

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 50 (1975)

**Artikel:** Sur les exposants de Lojasiewicz.  
**Autor:** Bochnak, J. / Risler, J.J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-38821>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.05.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Sur les exposants de Łojasiewicz

J. BOCHNAK ET J. J. RISLER

### Résumé

Dans une première partie, on démontre les inégalités de Łojasiewicz à l'aide de la théorie des ensembles sous-analytiques de Hironaka, et on montre que les exposants de Łojasiewicz sont toujours rationnels (théorème 1).

Dans une deuxième partie, on étudie sous quelles conditions l'exposant de Łojasiewicz réel est égal à l'exposant complexe.

### 0. Introduction

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions analytiques réelles (resp. sous-analytiques, resp. analytiques complexes) sur un espace  $X$ . Si  $g^{-1}(0) \subset f^{-1}(0)$ , on définit l'exposant de Łojasiewicz de  $f$  par rapport à  $g$  en  $x$  comme la borne inférieure des nombres réels  $\theta$  tels que l'on ait:  $|f|^\theta \leq C|g|$  (où  $C$  est une constante) au voisinage de  $x$ .

Monique Lejeune et Bernard Teissier ont récemment interprété algébriquement cet exposant dans le cas analytique complexe  $[L-T]$  et montré qu'il était toujours rationnel.

La première partie de ce travail montre un résultat analogue dans le cas réel (où cette fois, il suffit de supposer  $f$  et  $g$  sous-analytiques, ce qui permet de montrer toutes les inégalités de Łojasiewicz  $[L]$ ).

La seconde partie répond à une question qui nous avait été formulée par Bernard Teissier: dans le cas analytique réel, l'exposant de Łojasiewicz est-il le même si on le calcule en complexifiant la situation? La proposition 3 donne, dans le cas d'un espace normal, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi.

### 1. Fonctions sous-analytiques et exposants de Łojasiewicz

#### 1.1. Ensembles sous-analytiques (Hironaka $[H_2]$ )

Nous appellerons espace analytique réel, un espace annelé en  $\mathbf{R}$ -algèbres:  $(X, \mathcal{O}_X)$ , séparé et localement isomorphe à un modèle local (défini par un nombre fini de fonctions analytiques réelles nulles en 0) dans  $\mathbf{R}^n$  (cf.  $[H_1]$ ). Les questions abordées ici étant de nature locale,  $X$  sera toujours supposé paracompact et de dimension finie.

Dans la suite  $(X, \mathcal{O}_X)$  (ou  $X$ ) désignera un espace analytique réel.

DÉFINITION 1 (Hironaka). Un sous-ensemble  $A$  de  $X$  est dit *sous-analytique* en  $x \in X$ , s'il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  dans  $X$  et une famille  $(f_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq 2}}$  de morphismes analytiques propres:  $Y_{ij} \rightarrow X \mid U$ , ( $Y_{ij}$  étant des espaces analytiques réels) tels que:

$$A \cap U = \bigcup_{i=1}^k (\text{Im } f_{i1} - \text{Im } f_{i2}).$$

On dit que  $A$  est *sous-analytique* dans  $X$  s'il l'est en tout point  $x \in X$ .

La classe des sous-ensembles sous-analytiques est la plus petite classe de sous-ensembles d'espaces analytiques réels contenant les ensembles semi-analytiques, et stable par les opérations booléennes et les morphismes propres.

Nous aurons besoin des lemmes suivants:

LEMME 1. ([H<sub>2</sub>, p. 482] «sélection d'une courbe»). Soit  $A$  un ensemble sous-analytique de  $X$ ,  $a \in \bar{A}$ . Il existe alors une fonction analytique  $\tau: ]-1, +1[ \rightarrow X$  telle que  $\tau(0) = a$ , et  $\tau(]0, 1[) \subset A$ .

LEMME 2. Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces analytiques réels,  $\pi = X \times Y \rightarrow X$  la projection canonique. Si  $V$  est un ensemble compact sous-analytique dans  $Y$ , et  $A \subset X \times V$  un ensemble sous-analytique dans  $X \times Y$ ,  $\pi(A)$  est sous-analytique dans  $X$ .

(Ce lemme s'applique en particulier au cas où  $A$  est relativement compact et sous-analytique dans  $X \times Y$ ).

Démonstration. D'après [H<sub>2</sub>] il existe un espace analytique réel  $Y_1$ , et un morphisme analytique propre  $\varphi: Y_1 \rightarrow Y$  tel que  $\varphi(Y_1) = V$ . L'application  $\tilde{\pi} = \pi \circ (\text{id}_X \times \varphi)$  est propre, et l'on a:  $\pi(A) = \tilde{\pi}((\text{id}_X \times \varphi)^{-1}(A))$ , et donc  $\pi(A)$  est sous-analytique comme image d'un ensemble sous-analytique par un morphisme analytique propre.

### 1.2. Fonctions sous-analytiques

Soient  $K, L, P$  des ensembles sous-analytiques respectivement dans des espaces analytiques  $X, Y, T$ .

DÉFINITION 2. Une fonction continue  $f: K \rightarrow L$  est dite *sous-analytique* si son graphe  $\Gamma(f)$  est sous-analytique dans  $X \times Y$ .

Nous noterons  $\chi(K, L)$  l'ensemble des fonctions sous-analytiques de  $K$  dans  $L$  et poserons  $\chi(K) = \chi(K, \mathbf{R})$ .

- PROPOSITION 1. a) si  $f \in \chi(K, L)$  et  $g \in \chi(L, P)$  alors  $g \circ f \in \chi(K, P)$   
 b)  $\chi(K)$  est une  $\mathbf{R}$ -algèbre.

*Démonstration.* Soit  $\pi: X \times Y \times T \rightarrow X \times T$  la projection canonique. On a:  $\Gamma(g \circ f) = \pi[(\Gamma(f) \times P) \cap (K \times \Gamma(g))]$ , d'où immédiatement le résultat a) en appliquant le lemme 2, puisque la question est locale (on peut ainsi supposer  $L$  relativement compact).

Le point b) résulte facilement de a).

**EXEMPLES.** a) La restriction à un ensemble sous-analytique d'une fonction sous-analytique est encore sous-analytique.

b) Soit  $X$  un espace analytique réel plongé analytiquement dans  $\mathbf{R}^k$ : la restriction de la distance euclidienne à  $X \times X$  est une fonction semi-analytique (donc sous-analytique) sur  $X \times X$ .

Si  $A$  est sous-analytique et fermé dans  $X$ , la fonction  $\delta_A: x \rightarrow \text{dist}(x, A)$  est sous-analytique sur  $X$  (on peut en effet supposer  $A$  compact puisque la question est locale; alors

$$T = \{(x, t) \in X \times \mathbf{R} : \delta_A(x) \leq t\} = \pi(\{(x, y, t) \in X \times A \times \mathbf{R} : d(x, y) \leq t\})$$

est sous-analytique d'après le lemme 2, et  $\Gamma(\delta_A)$  est la frontière de  $T$ ). Remarquons qu'en général  $\Gamma(\delta_A)$  n'est pas semi-analytique, même si  $A$  est analytique.

c) **PROPOSITION 2.** Soit  $K$  un ensemble sous-analytique dans  $X$ ,  $f \in \chi(K)$  telle que  $f^{-1}(0)$  soit non vide et différent de  $K$ . Alors, pour  $\alpha \in \mathbf{R}_+$ ,  $|f|^\alpha \in \chi(K)$  si et seulement si  $\alpha \in \mathbf{Q}$ .

*Démonstration.* Montrons d'abord que si  $\alpha \in \mathbf{Q}$ ,  $|f|^\alpha \in \chi(K)$ ; posons  $\alpha = p/q$ : on a évidemment  $|f| \in \chi(K)$  car son graphe est sous-analytique dans  $K \times \mathbf{R}$  puisque par hypothèse le graphe de  $f$  est sous-analytique. On a donc  $|f|^p \in \chi(K)$  (proposition 1) et  $|f|^{p/q} \in \chi(K)$ , puisque  $|f|^{p/q}$  est égale à  $\varphi_q \circ |f|^p$ ,  $\varphi_q$  étant l'application de  $\mathbf{R}_+$  dans  $\mathbf{R}_+$  qui à  $x$  fait correspondre  $x^{1/q}$ : il suffit de remarquer que  $\varphi_q$  est sous-analytique (car le graphe  $y = x^{1/q}$  est égal au graphe de la fonction inverse  $x = y^q$ ) et d'appliquer la proposition 1a).

Pour démontrer la réciproque, nous aurons besoin d'un lemme:

**LEMME 3.** Soit  $\psi: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction sous-analytique, telle que  $\psi(0) = 0$ ,  $\psi(\theta) \neq 0$  pour  $\theta$  au voisinage de 0. Il existe alors  $\alpha \in \mathbf{Q}_+$ ,  $\varepsilon > 0$ , et  $\varphi \in \chi[0, \varepsilon[$  vérifiant  $\varphi(0) \neq 0$  tels que

$$\psi(\theta) = \theta^\alpha \varphi(\theta), \quad \forall \theta \in [0, \varepsilon[$$

(on peut même prendre  $\varphi$  analytique dans  $]0, \varepsilon[$ ).

*Démonstration.*  $\Gamma(\psi) \cap ([0, 1] \times \mathbf{R})$  étant sous-analytique dans  $\mathbf{R}^2$ , on peut

d'après le lemme 1 choisir une fonction analytique  $\tau: ]-1, +1[ \rightarrow \mathbf{R}^2$  telle que  $\tau(0) = (0, 0)$  et  $\tau(]0, 1[) \subset (\Gamma(\psi) \cap [0, 1] \times \mathbf{R}) \setminus (0, 0)$ .

$\tau$  est alors définie au voisinage de 0 par deux fonctions analytiques  $x: ]-\varepsilon', \varepsilon'[ \rightarrow [0, 1]$  et  $y: ]-\varepsilon', \varepsilon'[ \rightarrow \mathbf{R}$  telles que :

$$\begin{aligned} x(t) &= t^{n_1} \varphi_1(t), & \varphi_1(0) &\neq 0, & n_1 &\in \mathbf{N} \\ y(t) &= t^{n_2} \varphi_2(t), & \varphi_2(0) &\neq 0, & n_2 &\in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

On a donc  $\psi(t^{n_1} \varphi_1(t)) = t^{n_2} \varphi_2(t)$  pour  $t \in [0, \varepsilon'[$ . Mais il existe, quitte à diminuer  $\varepsilon'$ , une fonction  $h: [0, \varepsilon[ \cap [0, \varepsilon'[$  ayant les propriétés suivantes :

- $t = h(\theta) \Leftrightarrow \theta = t^{n_1} \varphi_1(t)$  pour  $t \in [0, \varepsilon'[$ ;
- $h$  est analytique dans  $]0, \varepsilon[$  et sous-analytique dans  $[0, \varepsilon[$  (car le graphe de  $h$  est égal à celui de  $t^{n_1} \varphi_1(t)$ );
- $h(\theta) = \theta^{1/n_1} h_1(\theta)$  avec  $h_1(0) \neq 0$  (on a en effet  $h_1(\theta) = 1/\varphi_1(h(\theta))$ ). La fonction  $\psi(\theta) = y \circ h(\theta)$  vérifie alors bien l'assertion du lemme. c.q.f.d.

Achevons maintenant la démonstration de la proposition 2: soit  $f \in \chi(K)$  telle que  $|f|^\alpha \in \chi(K)$ .

Soit  $a \in f^{-1}(0)$  tel que  $a$  soit adhérent à  $K - f^{-1}(0)$ ;  $K - f^{-1}(0)$  étant sous-analytique, on peut d'après le lemme 1 trouver une courbe analytique  $\varphi: ]-1, +1[ \rightarrow K$  telle que  $\varphi(0) = a$  et  $\varphi(]0, 1[) \subset K - f^{-1}(0)$ .

On a alors  $f \circ \varphi \in \chi([0, 1])$  (proposition 1) d'où  $f \circ \varphi(t) = t^{\beta_1} \varphi_1(t)$  pour  $t \in [0, \varepsilon_1]$ , avec  $\beta_1 \in \mathbf{Q}_+$ ,  $\varphi_1 \in \chi([0, \varepsilon_1])$  et  $\varphi_1(0) \neq 0$  (Lemme 3).

On a de même un nombre  $\beta_2 \in \mathbf{Q}_+$  et une fonction  $\varphi_2 \in \chi([0, \varepsilon_2])$  tels que  $|f|^\alpha \circ \varphi(t) = t^{\beta_2} \varphi_2(t)$  avec  $\varphi_2(0) \neq 0$ , puisque  $|f|^\alpha$  est sous-analytique par hypothèse.

On a donc, pour  $t$  voisin de 0:

$$t^{\alpha \beta_1} |\varphi_1(t)|^\alpha = t^{\beta_2} \varphi_2(t) \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{\beta_2}{\beta_1}. \quad \text{c.q.f.d.}$$

### 1.3. Exposants de Łojasiewicz (cas sous-analytique)

Soient  $X$  un espace analytique réel,  $K$  un compact contenu dans  $X$ . Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions continues sur  $K$ , on posera :

$$\alpha_K(f, g) = \inf \{ \alpha \in \mathbf{R}_+ : \exists C > 0 \text{ telle que } |f(y)|^\alpha \leq C |g(y)| \quad \forall y \in K \}.$$

(La borne inférieure de l'ensemble vide est par définition égale à  $+\infty$ );  $\alpha_K(f, g)$  est par définition l'exposant de Łojasiewicz de  $f$  par rapport à  $g$  sur l'ensemble  $K$ .

**THÉORÈME 1.** *Si  $K$  est sous-analytique dans  $X$ , et si  $f$  et  $g$  sont sous-analytiques sur  $K$ , telles que  $\Phi \neq g^{-1}(0) \subset f^{-1}(0)$ ,  $\alpha_K(f, g)$  est rationnel.*

**COROLLAIRE 1.** *Soit  $K$  un compact sous-analytique dans un espace analytique*

réel  $X, g \in \chi(X), Z = g^{-1}(0)$ ; alors:

$$\alpha^* = \inf \{ \alpha \in \mathbf{R}_+ : \exists c > 0, |g(x)| \geq c (\text{dist}(x, Z))^\alpha \quad \forall x \in K \}$$

est rationnel.

**COROLLAIRE 2.** Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles fermés sous-analytiques dans  $X$ , et  $K$  un compact sous-analytique dans  $X$ . Alors:

$$\alpha^*(A, B) = \inf \{ \alpha \in \mathbf{R}_+ : \exists c > 0, \text{dist}(x, A) + \text{dist}(x, B) \geq C \text{dist}(x, A \cap B)^\alpha, \quad \forall x \in K \}$$

est rationnel.

Ces deux corollaires sont des conséquences immédiates du théorème 1 (cf. l'exemple b))

*Remarques 1.* a) Dans le cas semi-analytique, le fait que  $\alpha_K(f, g) < +\infty$  si  $\Phi \neq g^{-1}(0) \subset f^{-1}(0)$  est dû à Łojasiewicz ([L]). Hironaka ([H<sub>1</sub>]) démontre aussi ce fait en utilisant les théorèmes de résolution des singularités pour les ensembles sous-analytiques (cf. ([H<sub>2</sub>])). Le Théorème 1 doit aussi pouvoir être démontré par ces méthodes.

b) Dans le cas analytique complexe, Lejeune-Teissier ([L-T] (Chap. I, §6)) montrent un théorème analogue en interprétant l'exposant de Łojasiewicz algébriquement (avec  $K$  assez petit); cf. plus loin (II.2).

c) T. C. Kuo ([K]) a étudié  $\alpha_K(f, g)$  pour des fonctions analytiques de deux variables réelles et a montré la rationalité dans ce cas.

*Démonstration du théorème 1.* On peut supposer  $f \geq 0$  et  $g \geq 0$  sur  $K$ . Posons  $K^* = \{u \in K \setminus f^{-1}(0), f(x) = f(u) \Rightarrow g(x) \geq g(u)\}$ .

(Autrement dit on considère les points  $u$  tel que  $g(u)$  soit minimal pour  $u$  parcourant une «variété de niveau» de  $f$ ).

L'ensemble  $K^*$  est sous-analytique puisqu'il s'écrit:  $K^* = K_1 \setminus \pi(B \setminus A)$  où  $K_1 = K \setminus f^{-1}(0)$ ,

$$A = \{(x, u) \in K_1 \times K_1 : g(x) \geq g(u)\}$$

$$B = \{(x, u) \in K_1 \times K_1 : f(x) = f(u)\}$$

et où  $\pi(x, u) = u$  (cf. le lemme 2).

Soit  $a \in f^{-1}(0)$  tel que  $a$  soit adhérent à  $K^*$  (un tel  $a$  existe puisque  $\overline{K^*}$  est compact).

D'après le lemme 1, il existe une courbe analytique  $\tau: ]-1, 1[ \rightarrow X$ , telle que  $\tau(0) = a, \tau(t) \in K^*$  pour  $t \in ]0, 1[$ .

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} f \circ \tau(t) &= t^{\alpha_1} \varphi_1(t), & (\varphi_1(0) \neq 0) \\ g \circ \tau(t) &= t^{\alpha_2} \varphi_2(t), & (\varphi_2(0) \neq 0) \end{aligned}$$

avec  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  rationnels (lemme 3).

Il suffit alors de montrer que  $\alpha_K(f, g) = \alpha_1/\alpha_2$  pour prouver le théorème.

On a évidemment  $\alpha_K(f, g) \geq \alpha_1/\alpha_2$ , puisque  $\alpha_1/\alpha_2$  est l'exposant de Łojasiewicz calculé pour les restrictions de  $f$  et  $g$  à la courbe  $\tau([0, \varepsilon])$  pour  $\varepsilon$  convenable.

Montrons d'autre part que  $\alpha_K(f, g) \leq \alpha_1/\alpha_2$  : il faut voir qu'il existe une constante  $C$  telle que  $f(x)^{\alpha_1/\alpha_2} \leq Cg(x)$  dans  $K$  (nous avons supposé  $f$  et  $g \geq 0$  sur  $K$ ).

Choisissons  $l > 0$  tel que  $f^{-1}(\xi) \cap \tau([0, \varepsilon]) \neq \emptyset$  pour  $\xi \in [0, l]$  ; comme  $K$  est compact, il suffit de se borner aux  $x \in K$  tels que  $f(x) \in [0, l]$  (rappelons que par hypothèse  $g^{-1}(0) \subset f^{-1}(0)$ ) ;

Mais pour un tel  $x$ , il existe  $u \in \tau([0, \varepsilon])$  tel que  $f(x) = f(u)$  et  $g(x) \geq g(u)$ , d'où l'assertion puisque on a choisi  $\varepsilon$  assez petit pour que  $\alpha_1/\alpha_2$  soit l'exposant de Łojasiewicz de  $f$  par rapport à  $g$  sur la courbe  $\tau([0, \varepsilon])$ .

## 2. Exposants de Łojasiewicz réels et exposants de Łojasiewicz complexes

### 2.1. Rappels sur les idéaux réels et la normalisation ( $[\mathbb{R}]$ )

Soient  $\mathcal{O}$  une  $\mathbb{R}$  algèbre analytique,  $I$  un idéal de  $\mathcal{O}$ . On dit que  $I$  est réel si l'algèbre  $\mathcal{O}/I$  est ordonnable, i.e. si la condition suivante est vérifiée : si  $f_1, \dots, f_p$  sont des éléments de  $\mathcal{O}$  tels que  $f_1^2 + \dots + f_p^2 \in I$  alors  $f_i \in I$  ( $1 \leq i \leq p$ ).

Supposons que  $I$  soit un idéal premier de  $\mathcal{O}$ , et que  $\dim(\mathcal{O}/I) = h$ . Soit  $X$  un représentant du germe à l'origine d'espace analytique réel défini par  $\mathcal{O}/I$  ; on a alors :

**PROPOSITION 1.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a)  $I$  est réel ;
- b)  $I$  est l'idéal de tous les éléments de  $\mathcal{O}$  nuls sur le germe de  $X$  à l'origine.
- c)  $X$  possède un point lisse de dimension  $h$  dans tout voisinage de l'origine.

Passons maintenant à la normalisation. Si  $(X, \mathcal{O}_X)$  est un espace analytique réel, nous désignerons par  $(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$  une complexification de  $(X, \mathcal{O}_X)$ , et par  $(\bar{\tilde{X}}, \mathcal{O}_{\bar{\tilde{X}}})$  la normalisée de  $(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ ,  $(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$  étant supposé réduit.

**PROPOSITION 2.** *Supposons  $X$  réduit ; alors il existe une complexification  $(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$  de  $(X, \mathcal{O}_X)$  telle que  $(\bar{\tilde{X}}, \mathcal{O}_{\bar{\tilde{X}}})$  soit muni d'une auto-conjugaison  $\bar{\sigma}$  (compatible avec la conjugaison canonique  $\sigma$  de  $\tilde{X}$ ).*

De plus, si  $\tilde{\pi} : \bar{\tilde{X}} \rightarrow \tilde{X}$  est l'application canonique, et si  $x$  est un point de  $X$  tel que

$\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$  soit intègre (ce qui est en particulier le cas si  $\mathcal{O}_{X,x}$  est ordonnable),  $\pi^{-1}(x)$  est composé d'un nombre fini de points  $\tilde{x}_i$  réels (i.e. fixes par  $\bar{\sigma}$ ), et  $\mathcal{O}_{\tilde{X}, \pi^{-1}(x)}$  est isomorphe à  $\bar{\mathcal{O}}_{X,x} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ .

De plus si  $\mathcal{O}_{\tilde{X},x}$  est normale  $\mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$  est normale.

Nous renvoyons à [H<sub>1</sub>] pour des détails sur les espaces analytiques réels et la complexification, et à [R] pour la démonstration des propositions 1 et 2.

2.2. *Inégalités de Łojasiewicz: notations et rappels (cas analytique)*

Soient  $(X, \mathcal{O}_X)$  un espace analytique réel,  $x$  un point de  $X$ ,  $I$  un idéal cohérent sur  $X$  engendré par des fonctions sur  $X$   $g_1, \dots, g_p$ , et  $K$  un voisinage compact de  $x$ . Si  $f$  est une fonction sur  $X$  nous poserons:

$$\alpha_K(f, I) = \inf \{ \alpha \in \mathbf{R} \mid \exists C > 0 \text{ telle que } |f(y)|^\alpha \leq C \text{ Sup } |g_i(y)|, \forall y \in K \}$$

et  $\alpha(f, I) = \inf_K \alpha_K(f, I)$  pour  $K$  parcourant les voisinages compacts de  $x$  dans  $X$ . (La borne inférieure de l'ensemble vide est par définition égale à  $+\infty$ ).

Soit  $\tilde{X}$  une complexification de  $X$  telle que les  $g_i$  et  $f$  s'étendent en des fonctions  $\tilde{g}_i$  et  $\tilde{f}$  sur  $\tilde{X}$ ; notions  $\tilde{I}$  l'idéal cohérent sur  $\tilde{X}$  engendré par les  $\tilde{g}_i$ . On pose alors:

$$\beta_K(f, I) = \inf_{\tilde{K}} \alpha_{\tilde{K}}(\tilde{f}, \tilde{I})$$

où  $\alpha_{\tilde{K}}(\tilde{f}, \tilde{I})$  a une définition analogue à celle de  $\alpha_K(f, I)$ , et où  $\tilde{K}$  parcourt l'ensemble des voisinages compacts de  $x$  dans  $\tilde{X}$  tels que  $\tilde{K} \cap X = K$ .

On pose de même:  $\beta(f, I) = \inf_K \beta_K(f, I)$ ,  $K$  parcourant les voisinages compacts de  $x$  dans  $X$ .

$\beta_K(f, I)$  et  $\beta(f, I)$  ne dépendent pas de la complexification choisie et l'on a toujours:

$$\begin{aligned} \alpha_K(f, I) &\leq \beta_K(f, I) \\ \alpha(f, I) &\leq \beta(f, I) \end{aligned}$$

$\beta(f, I)$  a été étudié par Lejeune-Teissier ([L-T]): si  $f_x$  et  $I_x$  désignent les germes de  $f$  et  $I$  en  $x$ , ils montrent que  $\beta_K(f, I) = \beta(f, I)$  pour  $K$  assez petit, et que  $\beta(f, I) = 1/\bar{v}_{I_x}(f_x)$  avec les notations de [L-T], Chap. I, §7.

On peut définir  $\bar{v}_{I_x}(f_x)$  comme étant le plus grand rationnel  $q/p$  tel que  $f_x^p$  soit entier sur l'idéal  $I_x^q$  (cf. [L.T], Chap. I, §7).

Rappelons que dans un anneau commutatif  $A$ , un élément  $f$  est entier sur un idéal  $I$  s'il existe une relation de dépendance intégrale:

$$f^n + a_1 f^{n-1} + \dots + a_n = 0 \text{ avec } a_j \in I^j \quad (1 \leq j \leq n).$$

On a en particulier le lemme suivant:

LEMME 1. Soit  $\mathcal{O}$  une  $\mathbf{R}$ -algèbre analytique normale (i.e. intègre et intégralement close). Alors si  $f$  et  $g$  sont des éléments de  $\mathcal{O}$ ,  $\beta(f, g)$  est le plus petit rationnel  $p/q$  tel que  $f^p/g^q \in \mathcal{O}$ .

*Preuve.* Il est en effet facile de voir que dans un anneau normal tout idéal principal  $(g)$  est intégralement clos (i.e. si  $f$  est entier sur  $(g)$ ,  $f \in (g)$ ).

Le fait que  $f^p$  soit entier sur  $g^q$  est donc ici équivalent à  $f^p \in (g^q)$ , soit  $f^p/g^q \in \mathcal{O}$ .  
c.q.f.d.

Nous allons considérer dans la suite la propriété suivante:

P(I): Il existe dans  $X$  un voisinage compact  $K$  de  $x$  tel que pour toute fonction  $f$  analytique sur un voisinage de  $x$  dans  $X$  (donc sur un voisinage compact  $K' \subset K$  de  $x$ ) on ait:

$$\alpha_{K'}(f, I) = \beta_{K'}(f, I) = \beta(f, I).$$

P(I) ne dépend que du germe de  $X$  en  $x$  et de l'idéal  $I_x$ .

LEMME 2. Pour que P(I) soit vraie, il est nécessaire que  $\sqrt{I_x}$  soit un idéal réel ( $\sqrt{I_x}$  désignant la racine de l'idéal  $I_x$  dans l'anneau  $\mathcal{O}_{X,x}$ ).

Notons  $V(I_x)$  le germe en  $x$  d'espace analytique réel défini par  $I_x$ ; si  $\sqrt{I_x}$  n'est pas réel, il existe d'après la proposition 1 un élément  $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$  tel que  $f_x \notin \sqrt{I_x}$ , et tel que  $f_x$  s'annule sur  $V(I_x)$ . Mais alors  $\alpha_K(f, I)$  est fini si  $K$  est assez petit (cf. théorème 1) et  $\beta(f, I) = +\infty$  d'après le théorème des zéros analytique complexe.

### 2.3. Cas où $I$ est un idéal principal

PROPOSITION 3. Soit  $\mathcal{O}$  une  $\mathbf{R}$ -algèbre analytique normale (i.e. intègre et intégralement close),  $g$  un élément de  $\mathcal{O}$ . Alors pour que P( $g$ ) soit vraie, il faut et il suffit que  $\sqrt{g}$  soit un idéal réel.

*Remarque.* Il va résulter de la démonstration ci-dessous que si  $\sqrt{g}$  est réel,  $\mathcal{O}$  est ordonnable.

*Démonstration.* D'après le lemme 2, la condition est nécessaire. Supposons donc que  $\sqrt{g}$  soit réel, et soit  $(X, \mathcal{O}_X)$  un espace analytique réel normal,  $x \in X$  tel que  $\mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathcal{O}$ . Nous supposerons que  $g$  s'étend en une fonction analytique sur  $X$  que nous noterons encore  $g$ ; soit  $f \in \mathcal{O}$ ; nous pouvons aussi supposer (quitte à restreindre  $X$ ) que  $f$  possède un représentant analytique sur  $X$ , que nous noterons encore  $f$ . Soit  $K$  un voisinage compact de  $x$  dans  $X$  assez petit pour que toutes les composantes irréductibles de  $V(g)$  dans  $K$  passent par  $x$ : on a alors  $\beta_K(f, g) = \beta(f, g)$  (cf. [L-T]), et il faut montrer que  $\alpha_K(f, g) = \beta_K(f, g)$ .

Soit  $p/q$  un rationnel tel que  $p/q > \alpha_K(f, g)$ ; il suffit de voir que  $\beta_K(f, g) \leq p/q$  (car

cela montrera que  $\beta_K(f, g) \leq \alpha_K(f, g)$ , et on a toujours  $\beta_K(f, g) \geq \alpha_K(f, g)$  i.e. que  $f^p/g^q \in \mathcal{O}$  (lemme 1).

Supposons donc par l'absurde que  $f^p/g^q \notin \mathcal{O}$ ; notions  $V(g)$  l'ensemble des zéros de  $g$  dans  $X$ .

LEMME 3. *Il existe  $x' \in K \cap V(g)$  tel que*

- a)  *$X$  soit lisse au voisinage de  $x'$  (de dimension  $n = \dim \mathcal{O}$ )*
- b)  *$\sqrt{g} \mathcal{O}_{X, x'}$  soit un idéal premier réel.*
- c)  *$f^p/g^q \notin \mathcal{O}_{X, x'}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\tilde{X}$  un complexifié de  $X$  qui soit un espace normal (cf. proposition 2), de dimension  $n = \dim \mathcal{O}$ , et tel que  $f$  et  $g$  s'étendent en des fonctions sur  $\tilde{X}$  notées  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$ .

Le lieu polaire de la fonction méromorphe  $\tilde{f}^p/\tilde{g}^q$  est alors non vide (car  $f^p/g^q \notin \mathcal{O}$ ), de codimension 1 dans  $\tilde{X}$  (car  $\tilde{X}$  est normal) et contenu dans l'ensemble  $V(\tilde{g})$  des zéros de  $\tilde{g}$  dans  $\tilde{X}$ : c'est donc la réunion de certaines composantes irréductibles de  $V(\tilde{g})$ .

Comme l'idéal  $\sqrt{g}$  est réel, tous les idéaux premiers minimaux contenant  $\sqrt{g}$  sont réels ([R]), et chaque composante irréductible de  $V(\tilde{g})$  possède un point réel dans  $K$  au voisinage duquel  $V(g)$  est lisse de dimension  $n-1$  (proposition 1): il existe ainsi sur chaque composante irréductible de  $V(\tilde{g})$  un point réel au voisinage duquel  $V(\tilde{g})$  est lisse, car l'ensemble des points où  $V(\tilde{g})$  est singulier est de dimension complexe  $\leq n-2$ , donc sa partie réelle est de dimension réelle  $\leq n-2$ . Ceci entraîne qu'en un tel point  $x'$ ,  $\sqrt{g}$  est engendré par un élément régulier de  $\mathcal{O}_{X, x'}$ , donc que  $\sqrt{g} \mathcal{O}_{X, x'}$  est un idéal premier réel.

Soit donc  $x'$  un tel point où de plus la fonction  $\tilde{f}^p/\tilde{g}^q$  ne soit pas holomorphe (ce qui est équivalent à dire que  $f^p/g^q \notin \mathcal{O}_{X, x'}$ ).

Comme la partie réelle du lieu singulier de  $\tilde{X}$  est le lieu singulier de  $X$  (noté  $\text{sing } X$ ; cf. [H<sub>1</sub>]), on ne peut avoir  $V(g) \subset \text{sing } X$  au voisinage de  $x'$ , car  $\tilde{X}$  étant normal est lisse en codimension 1. On peut donc supposer que  $x'$  est un point lisse de  $\tilde{X}$  (avec toujours  $f^p/g^q \notin \mathcal{O}_{X, x'}$ ), ce qui achève de montrer le lemme 3.

Montrons maintenant la proposition 3: comme  $\mathcal{O}_{X, x'}$  est régulier, donc factoriel, on peut écrire:

$$f^p/g^q = \lambda/\mu \quad \text{avec} \quad \lambda \notin \sqrt{\mu} \quad \text{dans} \quad \mathcal{O}_{X, x'}$$

Mais  $\sqrt{\mu}$  est un idéal réel dans  $\mathcal{O}_{X, x'}$  (puisque  $\sqrt{g} \mathcal{O}_{X, x'}$  étant premier on a  $\sqrt{\mu} = \sqrt{g}$  dans  $\mathcal{O}_{X, x'}$ ) et donc  $\lambda$  ne s'annule pas sur  $V(\mu)$  au voisinage de  $x'$  (proposition 1), ce qui est contradictoire avec l'hypothèse  $p/q > \alpha_K(f, g)$  qui entraîne que  $f^p/g^q(y)$  est bornée pour  $y \in K$ . c.q.f.d.

COROLLAIRE 1. *Soit  $\mathcal{O}$  une  $\mathbf{R}$ -algèbre analytique ordonnable,  $\bar{\mathcal{O}}$  sa normalisée*

(qui est une somme directe d'un nombre fini de  $\mathbf{R}$ -algèbres analytiques: cf. [R]),  $g$  un élément de  $\mathcal{O}$ . Alors si  $\sqrt{g}\bar{\mathcal{O}}$  est un idéal réel,  $P(g)$  est vraie.

Montrons d'abord un lemme:

LEMME 4. Soient  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  deux  $\mathbf{R}$ -algèbres analytiques,  $\varphi: \mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{O}$  un morphisme,  $I$  un idéal de  $\mathcal{O}$  et  $f$  un élément de  $\mathcal{O}$ . Alors on a:

$$\begin{aligned}\alpha(f, I) &\geq \alpha(f\mathcal{O}', I\mathcal{O}') \\ \beta(f, I) &\geq \beta(f\mathcal{O}', I\mathcal{O}').\end{aligned}$$

*Démonstration.* Soient  $X$  et  $X'$  deux espaces analytiques réels,  $\pi$  un morphisme de  $X'$  dans  $X$ ,  $x' \in X'$  et  $x \in X$ , tels que:  $\mathcal{O}_{X, x} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}$ ,  $\mathcal{O}_{X', x'} \rightarrow \mathcal{O}'$ ,  $\pi(x') = x$ , le morphisme:  $\mathcal{O}_{X', x'} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$  soit égal à  $\varphi$ . Soit  $K$  un voisinage compact de  $x$  dans  $X$ : on a évidemment

$$\alpha_K(f, I) \geq \alpha_{\pi^{-1}(K)}(f \circ \pi, I \circ \pi)$$

et

$$\beta_K(f, I) \geq \beta_{\pi^{-1}(K)}(f \circ \pi, I \circ \pi),$$

car  $g$  est une fonction analytique sur  $K$  telle que  $g_x \in I$ ,

$$|f(y)|^\alpha \leq C|g(y)| \quad \forall y \in K \Rightarrow |f \circ \pi(z)|^\alpha \leq |g \circ \pi(z)| \quad \forall z \in \pi^{-1}(K)$$

ce qui démontre aisément le lemme.

Montrons maintenant le corollaire 1: si l'on pose  $\bar{\mathcal{O}} = \bigoplus_{i=1}^p \mathcal{O}_i$ , on a, d'après le lemme 4:

$$\alpha(f, g) \geq \alpha(f\mathcal{O}_i, g\mathcal{O}_i) \quad (1 \leq i \leq p),$$

d'où

$$\alpha(f, g) \geq \sup_i \alpha(f\mathcal{O}_i, g\mathcal{O}_i).$$

On a de même  $\beta(f, g) \geq \sup_i \beta(f\mathcal{O}_i, g\mathcal{O}_i)$ . Montrons qu'en fait:  $\beta(f, g) = \sup_i \beta(f\mathcal{O}_i, g\mathcal{O}_i)$ . Soit  $(X, \mathcal{O}_X)$  un espace analytique réel tel que  $\mathcal{O}_{X, x} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}$ ,  $\tilde{X}$  un complexifié de  $X$ , tel que  $f$  et  $g$  se prolongent en des fonctions holomorphes  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  sur  $\tilde{X}$ .

On a les équivalences suivantes:  $p/q < \beta(f, g) \Leftrightarrow \tilde{f}^p/\tilde{g}^q$  est non borné dans un voisinage de  $x$  dans  $\tilde{X} \Leftrightarrow$  il existe un  $i$  tel que  $f^p/g^q \notin \mathcal{O}_i \Leftrightarrow p/q < \beta(f\mathcal{O}_i, g\mathcal{O}_i)$  (lemme 1).

On a donc  $\beta(f, g) \leq \beta(f\mathcal{O}_i, g\mathcal{O}_i) \leq \sup_i \beta(f\mathcal{O}_i, g\mathcal{O}_i)$ , d'où finalement  $\beta(f, g) = \sup_i \beta(f\mathcal{O}_i, g\mathcal{O}_i)$ .

Mais, par hypothèse,  $\sqrt{g}\mathcal{O}_i$  est réel pour  $1 \leq i \leq p$ , et donc  $\alpha(f\mathcal{O}_i, g\mathcal{O}_i) = \beta(f\mathcal{O}_i, g\mathcal{O}_i)$  d'après la proposition 3; on a donc:

$$\beta(f, g) \geq \alpha(f, g) \geq \sup_i \alpha(f\mathcal{O}_i, g\mathcal{O}_i) = \sup_i \beta(f\mathcal{O}_i, g\mathcal{O}_i) = \beta(f, g)$$

ce qui achève la démonstration du corollaire.

*Remarque 1.* Si  $\mathcal{O}$  est une  $\mathbf{R}$ -algèbre analytique ordonnable, et  $g \in \mathcal{O}$ , la condition  $\sqrt{g}\mathcal{O}$  réel implique que  $P(g)$  est vraie, donc que  $\sqrt{g}\mathcal{O}$  est réel (lemme 2); la réciproque est fautive comme le montre l'exemple suivant:

Prenons  $\mathcal{O} = \mathbf{R}\{X, Y, Z\}/Z(X^2 + Y^2) - Y^5$ :  $\mathcal{O}$  est une  $\mathbf{R}$ -algèbre analytique intègre et ordonnable. Si  $g$  est l'image de  $X^2 + Y^2$  dans  $\mathcal{O}$ ,  $\sqrt{g}$  est réel dans  $\mathcal{O}$  ( $V(g)$  est l'axe des  $z$ ), mais  $\sqrt{g}\mathcal{O}$  n'est pas réel (l'ensemble des zéros de  $g$  dans le germe analytique correspondant à  $\bar{\mathcal{O}}$  est réduit à un point:

si  $X$  désigne l'espace analytique défini par l'équation  $Z(X^2 + Y^2) - Y^5 = 0$  dans  $\mathbf{R}^3$  et  $\tilde{X}$  son complexifié, l'image réciproque dans la normalisation  $\bar{X}$  de  $\tilde{X}$  d'un point  $M$  de l'axe des  $Z$  différent de l'origine consiste en effet en deux points non réels de  $\bar{X}$ ,  $X$  étant irréductible en  $M$  et pas  $\tilde{X}$ : cf [R]).

Il est facile dans ce cas de voir que  $P(g)$  n'est pas vraie (si  $f$  est l'image de  $Y$  dans  $\mathcal{O}$ ,  $\alpha(f, g) = 2$  et  $\beta(f, g) = 5$ ).

#### 2.4. Cas où $I$ est un idéal intersection complète

L'idée de ce paragraphe est de faire éclater  $I$  pour pouvoir appliquer le corollaire 1 (ou de prendre l'éclatement normalisé de  $I$  pour pouvoir appliquer la proposition 3).

Soient  $\mathcal{O}$  une  $\mathbf{R}$ -algèbre analytique ordonnable,  $I = (g_1, \dots, g_p)$  un idéal de  $\mathcal{O}$  engendré par une suite régulière,  $X$  un espace analytique réel tel que  $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}$  et que les  $g_i$  s'étendent en des fonctions sur  $X$  (notées encore  $g_i$ ).

Soit  $\pi: X' \rightarrow X$  l'éclatement de l'idéal  $I$  dans  $X$  [H<sub>1</sub>].

**PROPOSITION 4.** *Pour que la propriété  $P(I)$  soit vraie, il suffit qu'il existe  $x' \in X'$  tel que:*

- a)  $\pi(x') = x$
- b)  $\mathcal{O}_{X',x'}$  soit une  $\mathbf{R}$ -algèbre ordonnable
- c)  $\sqrt{I}\mathcal{O}_{X',x'}$  soit un idéal réel.

*Démonstration.* Posons  $\mathcal{O}' = \mathcal{O}_{X',x'}$ . D'après le corollaire 1 et les conditions b) et c), si  $f \in \mathcal{O}$ , il existe un voisinage compact  $K'$  de  $x'$  dans  $X'$  tel que:

$$\alpha_{K'}(f\mathcal{O}', I\mathcal{O}') = \beta(f\mathcal{O}', I\mathcal{O}')$$

Or, on a évidemment:

$$\alpha_K(f, I) \geq \alpha_{K'}(f\mathcal{O}', I\mathcal{O}') \text{ pour } \pi(K') \subset K.$$

Il suffit donc de voir que  $\beta(f\mathcal{O}', I\mathcal{O}') = \beta(f, I)$ , ce qui va résulter du lemme suivant:

LEMME 5. Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a:

$$\beta(f, I) = \beta(f\mathcal{O}_{X',x'}, I\mathcal{O}_{X',x'}) \quad \forall x' \in X' \quad \text{tel que} \quad \pi(x') = x.$$

*Démonstration.*  $I$  étant intersection complète et  $x'$  se projetant sur  $x$ , toutes les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel (défini par  $I\mathcal{O}_{X'}$ ) passent par  $x'$  (si on a choisi  $X$  assez petit pour que toutes les composantes irréductibles de  $V(I)$  passent par  $x$ ). Dans la carte affine où  $I\mathcal{O}_{X'}$  est engendré par  $g_1$  par exemple, le morphisme  $\pi: X' \rightarrow X$  est en effet défini par le morphisme:

$$\mathcal{O}_X \rightarrow \frac{\mathcal{O}_X[z_2, \dots, z_p]}{(z_i g_1 - g_i)}.$$

Le diviseur exceptionnel est donc dans cette carte le produit de  $V(I)$  par un espace lisse de dimension  $p - 1$ .

Soit  $\tilde{X}'$  un complexifié de  $X'$ ,  $\tilde{\pi}: \tilde{X}' \rightarrow \tilde{X}'$  sa normalisation;  $\tilde{\pi}^{-1}(x')$  est alors un ensemble fini, et toutes les composantes irréductibles du diviseur défini par  $I\mathcal{O}_{\tilde{X}'}$  passent par un point de  $\tilde{\pi}^{-1}(x')$  (car une telle composante se projette par  $\tilde{\pi}$  sur une composante du diviseur exceptionnel dans  $\tilde{X}'$  qui passe par  $x'$ ).

Il résulte alors d'une proposition de Lejeune-Teissier ([L-T] Chap. I, §4, Th. 4.11. et 2.2.7) que  $\beta(f, I) = \beta(f\mathcal{O}_{X',x'}, I\mathcal{O}_{X',x'})$ ,  $\tilde{v}_I(f) = 1/\beta(f, I)$  se calculant à l'aide des composantes du diviseur exceptionnel de l'éclatement normalisé de  $I$ . c.q.f.d.

Nous allons maintenant chercher des conditions sur  $I$  qui permettent d'appliquer la proposition 4.

Supposons  $\mathcal{O}_{X,x}$  de dimension  $n$ , et soit  $I = (g_1, \dots, g_n)$  un idéal intersection complète primaire pour l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{X,x}$ . Si  $\lambda \in \mathbf{R}^{(n-1)^n}$ , nous noterons  $I_\lambda$  l'idéal engendré par  $n - 1$  combinaisons linéaires des  $g_i$ :

$$I_\lambda = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^j g_i \right)_{j=1, \dots, n-1} \quad \text{avec} \quad \lambda = (\lambda_i^j).$$

Pour  $\lambda$  dans un ouvert dense de  $\mathbf{R}^{(n-1)^n}$ ,  $I_\lambda$  définit un germe de courbe de  $X$  en  $x$  (on peut montrer que cette courbe est réduite pour  $\lambda$  assez général si  $\mathcal{O}$  est réduite, mais nous n'utiliserons pas cette propriété).

PROPOSITION 5. Soit  $\mathcal{O}$  une  $\mathbf{R}$ -algèbre analytique ordonnable de dimension  $n$ ,  $I = (g_1, \dots, g_n)$  un idéal engendré par une suite régulière. Alors, s'il existe un ouvert non

vide  $U$  de  $\mathbf{R}^{(n-1)^n}$  tel que pour  $\lambda \in U$ ,  $\sqrt{I_\lambda}$  soit un idéal réel, la propriété  $P(I)$  est vérifiée.

*Démonstration.* Choisissons une carte de l'éclatement  $\pi: X' \rightarrow X$  ( $X$  étant un représentant du germe défini par  $\mathcal{O}$  au point  $x$ ), telle que  $\pi$  corresponde à l'injection:

$$\mathcal{O} \rightarrow \frac{\mathcal{O}[Z_2, \dots, Z_n]}{(g_1 Z_i - g_i)}$$

Les points  $x' \in X'$  tels que  $\pi(x') = x$  sont paramétrés par  $\mathbf{R}^{n-1}$  (car le diviseur exceptionnel réduit  $D_{\text{red}}$  est l'espace affine à  $n-1$  dimensions): un tel point équivaut à la donnée de  $n-1$  nombres réels  $z_2, \dots, z_n$ .

L'hypothèse implique que, quitte à modifier les générateurs de  $I$  en les remplaçant par des combinaisons linéaires des  $g_i$ , il existe un ouvert  $U' \subset \mathbf{R}^{n-1}$  tel que si  $(z_2, \dots, z_n) \in U'$ , la racine de l'idéal engendré par  $(g_1 z_i - g_i)_{(2 \leq i \leq n)}$  est un idéal réel dans  $\mathcal{O}$ .

Soit donc  $x'$  un point de  $X'$  vérifiant  $\pi(x') = x$  et dont les coordonnées  $z_2, \dots, z_n$  sont telles que  $(z_2, \dots, z_n) \in U'$ .

Soit  $\tilde{X}'$  un complexifié de  $X'$  au voisinage de  $x'$ ,  $D$  le diviseur exceptionnel défini par  $I\mathcal{O}_{X'}$ ,  $\tilde{D}$  son complexifié.

Comme  $U'$  est un ouvert, nous pouvons supposer de plus que:

( $\alpha$ ): le lieu singulier de  $\tilde{X}'$  au voisinage de  $x'$  est égal à  $\tilde{D}$  (ou est vide). (Cette condition est en effet vérifiée sur un ouvert dense de  $D$ , car si  $D \subset \text{sing } \tilde{X}'$ , il en résulte que  $\tilde{D} \subset \text{sing } \tilde{X}'$  en prenant des complexifications convenables (cf.  $[H_1]$ ), et l'ensemble des points de  $\tilde{D}$  où  $\tilde{D} \neq \text{sing } \tilde{X}'$  est analytique de dimension complexe  $\leq n-2$ , donc sa partie réelle est de dimension réelle  $\leq n-2$ ).

Nous allons montrer que sous ces hypothèses, on peut appliquer la proposition 4 au point  $x'$ , ce qui montrera la proposition 5.

a) On a  $\pi(x') = x$  par hypothèse;

b) il faut montrer que  $\mathcal{O}_{X', x'}$  est ordonnable, i.e. que si  $\mathcal{P}_1$  est un idéal premier minimal de  $\mathcal{O}_{X', x'}$ ,  $V(\mathcal{P}_1)$  a des points lisses de dimension  $n$  dans tout voisinage de  $x'$  (proposition 1). ( $\mathcal{O}_{X', x'}$  est un anneau réduit puisque  $\mathcal{O}$  est ordonnable donc réduit et que l'éclatement est un morphisme birationnel).

Raisonnons par l'absurde: supposons qu'une composante  $X'_1 = V(\mathcal{P}_1)$  de  $X'$  dans un voisinage de  $x'$  ne soit pas réelle; si on note  $|D|$  l'ensemble sous-jacent à  $D$ , il résulte de la condition ( $\alpha$ ) que  $|X'_1| = |D|$  au voisinage de  $x'$  (si  $X'_1$  n'est pas réelle, tout point réel de  $X'_1$  appartient en effet au lieu singulier de  $X'$ ).

L'intersection de  $X'_1$  avec la variété  $V$  d'équations  $(Z_i = z_i)_{(2 \leq i \leq n)}$  n'a donc au voisinage de  $x$  qu'un point réel (à savoir le point  $x'$ ). Montrons que ceci est impossible: la condition ( $\alpha$ ) entraîne que la variété  $\tilde{V}$  (complexifiée de  $V$ ) rencontre la partie lisse de  $\tilde{X}'_1$  au voisinage de  $x'$ , et donc que  $V \cap X'_1$  est réunion de certaines composantes irréductibles de  $C$ . Or l'intersection de  $V$  avec  $X'$  est isomorphe canoniquement (par

l'application  $\pi$ ) à la courbe d'équations:  $(z_i g_1 - g_i)_{2 \leq i \leq n}$  dans  $X$ , dont toutes les composantes sont supposées avoir des points réels autres que  $x$  dans tout voisinage de  $x$  (proposition 1).

c) Montrons enfin que  $\sqrt{I\bar{\mathcal{O}}_{X',x}}$  est un idéal réel. ( $\bar{\mathcal{O}}_{X',x}$  est une somme directe finie de  $\mathbf{R}$ -algèbres analytiques puisque  $\mathcal{O}_{X',x}$  est ordonnable par b) (proposition 2)).

Posons  $\bar{\mathcal{O}}_{X',x} = \bigoplus \mathcal{O}_i$  où les  $\mathcal{O}_i$  sont des  $\mathbf{R}$ -algèbres analytiques locales.

Soit  $\tilde{X}'$  un complexifié de  $X'$  au voisinage de  $x'$ ,  $\tilde{\pi}: \tilde{X}' \rightarrow \bar{X}'$  sa normalisation,  $\bar{X}'$  étant muni de sa conjugaison canonique  $\bar{\sigma}$  (proposition 2); tous les points (en nombre fini) de  $\tilde{\pi}^{-1}(x')$  sont fixes par  $\bar{\sigma}$  (car  $\mathcal{O}_{X',x}$  est ordonnable), et si  $x''_1$  est un de ces points,  $\mathcal{O}_{X',x''_1}$  est isomorphe au complexifié de l'un des  $\mathcal{O}_i$ ,  $\mathcal{O}_1$  par exemple (proposition 2).

Mais, pour les points  $y$  de  $D$  voisins de  $x'$ , la même remarque est applicable, car, d'après b),  $\mathcal{O}_{X',y}$  est aussi ordonnable; l'image réciproque de  $\tilde{D}$  par  $\pi'$  a donc une partie réelle (i.e. fixe par  $\bar{\sigma}$ ) de dimension  $n-1$  (puisqu'elle s'envoie surjectivement sur  $|D|$ ) au voisinage de  $x''_1$ , ce qui implique que  $\sqrt{I\mathcal{O}_1} = \sqrt{g_1 \mathcal{O}_1}$  est réel puisqu'il est premier (proposition 1). c.q.f.d.

*Remarque 2.* On peut voir facilement que la réciproque de la proposition 5 n'est pas vraie. Voici cependant l'exemple d'un idéal ne vérifiant pas l'hypothèse de la proposition 5, et pour lequel  $P(I)$  n'est pas vérifiée. Prenons  $\mathcal{O} = \mathbf{R}\{x, y\}$ ,  $I = (x^2 + y^2, y^5)$ .

La courbe  $(C_z)$  d'équation:  $z(x^2 + y^2) - y^5 = 0$  n'a des points réels autres que l'origine que pour  $z=0$ .

L'éclatement  $X'$  est défini par l'anneau:  $\mathbf{R}\{x, y\}[z]/(z(x^2 + y^2) - y^5)$ , le diviseur  $D$  a pour ensemble sous-jacent l'axe des  $z$ , et le seul point  $x'$  de  $D$  où  $\mathcal{O}_{X',x}$  soit ordonnable est l'origine.

Il est facile de voir que  $P(I)$  n'est pas vérifiée (cf. Remarque 1).

*Remarque 3.* On pourrait se poser la question suivante: soit  $(f) \subset \mathbf{R}\{x_1, \dots, x_n\}$  un idéal réel tel que l'idéal Jacobien de  $f$ ,  $J(f)$  soit primaire pour l'idéal maximal ( $\tilde{f}$  est alors une hypersurface à singularité isolée): a-t-on  $\alpha(f, J(f)) = \beta(f, J(f))$ ? (ou même, la propriété  $P(J(f))$  est-elle vraie?)

La réponse est négative comme le montre l'exemple suivant, aimablement communiqué par M. Merle:  $f = y^5 - x^{12} + yx^{10} \in \mathbf{R}\{X, Y\}$ .

La courbe  $J(f)_\lambda$  («courbe polaire associée à  $f$ ») n'est pas réelle, car son équation est:  $5y^4 + x^{10} + \lambda(-12x^{11} + 10yx^9) = 0$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [H<sub>1</sub>] HIRONAKA, H., *Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps*: Cours à l'Istituto Matematico L. Tonelli de l'Université de Pise (1973).  
 [H<sub>2</sub>] HIRONAKA, H., *Sub-analytic sets; Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, in honor of Y. Akisuki, Tokyo, 1973 (435-493).

- [H<sub>3</sub>] HÖRMANDER, L., *On the division of distributions by polynomials*, Ark. Mat. 3, 555–568 (1958).
- [K] KUO, T. C., *Computation of Łojasiewicz's exponent of  $f(x, y)$* , Comment Math. Helv. 49/2, 1974.
- [L] ŁOJASIEWICZ, S., *Ensembles semi-analytiques*, polycopié IHES Bures sur Yvette, 1965.
- [L-T] LEJEUNE-TEISSIER, Séminaire 1974 à l'Ecole Polytechnique, à paraître chez Springer.
- [R] RISLER, J. J., *Thèse – Paris VII*, à paraître.

*Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique,  
17, Rue Descartes – 75230,  
Paris Cedex 05,  
France.*

Reçu le 18 Mars 1975

