definierte komplexwertige Funktionen. Für $x, y \in R^n$ bezeichne $\langle x, y \rangle$ das Skalarprodukt. Ist $f \in L^1$, so ist die Fouriertransformierte von f gegeben durch

$$\hat{f}(x) = \int_{R^n} f(y) e^{-2\pi i \langle x, y \rangle} dy.$$

Im übrigen halten wir uns an die Bezeichnungen in [8]. Der eingangs erwähnte Testraum \mathcal{S}_0 besteht aus allen ϕ mit $\hat{\phi} \in \mathcal{D}$ und $0 \notin \text{supp } \hat{\phi}$. Für $1 < p < \infty$ ist \mathcal{S}_0 dicht in L^p bezüglich der L^p -Norm. Ausserdem ist \mathcal{S}_0 dicht in H^1 bezüglich der H^1 -Norm (siehe [8], S. 231). Unter einer \mathcal{S}_0 -Distribution verstehen wir eine stetige Linearform auf \mathcal{S}_0 .

DEFINITION. Für $z \in C$ ist das Riesz-Potential $I_z \phi$ einer Funktion $\phi \in \mathcal{S}_0$ definiert durch

$$\widehat{I_z \phi}(x) = (2\pi |x|)^{-z} \hat{\phi}(x)$$

und das Riesz-Potential einer \mathcal{S}_0 -Distribution f gemäss

$$\langle I_z f, \phi \rangle = \langle f, I_z \phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}_0.$$

Das Bessel-Potential $J_z \phi$ einer Funktion $\phi \in \mathcal{S}$ ist durch

$$\widehat{J_z \phi}(x) = (1 + 4\pi^2 |x|^2)^{-z/2} \hat{\phi}(x)$$

festgelegt und dementsprechend das Bessel-Potential einer temperierten Distribution f durch

$$\langle J_z f, \varphi \rangle = \langle f, J_z \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Für $I_z \varphi$, $\varphi \in \mathcal{S}_0$, lässt sich eine Integraldarstellung angeben (desgleichen für $J_z \varphi$, $\varphi \in \mathcal{S}$). Dazu sei für beliebiges $t > 0$ $\varphi(x, t) = P_t * \varphi(x)$, wobei $P_t(x)$ der Poissonkern für den oberen Halbraum $R_+^{n+1} = \{(x, t) : x \in R^n, t > 0\}$ ist.

LEMMA. Seien $z \in C$ und $\varphi \in \mathcal{S}_0$. Dann gilt für ganzes $k \geq 0$ mit $k + \operatorname{Re}(z) > 0$ und

$$D_k = \left(\sum_{j=1}^n R_j D_{x_j} \right)^k;$$

$$I_z \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(k+z)} \int_0^\infty t^{-1+(k+z)} D_k \varphi(x, t) dt,$$

wobei R_j die Riesztransformationen bezeichnen, die durch

$$R_j \varphi(x) = i \frac{x_j}{|x|} \hat{\varphi}(x), \quad \varphi \in \mathcal{S}_0$$

definiert sind.

Beweis. Zur Vereinfachung sei $\operatorname{Re}(z) > -1$, also $k = 1$. Für den allgemeinen Fall geht der Beweis analog. Wegen

$$(R_j D_{x_j} \varphi)^\wedge(x) = 2\pi x_j^2 |x| \hat{\varphi}(x)$$

und der absoluten Konvergenz sämtlicher zur Diskussion stehenden Integrale folgt, dass die Fouriertransformierte der rechten Seite mit dem Ausdruck

$$\Gamma(1+z)^{-1} \int_0^\infty t^z 2\pi \sum_{j=1}^n x_j^2 |x|^{-1} \hat{\varphi}(x) e^{-2\pi |x| t} dt$$

übereinstimmt. Also erhalten wir dafür

$$2\pi \Gamma(1+z) |x| \hat{\varphi}(x) \int_0^\infty t^z e^{-2\pi |x| t} dt = (2\pi |x|)^{-z} \hat{\varphi}(x),$$

woraus die Behauptung folgt.

Bemerkung. Für $J_z\varphi$, $\varphi \in \mathcal{S}$, gibt es eine analoge Darstellung (siehe [4]); ist nämlich $\varphi(x, t) = W_{t^*}\varphi(x)$ das Gauss-Weierstrassintegral von φ , so gilt für ganzes $k \geq 0$ mit $k + \frac{1}{2}\operatorname{Re}(z) > 0$:

$$J_z\varphi(x) = \Gamma(k + z/2)^{-1} \int_0^\infty t^{-1+(k+z/2)} e^{-t} J_{-k}\varphi(x, t) dt.$$

Aus der im Satz gegebenen Darstellung von $I_z\varphi$ folgt, dass bei festem $\varphi \in \mathcal{S}_0$ die Familie $\{I_z\varphi: z \in \mathbb{C}\}$ bezüglich L^1 analytisch ist. Dazu genügt es, die Analytizität von $\langle I_z\varphi, \psi \rangle$ für jedes $\psi \in L^\infty$ nachzuweisen. Offenbar gilt

$$\langle I_z\varphi, \psi \rangle = \frac{1}{\Gamma(k+z)} \int_0^\infty t^{-1+(k+z)} \langle D_k\varphi(\cdot, t), \psi \rangle dt,$$

denn die Vertauschung der Integrationen folgt wegen der guten Qualität von φ (siehe [8], S. 225). Die behauptete Analytizität ergibt sich nun durch Differentiation unter dem Integral.

1.2. Approximationen der Einheit aus \mathcal{S}_0

Es wird eine Schar $\{\varphi_y: y > 0\}$ von Funktionen φ_y aus \mathcal{S}_0 konstruiert, sodass für alle $f \in L^p$ ($1 < p < \infty$) gilt:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \|f * \varphi_y - f\|_p = 0.$$

Hierzu sei $\psi \in \mathcal{S}$ so gewählt, dass $\hat{\psi} \in \mathcal{D}$, etwa

$$\hat{\psi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \geq 2\varrho, \\ 1 & \text{für } |x| \leq \varrho. \end{cases} \quad \varrho > 0$$

Daraus folgt insbesondere $\int \psi(x) dx = 1$. Der Ansatz führt zum Ziel:

$$\varphi_y(x) = y^{-n}\psi(y^{-1}x) - y^n\psi(yx).$$

Zunächst ist $\varphi_y \in \mathcal{S}_0$ für alle $y > 0$. Ist nämlich $|x| < \min(y^{-1}\varrho, y\varrho)$, so wird $\hat{\varphi}_y(x) = \hat{\psi}(yx) - \hat{\psi}(y^{-1}x) = 0$.

Zum Beweis der Approximationseigenschaft können wir $f \in \mathcal{S}_0$ annehmen. Sei daher $\hat{f}(x) = 0$ für $0 < |x| < \sigma$ und $1/\sigma < |x|$. (Ein solches $\sigma > 0$ existiert wegen $0 \notin \operatorname{supp} \hat{f}$). Jetzt gilt:

$$(\psi_y * f)^\wedge(x) = \hat{\psi}(yx) \hat{f}(x) = 0,$$

sofern $|x| < \sigma$ oder $y|x| > 2\varrho$ ist. Für $y > 2\varrho/\sigma$ folgt daher $\psi_y * f = 0$, und somit ist

$$\|\varphi_y * f - f\|_p \leq \|\psi_y * f - f\|_p + \|\psi_{1/y} * f\|_p = \|\psi_y * f - f\|_p \quad \text{für alle } y < 2\varrho/\sigma.$$

Wegen $\int \psi_y(x) dx = 1$ ergibt sich hieraus die Behauptung (siehe [8], S. 62, 63).

1.3

Wir erinnern an einige Ergebnisse aus der Theorie der H^p -Räume (siehe [3], S. 183).

Ist $f \in H^1$ und $\psi \in \mathcal{S}$ mit $\int \psi(x) dx = 1$, so gehört $\sup_{y>0} |\psi_y * f|$ zu L^1 , und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{y>0} |\psi_y * f| dx \leq A \|f\|_{H^1}.$$

Sei f lokal integrierbar, und Q_x bezeichne einen achsenparallelen offenen Würfel mit $x \in Q_x$. Wir definieren

$$Mf(x) = \sup_{Q_x} \frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} |f(y)| dy,$$

$$\tilde{f}(x) = \sup_{Q_x} \frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} |f(y) - f_{Q_x}| dy, \quad \text{wo } f_{Q_x} = \frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} f(y) dy,$$

(siehe [2], S. 153). Wir benötigen den folgenden Satz:

SATZ (Fefferman und Stein). *Es sei $f \in L^r$ für ein $1 \leq r < \infty$ und $\tilde{f} \in L^p$ mit $1 < p < \infty$ und $1 \leq r \leq p$. Dann ist $Mf \in L^p$, und es gilt*

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|\tilde{f}\|_p.$$

Bemerkung. Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf das Zerlegungslemma von Calderón und Zygmund, siehe dazu [8], S. 17. Offenbar ist $f \in \text{BMO}$ genau dann, wenn $\tilde{f} \in L^\infty$. Diese Tatsache zusammen mit dem obigen Satz erweisen sich als äußerst nützlich für die Interpolation. Aus der bekannten Abschätzung $\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p$ und dem obigen Satz erhalten wir insbesondere die Äquivalenz von $\|f\|_p$ und $\|\tilde{f}\|_p$.

1.4

Die Räume V_t^p $1 < p < \infty$, $-\infty < t < \infty$.

DEFINITION. V_t^p ist der Raum der \mathcal{S}_0 -Distributionen f mit $f = I_t g$, $g \in L^p$. Mit der Norm $\|f\|_{V_t^p} = \|g\|_p$ ist V_t^p vollständig. Lässt sich $I_t g$ insbesondere mit einer

L^q -integrierbaren Funktion h identifizieren, so setzen wir $I_t g = h$. Analog dazu ist $W_t^p = J_t(L^p)$ als Raum der temperierten Distributionen f definiert mit $f = J_t g$, $g \in L^p$ und $\|f\|_{W_t^p} = \|g\|_p$.

Bemerkung. Für ganzes $k > 0$ fällt W_k^p mit dem entsprechenden Soboleffraum zusammen (siehe [8], S. 135); es ist ferner leicht zu zeigen, dass V_k^p mit dem Raum der \mathcal{S}_0 -Distributionen zusammenfällt, deren Ableitungen k -ter Ordnung zu L^p gehören, und es ist

$$\|\cdot\|_{V_k^p} = \sum_{|j|=k} \|D^j \cdot\|_p.$$

SATZ. Der Dualraum von V_t^p ($1 < p < \infty$, $t \in \mathbb{R}$) lässt sich mit $V_{-t}^{p'}$ identifizieren, wobei p' der zu p konjugierte Index ist. Analog ist $W_{-t}^{p'}$ der Dualraum von W_t^p (siehe [2]).

Beweis. Sei $d \in V_{-t}^{p'}$ und $\psi = I_t \varphi$ mit $\varphi \in \mathcal{S}_0$. Dann gilt:

$$|\langle d, \psi \rangle| = |\langle d, I_t \varphi \rangle| = |\langle I_t d, \varphi \rangle| \leq \|I_t d\|_{p'} \|\varphi\|_p = \|d\|_{V_{p'}^{-t}} \|\psi\|_{V_t^p}.$$

d induziert also eine beschränkte Linearform auf V_t^p , denn \mathcal{S}_0 ist dicht in V_t^p . Ist umgekehrt d eine beschränkte Linearform auf V_t^p , so folgt aus $\psi = I_t \varphi$, $\varphi \in \mathcal{S}_0$:

$$|d(\psi)| = |d(I_t \varphi)| \leq A \|\varphi\|_{p'}$$

und d erzeugt daher eine beschränkte Linearform auf L^p , also existiert genau ein $g \in L^{p'}$ mit

$$d(\psi) = d(I_t \varphi) = \langle g, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}_0.$$

Wegen $\varphi = I_{-t} \psi$ folgt somit $d(\psi) = \langle I_{-t} g, \psi \rangle$.

Zwischen den Soboleffräumen und BMO besteht der folgende, von Stein und Zygmund in [10] bewiesene Zusammenhang: für $0 < \theta < 1$ ist nämlich $V_\theta^{n/\theta} \subset \text{BMO}$ und $W_\theta^{n/\theta} \subset \text{BMO}$. Diese Tatsache legt die Vermutung nahe, dass BMO in natürlicher Weise Grenzraum von V_t^p und W_t^p für $p \rightarrow \infty$ und $t \rightarrow 0$ ist. Es gilt der

SATZ. Es sei $[\]_\theta$ die komplexe Methode der Interpolation (siehe [1], S. 113 ff). Dann gilt für $0 < \theta < 1$, $1 < p < \infty$ und $q\theta = p$, $k\theta = t$:

$$[\text{BMO}, V_k^p]_\theta = V_t^q, \quad [\text{BMO}, W_k^p]_\theta = W_t^q.$$

Im folgenden geben wir den Beweis für den Fall der homogenen Soboleffräume V_k^p , denn für W_k^p verläuft er vollständig analog (mit \mathcal{S}' an Stelle von \mathcal{S}'_0 und J_z). Weiter setzen wir $k=1$ und $p=n$, was den Beweis technisch vereinfacht. Der Beweis des allgemeinen Falles verläuft analog.

2. Beweis

Im folgenden sei $[B_0, B_1]_\theta, [B_0, B_1]^\theta$ die komplexe Methode der Interpolation. Mit F bezeichnen wir stets eine auf $D = \{z \in C: 0 \leq \text{Re}(z) \leq 1\}$ definierte Funktion mit Werten in $B_0 + B_1$, die in D bezüglich $\|\cdot\|_{B_0 + B_1}$ stetig und in D^0 analytisch sei. Ausserdem ist F für $\text{Re}(z)=0$ B_0 -wertig und stetig bezüglich $\|\cdot\|_{B_0}$, und es gelte dort $\|F(iv)\|_{B_0} \rightarrow 0$ für $|v| \rightarrow \infty$. Analoge Bedingungen sollen für $\text{Re}(z)=1$ bezüglich B_1 gelten (siehe [1], S. 113 ff). Ist B_0 oder B_1 reflexiv, so auch $[B_0, B_1]_\theta$ und $[B_0, B_1]^\theta = [B_0, B_1]^\theta$ (siehe [1], 9.5., 12.2.).

HILFSSATZ 1. Für $n \geq 1$ und $0 < \theta < 1$ gilt

$$[BMO, V_1^n]_\theta \subset V_\theta^p, \quad \theta p = n.$$

Beweis. Seien $B_0 = BMO, B_1 = V_1^n$ und $F: D \rightarrow BMO$ eine Funktion mit den oben aufgeführten Eigenschaften. Wir setzen für festes $f \in V_1^n: \mathcal{F}_\theta = \{F: F(\theta) = f\}$, ferner

$$\|F\|_{\mathcal{F}_\theta} = \max \left(\sup_{v \in R} \|F(iv)\|_*, \sup_{v \in R} \|F(1+iv)\|_{V_1^n} \right)$$

$$\|f\|_{\mathcal{F}_\theta} = \inf \{ \|F\|_{\mathcal{F}_\theta} : F \in \mathcal{F}_\theta \}.$$

Beachte, dass aus $V_1^n \subset BMO$ folgt $B_0 \oplus B_1 \cong BMO$. Es sei $\{\varphi_\delta: \delta > 0\}$ eine unter 1.2 beschriebene Schar von Funktionen aus \mathcal{S}_0 , und für $z \in D$ setzen wir $S_\delta(z, x) = I_{-z} \varphi_\delta * F(z, x)$, wobei sich die Faltung auf x bezieht; weiter werden wir des öfteren die Angabe von x unterdrücken. Ist $e: R^n \times R^n \rightarrow C$ eine messbare Funktion mit $|e| = 1$, so sei (immer für festes $\delta > 0$)

$$U_\delta(z, x) = \frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} (S_\delta(z, t) - S_\delta(z)_{Q_x}) e(x, t) dt.$$

Schliesslich sei für $z \in D$

$$\Phi_\delta(z) = \int_{R^n} U_\delta(z) g(z) dz,$$

wobei $g(z, x)$ wie folgt konstruiert wird: $g(x)$ sei eine einfache Funktion mit $\|g\|_{n/n-\theta} = 1$. Ist etwa $g = |g| e^{is}$, so setzen wir für $z = u + iv$

$$g(z) = |g|^{(n-z)/(n-\theta)} e^{is},$$

also ist $\|g(iv)\|_1 = \|g(\theta)\|_{n/n-\theta} = \|g\|_{n/n-\theta} = \|g(1+iv)\|_{n/n-1} = 1$. Wir zeigen nun, dass

Φ_δ von zulässigem Wachstum ist. Zunächst ist

$$|\Phi_\delta(z)| \leq \|U_\delta(z)\|_\infty \|g(z)\|_1 \leq \|\sup_{Q_{x,e}} U_\delta(z)\|_\infty \|g(z)\|_1 \leq \|S_\delta(z)\|_* \|g(z)\|_1.$$

Da weiter $(2\pi|x|)^{iv}$ für $v \in \mathbb{R}$ ein H^1 -Multiplikator mit Norm $\leq A(1+|v|)^{n+1}$ ist (siehe [3], S. 150), folgt aus $z = u + iv$ und $I_z = I_{iv} * I_u$:

$$\begin{aligned} \|S_\delta(z)\|_* &= \|I_{-z}\varphi_\delta * F(z)\|_* \leq \|I_{-z}\varphi_\delta\|_{H^1} \|F(z)\|_* = \|I_{-iv}(I_{-u}\varphi_\delta)\|_{H^1} \|F(z)\|_* \\ &\leq A(1+|v|)^{n+1} \|I_{-u}\varphi_\delta\|_{H^1} \|F(z)\|_*. \end{aligned}$$

Aus der Analytizität von $\{I_z\varphi_\delta : z \in \mathbb{C}\}$ bezüglich L^1 folgt sofort diejenige bezüglich H^1 (siehe 1.1), insbesondere existiert also $\sup_{0 \leq u \leq 1} \|I_{-u}\varphi_\delta\|_{H^1}$, und es ist mit einer von g und φ_δ abhängigen Konstanten $A_{\varphi_\delta, g}$

$$|\Phi_\delta(z)| \leq A_{\varphi_\delta, g} (1+|v|)^{n+1} \|F(z)\|_*.$$

Die Abhängigkeit der Schranke von φ_δ verschwindet für $z = iv$ und $z = 1 + iv$; sei zunächst $z = iv$. Dann ist:

$$|\Phi_\delta(z)| \leq \|U_\delta(iv)\|_\infty \|g(iv)\|_1 \leq \|S_\delta(iv)\|_* = \|I_{-iv}\varphi_\delta * F(iv)\|_*.$$

Auf Grund der Dualität zwischen H^1 und BMO folgt, dass $(2\pi|x|)^{iv}$ für beliebiges $v \in \mathbb{R}$ BMO-Multiplikator mit Norm $\leq A(1+|v|)^{n+1}$ ist, und wie oben erhält man:

$$\|S_\delta(iv)\|_* \leq A(1+|v|)^{n+1} \|\varphi_\delta * F(iv)\|_*.$$

Wegen $\|\varphi_\delta\|_1 \leq 2\|\psi\|_1$ gilt mit einer nur von $\|\psi\|_1$ abhängigen Konstanten A_ψ :

$$|\Phi_\delta(iv)| \leq A_\psi (1+|v|)^{n+1} \sup_{v \in \mathbb{R}} \|F(iv)\|_*.$$

Es sei jetzt $z = 1 + iv$:

$$\begin{aligned} |\Phi_\delta(1+iv)| &\leq \|U_\delta(1+iv)\|_n \|g(1+iv)\|_{n/n-1} \leq \|\sup_{Q_{x,e}, |e|=1} U_\delta(1+iv)\|_n = \\ &= \|\mathcal{S}_\delta(1+iv)\|_n \quad (\text{siehe 1.3}). \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit einer nur von n abhängigen Konstanten A (im allgemeinen Fall $1 < p < \infty$ ist A auch von p abhängig, hier haben wir zur Vereinfachung $k = 1$ und $p = n$ gesetzt):

$$\|\mathcal{S}_\delta(1+iv)\|_n \leq 2 \|MS_\delta(1+iv)\|_n \leq A \|S_\delta(1+iv)\|_n,$$

und daher wegen $I_{-z}\varphi_\delta * F(1+iv) = I_{-iv}\varphi_\delta * I_{-1}F(1+iv)$:

$$|\Phi_\delta(1+iv)| \leq A \|I_{-iv}\varphi_\delta * I_{-1}F(1+iv)\|_n.$$

$(2\pi|x|)^{iv}$ ist L^p -Multiplikator für $1 < p < \infty$ mit Norm $\leq A(1+|v|)^{n+1}$, und es wird mit einer nur von $\|\psi\|_1$ abhängigen Konstanten A_ψ :

$$|\Phi_\delta(1+iv)| \leq A_\psi (1+|v|)^{n+1} \sup_{v \in \mathbb{R}} \|F(1+iv)\|_{V_1^n}.$$

Die Regularitätseigenschaften von Φ_δ folgen unmittelbar aus der Analytizität von $\{I_z\varphi : z \in \mathbb{C}\}$ und $g(\cdot, z)$ (siehe 1.1), und damit sind sämtliche Voraussetzungen für das verallgemeinerte Drei-Linien-Lemma erfüllt (siehe [12], S. 100, Bd. 2). Setzen wir $s_1 = \sup_{v \in \mathbb{R}} \|F(iv)\|_*$ und $s_2 = \sup_{v \in \mathbb{R}} \|F(1+iv)\|_{V_1^n}$, so folgt:

$$|\Phi_\delta(\theta)| \leq A_{\theta, \psi} \max(s_1, s_2) = A_{\theta, \psi} \|F\|_{\mathcal{F}_\theta}.$$

Diese Abschätzung hängt von ψ ab, genauer von $\|\psi\|_1$. Dies ist aber unwesentlich, da ψ fest vorgegeben ist. Wegen $\sup\{|\Phi_\delta(\theta)| : \|g\|_{n/n-\theta} = 1, g \text{ einfach}\} = \|U_\delta(\theta)\|_{n/\theta}$ und der Unabhängigkeit der Konstanten $A_{\theta, \psi}$ von e und Q_x folgt

$$\|\mathcal{S}_\delta(\theta)\|_{n/\theta} \leq A_{\theta, \psi} \|F\|_{\mathcal{F}_\theta}$$

und auf Grund des Satzes in 1.3.

$$\|\mathcal{S}_\delta(\theta)\|_{n/\theta} \geq A \|\mathcal{S}_\delta(\theta)\|_{n/\theta} = A \|I_{-\theta}\varphi_\delta * F(\theta)\|_{n/\theta} = A \|\varphi_\delta * I_{-\theta}f\|_{n/\theta}.$$

Man beachte, dass aus $f \in V_1^n$ folgt: $f = I_1g, g \in L^n$, und dass daher die \mathcal{S}_0 -Distribution $I_{-\theta}\varphi_\delta * f = \varphi_\delta * I_{-\theta}f$ mit der Funktion $\varphi_\delta * I_{1-\theta}g$ identifiziert wird (siehe die Definition der V_t^p -Räume in 1.4). Da $A_{\theta, \psi}$ von δ nicht abhängt, erhält man aus 1.2 die Abschätzung

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\varphi_\delta * I_{-\theta}f\|_{n/\theta} = \|I_{-\theta}f\|_{n/\theta} \leq A_{\theta, \psi} \|F\|_{\mathcal{F}_\theta}$$

mit einer nur von θ und $\|\psi\|_1$ abhängigen Konstanten $A_{\theta, \psi}$, also

$$\|f\|_{V_{\theta,p}} \leq A_{\theta, \psi} \inf_{F \in \mathcal{F}_\theta} \|F\|_{\mathcal{F}_\theta} = A_{\theta, \psi} \|f\|_{\mathcal{F}_\theta}.$$

HILFSSATZ 2. Seien $n > 1, 0 < \theta < 1$ und n' der zu n konjugierte Index. Dann gilt für $q^{-1} = 1 - \theta + \theta/n'$

$$[V_{-1}^{n'}, H^1]_\theta \subset V_\theta^q.$$

Beweis. Es ist $I_1(H^1) \subset L^{n'}$ (siehe [9], S. 60), also $H^1 \subset V_{-1}^{n'}$. F sei eine Funktion von D in $V_{-1}^{n'}$ mit den üblichen Eigenschaften und $B_0 = H^1$. Für festes $f \in H^1$ und $\mathcal{F}_\theta = \{F : F(\theta) = f\}$ wählen wir nach dem Muster von 1.2 wieder eine Approximation

der Einheit aus \mathcal{S}_0 und setzen bei festem $\delta > 0$

$$T_\delta(z, x) = I_z \varphi_\delta * F(z, x);$$

$T_\delta(z)$ lässt sich mit einer $L^{n'}$ -integrierbaren Funktion identifizieren, denn es ist mit $F(z) = I_{-1} G(z)$, $G(z) \in L^{n'}$ und $\varphi \in \mathcal{S}_0$:

$$\langle T_\delta(z), \varphi \rangle = \langle I_z \varphi_\delta * I_{-1} G(z), \varphi \rangle = \langle I_{-1+z} \varphi_\delta * G(z), \varphi \rangle.$$

Es sei weiter g eine einfache Funktion mit $\|g\|_{n/\theta} = 1$ und für $z \in \mathbb{C}$, $g(z, x) = |g|^{z/\theta} e^{is}$, wenn $g = |g| e^{is}$ gesetzt wird. Es ist dann $\|g(iv)\|_\infty = \|g(\theta)\|_{n/\theta} = \|g\|_{n/\theta} = \|g(1+iv)\|_n = 1$. Setzen wir für $\delta > 0$ $g_\delta(z, x) = \varphi_\delta * g(z, x)$ und

$$\Phi_\delta(z) = \int_{\mathbb{R}^n} T_\delta(z, x) g_\delta(z, x) dx,$$

so folgt aus der Analytizität von $I_z \varphi_\delta$ und F diejenige von $\Phi_\delta(z)$; ebenso erhält man die Stetigkeit von $\Phi_\delta(z)$ in 1.4. Man zeigt weiter, dass

$$|\Phi_\delta(z)| \leq A_{\varphi_\delta, g} (1 + |v|)^{n+1} \|F(z)\|_{V^{n'-1}}$$

und $\Phi_\delta(z)$ somit von zulässigem Wachstum ist. Zur Abschätzung der Randwerte von $\Phi_\delta(z)$ verwenden wir die in 1.3 aufgeführte Charakterisierung von H^1 . Zunächst gilt:

$$\sup_{\delta > 0} |T_\delta(iv, x)| = \sup_{\delta > 0} |\varphi_\delta * I_{iv} F(iv, x)| \leq 2 \sup_{\delta > 0} |\psi_\delta * I_{iv} F(iv, x)|,$$

also

$$|\Phi_\delta(iv)| \leq \|T_\delta(iv)\|_1 \|g_\delta(iv)\|_\infty \leq \sup_{\delta > 0} \|T_\delta(iv)\|_1 \|\varphi_\delta * g(iv)\|_\infty,$$

das heisst

$$|\Phi_\delta(iv)| \leq A_\psi \|I_{iv} \varphi_\delta * F(iv)\|_{H^1},$$

wobei A_ψ nur von $\|\psi\|_1$ abhängt. Insgesamt erhalten wir

$$|\Phi_\delta(iv)| \leq A_\psi (1 + |v|)^{n+1} \|F(iv)\|_{H^1}.$$

wobei A_ψ nicht von $\delta > 0$ abhängt. Analog gilt für $z = 1 + iv$

$$|\Phi_\delta(1 + iv)| \leq A_\psi (1 + |v|)^{n+1} \|F(1 + iv)\|_{V_{-1}^n},$$

und es folgt $|\Phi_\delta(\theta)| \leq A_{\theta, \psi} \|F\|_{\mathcal{F}_\theta}$ mit einer von δ unabhängigen Konstanten $A_{\theta, \psi}$. Wie

im Beweis von Hilfssatz 1 ergibt sich hieraus

$$\|\varphi_{2\delta} * I_{\theta} F(\theta)\|_{n/n-\theta} \leq A_{\theta, \psi} \|F\|_{\mathcal{F}_{\theta}}$$

für alle F mit $F(\theta) = f$, und durch Grenzübergang $\delta \rightarrow 0$

$$\|f\|_{V_{q-\theta}} \leq A_{\theta, \psi} \|f\|_{\mathcal{F}_{\theta}}.$$

Aus Hilfssatz 2 folgt unter Berücksichtigung von 1.4 durch Übergang zum Dualraum $[V_{-1}^n, H^1]_{\theta'} = [V_1^n, \text{BMO}]^{\theta} \supset V_{\theta}^p$ und hieraus wegen der Reflexivität von V_1^n für $n \geq 2$ und Hilfssatz 1 die Beziehung $[V_1^n, \text{BMO}]_{\theta} = V^p$, w.z.b.w.

Bemerkung. Dem soeben bewiesenen Satz entnehmen wir die bekannten Resultate (siehe [5]):

Seien $1 < p_1, p_2 < \infty$ und k_1, k_2 positive ganze Zahlen. Dann gilt für $p^{-1} = (1-\theta)/p_1 + \theta/p_2$, $k = (1-\theta)k_1 + \theta k_2$ mit $0 < \theta < 1$

$$[V_{k_1}^{p_1}, V_{k_2}^{p_2}]_{\theta} = V_k^p, \quad [W_{k_1}^{p_1}, W_{k_2}^{p_2}]_{\theta} = W_k^p.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CALDERON, A. P., *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Studia Math. 24 (1964), 113–226.
- [2] —, *Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions*, Proc. Symp. Pure Math., Vol. IV, 1961.
- [3] FEFFERMAN, Ch. und STEIN, E. M., *H^p spaces of several variables*, Acta Math. 129 (1972), 137–193.
- [4] FLETT, T. M., *Temperatures, Bessel potentials and Lipschitz spaces*, Proc. London Math. Soc. 22 (1971), 385–451.
- [5] PEETRE, J., *Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff*, Ann. Inst. Fourier 16 (1966), 279–317.
- [6] REIMANN, H. M., *Functions of bounded mean oscillation and quasiconformal mappings*, Comment. Math. Helv. 49 (1974), 260–276.
- [7] STAMPACCHIA, G., *The $\mathcal{L}^{(p, \lambda)}$ spaces and applications to the theory of partial differential equations*, Acta Fac. Rerum Nat. comenianae Math. 27 (1967), Proc. of the conference held in Bratislava 1966.
- [8] STEIN, E. M., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton 1970.
- [9] STEIN, E. M. und WEISS, G., *On the theory of harmonic functions of several variables I*, Acta Math. 103 (1960), 25–62.
- [10] STEIN, E. M. und ZYGMUND, A., *Boundedness of translationinvariant operators on Hölder- and L^p spaces*, Ann. of Math. 85 (1967), 337–349.
- [11] ZIEMER, W. P., *Change of variables for absolutely continuous functions*, Duke Math. J. 36 (1969), 171–178.
- [12] ZYGMUND, A., *Trigonometric Series*, Band II, Cambridge 1968.

Mathematisches Institut der Universität Bern,
Sidlerstr. 5, 3000 Bern

Eingegangen den 14. Februar 1975

