

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	50 (1975)
<b>Artikel:</b>	Approximative Funktionalgleichungen und Mittelwertsätze für Dirichletreihen, die Spitzenformen assoziiert sind.
<b>Autor:</b>	Good, A.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-38813">https://doi.org/10.5169/seals-38813</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Approximative Funktionalgleichungen und Mittelwertsätze für Dirichletreihen, die Spitzenformen assoziiert sind

von A. GOOD

## TEIL I

### 1. Einleitung

Bezeichnet  $\tau(n)$  die Ramanujansche Funktion, so stellen sich bei der Funktion  $L_\tau(s)$  der komplexen Variablen  $s=\sigma+it$ , die durch  $L_\tau(s)=\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) n^{-s}$ ,  $\sigma>6\frac{1}{2}$ , definiert ist, ähnliche Probleme wie bei der Riemannschen Zetafunktion  $\zeta(s)$ .  $L_\tau(s)$  ist bekanntlich eine ganze Funktion, die der Funktionalgleichung

$$(2\pi)^{-s} \Gamma(s) L_\tau(s) = (2\pi)^{s-12} \Gamma(12-s) L_\tau(12-s) \quad (1)$$

genügt, und besitzt auch ein Eulersches Produkt. Ebenso kann man von einer Riemannschen und Lindelöfschen Vermutung für  $L_\tau(s)$  mit kritischer Linie  $\sigma=6$  sprechen. Letztere besagt, dass für  $l=1, 2, \dots$  und jedes  $\varepsilon>0$

$$\frac{1}{T} \int_0^T |L_\tau(6+it)|^{2l} dt = O(T^\varepsilon), \quad T \rightarrow \infty.$$

Diese Vermutungen sind noch nicht entschieden. Für  $l=1$  jedoch werden wir in Teil II sogar beweisen, dass ein  $C>0$  derart existiert, dass

$$\frac{1}{T} \int_0^T |L_\tau(\sigma+it)|^2 dt = \begin{cases} C \log T + O(1), & \sigma=6, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \tau^2(n) n^{-2\sigma} + O(T^{12-2\sigma}), & 6 < \sigma < 6\frac{1}{2}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \tau^2(n) n^{-2\sigma} + O(T^{-1} \log^2 T), & \sigma=6\frac{1}{2}, \end{cases} \quad (2)$$

wenn  $T \rightarrow \infty$ . Im Falle der Riemannschen Zetafunktion kennt man nach Hardy, Littlewood und Ingham bei den entsprechenden Mittelwerten asymptotische Formeln

für  $l=1, 2$ . Nach der Theorie von K. Chandrasekharan und R. Narasimhan [1] für Dirichletreihen, deren Summenfunktionen Funktionalgleichungen besitzen, entspricht der Fall  $l=2$  bei  $\zeta(s)$  dem Fall  $l=1$  bei  $L_\tau(s)$ .

Nach Riemann folgt die Funktionalgleichung von  $\zeta(s)$  aus dem Transformationsverhalten einer Thetafunktion. Die entsprechende Rolle übernimmt bei  $L_\tau(s)$  die Funktion

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi i n z}, \quad \Im z > 0,$$

die eine Spitzenform vom Gewicht 12 bezüglich der Modulgruppe ist. Sind nun  $k, N$  positiv ganz, und assoziert man einer Spitzenform der Art  $(-k, N)$  im Sinne von [8] die Dirichletreihe, deren Koeffizienten die Fourierkoeffizienten der Spitzenform im Punkt  $\infty$  sind, so definiert diese Dirichletreihe nach der Theorie von E. Hecke [7] eine ganze Funktion und genügt einer Funktionalgleichung der Art (1). Deshalb werden wir jeweilen gerade die volle Klasse solcher Funktionen untersuchen. Es wird sich zeigen, dass für den quadratischen Mittelwert dieser Funktionen eine asymptotische Formel der Gestalt (2) ebenfalls gilt.

Als ein wesentliches Hilfsmittel beim Beweis von (2) benötigen wir eine Darstellung von  $L_\tau(s)$  im kritischen Streifen  $5\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 6\frac{1}{2}$  durch eine sogenannte approximative Funktionalgleichung. Bezeichnet  $\xi$  die charakteristische Funktion des Intervalls  $[0, 1]$ , so ist dies nach den klassischen Beispielen  $\zeta(s)$  und  $\zeta^2(s)$  von Hardy und Littlewood [5] eine Gleichung der Gestalt

$$L_\tau(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) n^{-s} \xi\left(\frac{2\pi n}{|t|}\right) + (2\pi)^{2s-12} \frac{\Gamma(12-s)}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) n^{s-12} \xi\left(\frac{2\pi n}{|t|}\right) + R(s), \quad (3)$$

wobei  $R(s)$  für  $5\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 6\frac{1}{2}$  und  $|t| \rightarrow \infty$  als Restglied der rechten Seite von (3) betrachtet werden kann. Dass für eine Dirichletreihe eine Funktionalgleichung der Art [1] eine approximative Funktionalgleichung zur Folge hat, bewiesen Chandrasekharan und Narasimhan für eine grosse Klasse solcher Funktionen. Sie benutzten dieses Resultat gleich zur Abschätzung des quadratischen Mittelwertes der Dedekindschen Zetafunktion eines algebraischen Zahlkörpers im kritischen Streifen. Einerseits war jedoch das Restglied in ihren approximativen Funktionalgleichungen bei Dirichletreihen, deren Koeffizienten nicht alle nichtnegativ waren, wie z.B. bei  $L_\tau(s)$ , grösser als erwartet. Andererseits galten ihre Abschätzungen nicht gleichmässig in weiteren Parametern, z.B. bei Dirichlets  $L$ -Reihen  $L(s, \chi)$  gleichmässig im Modul von  $\chi$ . In umfangreichen Abschätzungen gelang es A. F. Lavrik [11], [12], inspiriert durch Yu. V. Linniks Darstellung [13], [14] von  $L(s, \chi)$  im kritischen Streifen für  $|t| \leq 1$ ,

diese Nachteile zu beheben. Um mit Hilfe des grossen Siebes Mittelwertsätze von Linniks Art [13], [14] zu beweisen, hat M. N. Huxley [9], [10] bei den  $L$ -Reihen algebraischer Körper eine Idee von H. L. Montgomery weiterentwickelt. Diese führt ohne allzu grosse Abschätzungen von den Funktionalgleichungen zu approximativen Funktionalgleichungen dieser Funktionen, gleichmässig in wichtigen Parametern. Nach Montgomery ersetzt man im ersten resp. zweiten Hauptterm von (3) das klassische  $\xi(\varrho)$  durch spezielle Gewichtsfunktionen  $\tilde{\xi}(\varrho)$  resp.  $\tilde{\xi}_0(\varrho, s)$ , wodurch das Restglied verkleinert wird. Versucht man jedoch, daraus die klassische Gestalt der approximativen Funktionalgleichung [5] zu erhalten, so ergibt sich ein Restglied von derselben Größenordnung wie die Hauptterme. Andererseits ist natürlich im klassischen Falle das Restglied mindestens von der Größenordnung der letzten Summanden in den Hauptterminen. Bei  $\zeta(s)$  hat C. L. Siegel [17] in seiner Arbeit über Riemanns Nachlass für das klassische Restglied die asymptotische Entwicklung

$$R\left(\frac{1}{2}+it\right)=t^{-1/4}(g_1(t)+t^{-1/2}g_2(t)+\cdots+t^{-(l-1)/2}g_l(t)+O(|t|^{-l/2})), \quad |t|\rightarrow\infty, \quad (4)$$

gegeben, wobei  $l$  beliebig positiv ganz ist, und  $g_j(t), j=1, 2, \dots$ , beschränkte Funktionen von  $t$  sind. Ein entsprechendes Resultat ist nur noch für Dirichlets  $L$ -Reihen  $L(s, \chi)$  bekannt [3], [18]. Siegels Resultat hat sich bei der numerischen Berechnung der Nullstellen von  $\zeta(s)$  als nützlich erwiesen.

Unser Ziel ist es hier, für approximative Funktionalgleichungen mit gewichteten Hauptterminen eine Entwicklung zu beweisen, die (4) in gewissen Punkten ähnlich ist. Ersetzen wir nämlich in (3)  $\xi$  durch Gewichtsfunktionen  $\varphi$  resp.  $\varphi_0$  (Definition siehe §2), die durch  $\varphi_0(\varrho)=1-\varphi(1/\varrho)$  verknüpft sind, so gilt in (3) nach Satz (iii) und Korollar 1

$$R(6+it)=t^{-1}h_1(t)+t^{-2}h_2(t)+\cdots+t^{-l}h_l(t)+O(|t|^{-l-1/2}), \quad |t|\rightarrow\infty, \quad (5)$$

wobei  $l$  genügend gross positiv ganz ist,  $h_j$  beliebig oft differenzierbar und

$$h_j(t)=O(|t|^{1/2}), \quad |t|\rightarrow\infty, \quad j=1, 2, \dots$$

Siegels Formel liegt dennoch tiefer als (5). Aus den explizit gegebenen Funktionen  $g_j$  ersieht man nämlich sofort, dass die Potenzen von  $t$  in (4) nicht verbessert werden können. Da wir für die Funktionen  $h_j$  die genaue Größenordnung nicht kennen, braucht dies in (5) nicht der Fall zu sein. Die Definition der  $h_j$  lässt aber dennoch erwarten, dass sich (5) ebenfalls bei der Gewinnung numerischer Resultate verwenden lässt.

Weiter ist die Konstante, die durch den  $O$ -Term in Satz (ii) implizit gegeben ist,

unabhängig von  $\varphi$ . Dies gibt uns eine grosse Freiheit in der Wahl von  $\varphi$  und  $\varphi_0$ , und erlaubt uns – auf  $\zeta(s)$  und  $\zeta^2(s)$  übertragen – das klassische Restglied bis auf einen Faktor  $|t|^\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , ebenfalls zu erhalten (Korollar 2). Schliesslich wird die approximative Funktionalgleichung gebraucht, um die Grössenordnung der Funktionen im kritischen Streifen abzuschätzen. Als Spezialfall von Korollar 3 erhalten wir

$$L_\tau(6+it) = O(|t|^{1/2}), \quad |t| \rightarrow \infty.$$

Unsere Ausführungen lassen sich unter sinngemässen Voraussetzungen auch auf Dirichletreihen übertragen, die eine Funktionalgleichung im Sinne von [1] erfüllen.

Diese Arbeit ist ein etwas überarbeiteter Teil meiner Dissertation, die ich bei Prof. K. Chandrasekharan geschrieben habe. Ich möchte ihm hier für seine Ermutigungen und seine Unterstützung danken.

## 2. Formulierung der Resultate

Seien  $k$  und  $N$  positive ganze Zahlen. In Lemma 1 fassen wir Eigenschaften von Spitzenformen der Art  $(-k, N)$  im Sinne von Hecke [8] zusammen, die hier ohne Beweis gebraucht werden.

**LEMMA 1.** (Hecke [7], [8]). *Sind  $H$  und  $H_0$  zwei Spitzenformen der Art  $(-k, N)$  im Sinne von [8], welche die Fourierentwicklungen*

$$H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z / N}, \quad H_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{2\pi i n z / N}, \quad \Im z > 0,$$

*besitzen und in der oberen Halbebene der Gleichung*

$$H_0(z) = (-iz)^{-k} H\left(-\frac{1}{z}\right)$$

*genügen, gilt*

$$\sum_{n \leq x} |a_n| = O(x^{(k+1)/2}), \quad \sum_{n \leq x} |b_n| = O(x^{(k+1)/2}), \quad x \rightarrow \infty.$$

*Durch partielle Summation folgt daraus sofort*

$$\sum_{n \leq x} |a_n| n^{-\sigma} = \begin{cases} O(x^{(k+1)/2 - \sigma}), & \text{gleichmässig für } \sigma \leq \sigma_0 < (k+1)/2, \\ O(\log x), & \sigma = (k+1)/2, \end{cases}$$

$$\sum_{n \geq x} |a_n| n^{-\sigma} = O(x^{(k+1)/2-\sigma}), \text{ gleichmäßig für } \sigma \geq \sigma_1 > (k+1)/2, \text{ wenn } x \rightarrow \infty,$$

und entsprechende Resultate gelten für  $\sum |b_n| n^{-\sigma}$ .

(ii) Die  $H$  respektive  $H_0$  assoziierten Dirichletreihen

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad F_0(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$$

konvergieren für  $\sigma > (k+1)/2$  absolut. Sie lassen sich zu ganzen Funktionen in  $s$  fortsetzen und genügen der Funktionalgleichung

$$\left(\frac{2\pi}{N}\right)^{-s} \Gamma(s) F(s) = \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{s-k} \Gamma(k-s) F_0(k-s).$$

Wir führen nun noch einige Definitionen und Bezeichnungen ein:

Eine Funktion  $\varphi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gehört zur Klasse  $\mathfrak{K}$  unserer Gewichtsfunktionen, wenn  $\varphi$  unendlich oft differenzierbar ist und

$$\varphi(\varrho) = 1, \quad \text{wenn } 0 \leq \varrho \leq \frac{1}{2}, \quad \varphi(\varrho) = 0, \quad \text{wenn } \varrho \geq 2.$$

Wir definieren eine Abbildung von  $\mathfrak{K}$  auf  $\mathfrak{K}$  durch  $\varphi \mapsto \varphi_0$ , wobei

$$\varphi_0(\varrho) = 1 - \varphi(1/\varrho)$$

ist. Für  $\varphi$  aus  $\mathfrak{K}$  und  $w = u + iv$  setzen wir

$$K_\varphi(w) = w \int_0^\infty \varphi(\varrho) \varrho^{w-1} d\varrho, \quad u > 0.$$

$\varphi^{(j)}$  bezeichne die  $j$ -te Ableitung von  $\varphi$  und  $\|\varphi^{(j)}\|_1$  die  $L_1$ -Norm von  $\varphi^{(j)}$ . Ist  $x > 0$ ,  $t \neq 0$ ,  $\varphi$  aus  $\mathfrak{K}$  und  $F$  wie in Lemma 1, so definieren wir mit  $\operatorname{sgn} t = t/|t|$

$$\begin{aligned} G(s, x; \varphi, F) &= \frac{1}{2\pi i \Gamma(s)} \int_{((k/2)+1-\sigma)}^{} \Gamma(s+w) F(s+w) \frac{K_\varphi(w)}{w} \\ &\quad \times \left( \frac{xN}{2\pi} \exp\left(-i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t\right) \right)^w dw, \end{aligned}$$

wobei für reelle  $u \int_{(u)}$  Integration über den Weg  $w=u+iv$ ,  $v$  wachsend, bezeichnet. Schliesslich setzen wir für  $\varrho > 0$ ,  $t \neq 0$  und  $j=0, 1, \dots$

$$\gamma_j(s, \varrho) = \frac{1}{2\pi i \Gamma(s)} \int_{\mathfrak{F}} \Gamma(s+w) \frac{\left(\varrho \exp\left(-i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t\right)\right)^w}{w(w+1)\cdots(w+j)} dw, \quad (6)$$

wo  $\mathfrak{F}$  eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve ist, die von den Polen des Integranden genau die Punkte  $w=0, -1, \dots, -j$  umschliesst.

Wir können nun folgenden Satz aussprechen:

**SATZ.** *Sei  $x > 0$ ,  $\varphi$  aus  $\mathfrak{K}$  und  $F, F_0$  wie in Lemma 1. Dann gilt:*

(i)  *$F$  lässt sich im kritischen Streifen  $(k-1)/2 \leq \sigma \leq (k+1)/2$  darstellen als*

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{-s} \Gamma(s) F(s) &= \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{-s} \Gamma(s) G(s, x; \varphi, F) \\ &\quad + \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{s-k} \Gamma(k-s) G\left(k-s, \frac{1}{x}; \varphi_0, F_0\right). \end{aligned}$$

(ii) *Wenn  $y=xN|t|/2\pi$  ist, besitzt  $G$  für  $l > (k+1)/2$  die Entwicklungen*

$$\begin{aligned} G(s, x; \varphi, F) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \left\{ \sum_{j=0}^l \varphi^{(j)}\left(\frac{n}{y}\right) \left(-\frac{n}{y}\right)^j \gamma_j(s, |t|^{-1}) \right\} \\ &\quad + O(\|\varphi^{(l+1)}\|_1 y^{(k+1)/2-\sigma} |t|^{-l/2}), \quad |t| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

*gleichmässig für  $(k-1)/2 \leq \sigma \leq (k+1)/2$  und alle  $\varphi$  aus  $\mathfrak{K}$ .*

(iii)  *$\gamma_j(s, |t|^{-1})$ ,  $j=0, 1, 2, \dots$ , sind rationale Funktionen von  $t$ , deren Koeffizienten von  $\sigma$  abhängig sind. Es ist*

$$\gamma_0(s, \varrho) \equiv 1$$

*und für  $j=1, 2, \dots$*

$$\gamma_j(s, |t|^{-1}) = t^{-m} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} C_{jn}(\sigma) t^{-n} \right\},$$

*wenn  $|t|$  genügend gross. Dabei ist die ganze Zahl  $m \geq j/2$  und die  $C_{jn}$  als Funktionen von  $\sigma$  bleiben beschränkt, wenn  $(k-1)/2 \leq \sigma \leq (k+1)/2$ .*

*Bemerkungen:* (1) Die Einschränkung, dass die Entwicklungen in (ii) erst für genügend grosse  $l$  gelten, ist nicht wesentlich. Durch eine etwas kompliziertere Definition der Funktionen  $G$  und  $\gamma_j$ , liessen sich analoge Entwicklungen für alle  $l \geq 1$  beweisen. Da wir dies weiter nicht benötigen, haben wir der Einfachheit halber darauf verzichtet.

(2) Falls in (iii)  $j$  ungerade ist, gilt natürlich  $m > j/2$ . Der Fall  $j=2$  zeigt jedoch, dass die Schranke  $m \geq j/2$  i.a. nicht verbessert werden kann.

**KOROLLAR 1.** Unter den Voraussetzungen des Satzes ist für  $(4\pi^2/N^2) y_1 y_2 = t^2$  und  $l > (k+1)/2$

$$\begin{aligned} F(s) = & \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \varphi\left(\frac{n}{y_1}\right) + \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{2s-k} \frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{s-k} \varphi_0\left(\frac{n}{y_2}\right) \\ & + \sum_{j=1}^l \gamma_j(s, |t|^{-1}) \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \varphi^{(j)}\left(\frac{n}{y_1}\right) \left(-\frac{n}{y_1}\right)^j \\ & + \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{2s-k} \frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(s)} \sum_{j=1}^l \gamma_j(k-s, |t|^{-1}) \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{s-k} \varphi_0^{(j)}\left(\frac{n}{y_2}\right) \left(-\frac{n}{y_2}\right)^j \\ & + O(\|\varphi^{(l+1)}\|_1 y_1^{(k+1)/2-\sigma} |t|^{-l/2}) + O(\|\varphi_0^{(l+1)}\|_1 y_1^{(k/2)-\sigma} y_2^{\frac{l}{2}} |t|^{-l/2}), \quad |t| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

gleichmässig für  $(k-1)/2 \leq \sigma \leq (k+1)/2$  und  $\varphi$  aus  $\mathfrak{K}$ .

**KOROLLAR 2.** Es seien die Voraussetzungen des Satzes erfüllt und  $y_1 = y_2 = N|t|/2\pi$ . Existiert für ein  $\alpha$  mit  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  ein  $\beta > 0$  derart, dass

$$\sum_{x \leq n \leq x(1+x^{-\alpha})} |a_n|^2 = O(x^{k-\beta}), \quad \sum_{x \leq n \leq x(1+x^{-\alpha})} |b_n|^2 = O(x^{k-\beta}), \quad x \rightarrow \infty,$$

dann gilt

$$F(s) = \sum_{n \leq y_1} a_n n^{-s} + \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{2s-k} \frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(s)} \sum_{n \leq y_2} b_n n^{s-k} + O(|t|^{(k+1)/2-\sigma-(\alpha+\beta)/2}), \quad |t| \rightarrow \infty, \quad (7)$$

gleichmässig für  $(k-1)/2 \leq \sigma \leq (k+1)/2$ . Wählen wir insbesondere  $\alpha = \frac{1}{2} - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  genügend klein, so können wir nach R. A. Rankin [16]  $\beta = \frac{2}{3}$ , respektive nach der kürzlich von P. Deligne [2] bewiesenen Vermutung von Ramanujan-Petersson  $\beta = \frac{1}{2} - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , wählen. Dies ergibt für das Restglied in (7) die Abschätzungen

$$O(|t|^{(k/2)+1/20+\varepsilon-\sigma}), \quad \text{resp.} \quad O(|t|^{(k/2)+\varepsilon-\sigma}), \quad |t| \rightarrow \infty, \quad \varepsilon > 0.$$

**KOROLLAR 3.** Ist  $F$  eine ganze Funktion, die durch die Dirichletreihe definiert ist, welche einer Spitzenform der Art  $(-k, N)$  assoziiert ist, so gilt für jedes  $\varepsilon > 0$

$$F(\sigma + it) = \begin{cases} O(|t| \log |t|), & \sigma = (k-1)/2, \\ O(|t|^{(k+1)/2 - \sigma}), & \text{gleichmäßig für } (k-1)/2 + \varepsilon \leq \sigma \leq (k+1)/2 - \varepsilon, \\ O(\log |t|), & \sigma = (k+1)/2, \end{cases}$$

wenn  $|t| \rightarrow \infty$  strebt.

### 3. Hilfssätze

Zum Beweis des Satzes benötigen wir noch

**LEMMA 2.** Sei  $s = \sigma + it$ ,  $w = u + iv$  und bezeichne  $D_1$  einen vertikalen Streifen endlicher Breite in der  $s$ -Ebene. Ist  $D_2$  der Halbstreifen  $\sigma < \frac{1}{2}$ ,  $-1 < t < 1$ , so existieren Zahlen  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$ , sodass für  $|t| \geq c_1$

$$\left| \frac{\Gamma(s+w)}{\Gamma(s)} \exp\left(-i \frac{\pi}{2} w \operatorname{sgn} t\right) \right| \leq c_2 |t|^{1/2-\sigma} (1+|t+v|)^{\sigma+u-1/2},$$

wenn  $s$  in  $D_1$  und  $s+w$  in  $D_1 - D_2$ . Gilt jedoch  $|w| \leq c_3 |t|^{1/2}$  für ein  $c_3 > 0$ , dann ist

$$\frac{\Gamma(s+w)}{\Gamma(s)} \exp\left(-i \frac{\pi}{2} w \operatorname{sgn} t\right) = O(|t|^u), \quad \text{wenn } |t| \rightarrow \infty,$$

gleichmäßig für  $s$  in  $D_1$ .

**Beweis.** Gleichmäßig in einem vertikalen Streifen endlicher Breite gilt die Stirlingsche Formel

$$|\Gamma(s)| = (2\pi)^{1/2} \exp\left(-\frac{\pi}{2}|t|\right) |t|^{\sigma-1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{|t|}\right)\right), \quad |t| \rightarrow \infty,$$

Wir wählen  $c_1$  so, dass für  $|t| \geq c_1$  und  $|t+v| \geq c_1$

$$\left| \frac{\Gamma(s+w)}{\Gamma(s)} \right| \leq 2 \frac{\exp\left(-\frac{\pi}{2}|t+v|\right) |t+v|^{\sigma+u-1/2}}{\exp\left(-\frac{\pi}{2}|t|\right) |t|^{\sigma-1/2}},$$

und  $c_2$  so, dass

$$\left| \frac{\Gamma(s+w)}{\Gamma(s)} \right| \leq c_2 \exp\left(-\frac{\pi}{2}(|t+v|-|t|)\right) |t|^{1/2-\sigma} (1+|t+v|)^{\sigma+u-1/2}, \quad \text{wenn } |t| \geq c_1.$$

Da

$$\left| \exp\left(-\frac{\pi}{2}(|t+v|-|t|+iw \operatorname{sgn} t)\right) \right| = \exp\left(-\frac{\pi}{2}(|t+v|-|t|-v \operatorname{sgn} t)\right)$$

und

$$|t+v|-|t|-v \operatorname{sgn} t = (t+v)(\operatorname{sgn}(t+v)-\operatorname{sgn} t) \geq 0$$

ist, haben wir den ersten Teil bewiesen. Für den zweiten Teil verwenden wir die Stirlingsche Formel in folgender Form

$$\Gamma(s+w) = (2\pi)^{1/2} \exp((s+w-\frac{1}{2}) \log(s+w) - (s+w)) (1 + O(|s+w|^{-1})), \quad |s+w| \rightarrow \infty,$$

gleichmässig für  $|\arg(s+w)| \leq \pi - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Aus  $w = O(|t|^{1/2})$  folgt

$$\log(s+w) = \log s + \frac{w}{s} + O(|t|^{-1}), \quad |t| \rightarrow \infty,$$

und

$$\begin{aligned} \log s &= \log |s| + i \operatorname{arctg} \frac{t}{\sigma} = \log |t| + O(|t|^{-2}) + i \left( \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t - \operatorname{arctg} \frac{\sigma}{t} \right) \\ &= \log |t| + i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t + O(|t|^{-1}), \quad |t| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

gleichmässig für  $s$  in  $D_1$ . Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(s+w)}{\Gamma(s)} \exp\left(-i \frac{\pi}{2} w \operatorname{sgn} t\right) &= O\left(\left|\exp((s+w-\frac{1}{2}) \log s)\right| \exp\left(\frac{\pi}{2}(|t|+v \operatorname{sgn} t)\right) |t|^{1/2-\sigma}\right) \\ &= O\left(|t|^u \exp\left(-\frac{\pi}{2}(t+v) \operatorname{sgn} t + \frac{\pi}{2}(|t|+v \operatorname{sgn} t)\right)\right) \\ &= O(|t|^u), \quad |t| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

wie behauptet.

**LEMMA 3.** Ist  $\varphi$  aus  $\mathfrak{K}$ , so lässt sich  $K_\varphi(w)$  analytisch in die ganze  $w$ -Ebene fortsetzen und  $K_\varphi(0) = 1$ .  $K_\varphi$  genügt der Funktionalgleichung

$$K_\varphi(-w) = K_{\varphi_0}(w)$$

und besitzt für  $l=0, 1, 2, \dots$  die absolut konvergenten Integraldarstellungen

$$K_\varphi(w) = \frac{(-1)^{l+1}}{(w+1)(w+2)\dots(w+l)} \int_0^\infty \varphi^{(l+1)}(\varrho) \varrho^{w+l} d\varrho.$$

(ein leeres Produkt ist durch 1 zu ersetzen).

*Beweis.* Für  $w > 0$  ergibt sich mit partieller Integration

$$\begin{aligned} K_\varphi(w) &= w \int_0^\infty \varphi(\varrho) \varrho^{w-1} d\varrho = \varphi(\varrho) \varrho^w \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \varphi^{(1)}(\varrho) \varrho^w d\varrho \\ &= - \int_0^\infty \varphi^{(1)}(\varrho) \varrho^w d\varrho = - \int_{1/2}^2 \varphi^{(1)}(\varrho) \varrho^w d\varrho. \end{aligned} \tag{8}$$

Das letzte Integral ist für jedes komplexe  $w$  absolut konvergent und gibt die analytische Fortsetzung von  $K_\varphi(w)$  in die ganze  $w$ -Ebene. Es ist

$$K_\varphi(0) = - \int_{1/2}^2 \varphi^{(1)}(\varrho) d\varrho = -(\varphi(2) - \varphi(\tfrac{1}{2})) = \varphi(\tfrac{1}{2}) = 1$$

und

$$\begin{aligned} K_\varphi(-w) &= - \int_{1/2}^2 \varphi^{(1)}(\varrho) \varrho^{-w} d\varrho = - \int_{1/2}^2 \varphi^{(1)}(1/\varrho) \varrho^{w-2} d\varrho \\ &= - \int_{1/2}^2 \varphi_0^{(1)}(\varrho) \varrho^w d\varrho = K_{\varphi_0}(w). \end{aligned}$$

Weitere partielle Integrationen der rechten Seite von (8) ergeben die gewünschten Integraldarstellungen von  $K_\varphi$ , da für  $j=1, 2, \dots$ ,  $\varphi^{(j)}(\varrho)=0$ , wenn  $0 \leq \varrho \leq \frac{1}{2}$  oder  $\varrho \geq 2$ .

**LEMMA 4.** (i) Für die durch (6) definierten Funktionen  $\gamma_j, j=0, 1, \dots$ , gilt die Abschätzung

$$\gamma_j(s, |t|^{-1}) = O(|t|^{-j/2}), \quad |s| \rightarrow \infty,$$

gleichmässig für  $\sigma$  in einem endlichen Intervall.

(ii) Für  $\varphi$  aus  $\mathfrak{K}$  und  $\mu > 0$ ,  $v > 0$ ,  $l = 0, 1, \dots$  ist

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i \Gamma(s)} \int_{\mathfrak{F}} \Gamma(s+w) \frac{(-1)^{l+1}}{w(w+1)\dots(w+l)} \int_{\mu}^{\infty} \varphi^{(l+1)}(\varrho) \varrho^{w+l} d\varrho \left( v \exp\left(-i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t\right) \right)^w dw \\ &= \sum_{j=0}^l \varphi^{(j)}(\mu) (-\mu)^j \gamma_j(s, \mu v), \end{aligned}$$

wenn die Kurve  $\mathfrak{F}$  dieselben Eigenschaften hat wie der Integrationsweg in (6).

*Beweis.* (i) In der Definition (6) von  $\gamma_j$  dürfen wir, wenn  $|t| > \max(1, j^2)$ , für  $\mathfrak{F}$  den Kreis  $|w| = |t|^{1/2}$  nehmen. Dann ist nach Lemma 2, zweiter Teil,

$$\begin{aligned} |\gamma_j(s, |t|^{-1})| &\leq \int_{\mathfrak{F}} \left| \frac{\Gamma(s+w)}{\Gamma(s)} \exp\left(-i \frac{\pi}{2} w \operatorname{sgn} t\right) \right| \frac{|t|^{-w}}{|w(w+1)\dots(w+j)|} |dw| \\ &= O\left(\int_{\mathfrak{F}} |t|^{-(j+1)/2} |dw|\right) = O(|t|^{-j/2}), \quad \text{wenn } |s| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

(ii) Mit partiellen Integrationen erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mu}^{\infty} \varphi^{(l+1)}(\varrho) \varrho^{w+l} d\varrho &= -\varphi^{(l)}(\mu) \mu^{w+l} - (w+l) \int_{\mu}^{\infty} \varphi^{(l)}(\varrho) \varrho^{w+l-1} d\varrho \\ &= \sum_{j=0}^l (-1)^{j+1} \varphi^{(l-j)}(\mu) \mu^{w+l-j} (w+l)(w+l-1)\dots(w+l-j+1) \\ &\quad + (-1)^{l+1} (w+l)(w+l-1)\dots(w+1) w \int_{\mu}^{\infty} \varphi(\varrho) \varrho^{w-1} d\varrho. \end{aligned}$$

Da  $\mu > 0$  ist, definiert  $\int_{\mu}^{\infty} \varphi(\varrho) \varrho^{w-1} d\varrho$  eine ganze Funktion von  $w$ . Also ist

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i \Gamma(s)} \int_{\mathfrak{F}} \Gamma(s+w) \frac{(-1)^{l+1}}{w(w+1)\dots(w+l)} \int_{\mu}^{\infty} \varphi^{(l+1)}(\varrho) \varrho^{w+l} d\varrho \left( v \exp\left(-i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t\right) \right)^w dw \\ &= \frac{1}{2\pi i \Gamma(s)} \int_{\mathfrak{F}} \Gamma(s+w) \sum_{j=0}^l \varphi^{(l-j)}(\mu) \mu^{w+l-j} (-1)^{l-j} \frac{\left(v \exp\left(-i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t\right)\right)^w}{w(w+1)\dots(w+l-j)} dw \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^l \varphi^{(j)}(\mu) (-\mu)^j \frac{1}{2\pi i \Gamma(s)} \int_{\mathfrak{F}} \Gamma(s+w) \frac{\left( \mu v \exp\left(-i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t\right) \right)^w}{w(w+1)\dots(w+j)} dw,$$

was zu beweisen war.

#### 4. Beweis des Satzes

Sei  $(k-1)/2 \leq \sigma \leq (k+1)/2$  und  $x > 0, T > 0$ . Bezeichne  $\mathfrak{C}_{\sigma, T}$  das Rechteck in der  $w$ -Ebene mit den Ecken  $(k/2)+1-\sigma-iT, (k/2)+1-\sigma+iT, (k/2)-1-\sigma+iT, (k/2)-1-\sigma-iT$  in dieser Reihenfolge. Ist  $\varphi$  aus  $\mathfrak{K}$  und  $F$  nach Lemma 1 einer Spitzenform der Art  $(-k, N)$  assoziiert, so gilt, da  $K_\varphi(0)=1$  ist,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{-s} \Gamma(s) F(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_{\sigma, T}} \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{-(s+w)} \Gamma(s+w) F(s+w) \frac{K_\varphi(w)}{w} \\ &\quad \times \left(x \exp\left(-i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t\right)\right)^w dw. \end{aligned} \quad (9)$$

Denn mit  $F(s)$  ist wegen der Funktionalgleichung auch  $\Gamma(s) F(s)$  eine ganze Funktion von  $s$ . Weil für festes  $s$

$$\begin{aligned} &\Gamma(s+w) F(s+w) \exp\left(-i \frac{\pi}{2} w \operatorname{sgn} t\right) \\ &= \begin{cases} O(|v|^{\sigma+u-1/2}), & |v| \rightarrow \infty, \text{ wenn } \sigma+u > (k+1)/2, \\ O(|v|^{k-\sigma-u-1/2}), & |v| \rightarrow \infty, \text{ wenn } \sigma+u < (k-1)/2, \end{cases} \end{aligned}$$

gleichmässig für  $(k/2)-1-\sigma \leq u \leq (k/2)+1-\sigma$ , ist nach dem Phragmén-Lindelöf Prinzip

$$\Gamma(s+w) F(s+w) \exp\left(-i \frac{\pi}{2} w \operatorname{sgn} t\right) = O(|v|^{(k+1)/2}), \quad |v| \rightarrow \infty,$$

gleichmässig für  $(k/2)-1-\sigma \leq u \leq (k/2)+1-\sigma$ . Nach Lemma 3 ist für  $l=1, 2, \dots$

$$\frac{K_\varphi(w)}{w} = O(|v|^{-l}), \quad |v| \rightarrow \infty,$$

gleichmässig für  $|u| \leq \frac{3}{2}$ . Aus (9) erhalten wir also, wenn  $T \rightarrow \infty$  strebt

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{-s} \Gamma(s) F(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{((k/2)+1-\sigma)}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{-(s+w)} \Gamma(s+w) F(s+w) \frac{K_\varphi(w)}{w} \\ &\quad \times \left( x \exp\left(-i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t\right) \right)^w dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{((k/2)-1-\sigma)}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{-(s+w)} \\ &\quad \times \Gamma(s+w) F(s+w) \frac{K_\varphi(w)}{w} \left( x \exp\left(-i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t\right) \right)^w dw. \end{aligned}$$

Auf den zweiten Summanden wenden wir jetzt die Funktionalgleichung von  $F$  an und ersetzen  $w$  durch  $-w$ . So ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{-s} \Gamma(s) F(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{((k/2)+1-\sigma)}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{-(s+w)} \Gamma(s+w) F(s+w) \frac{K_\varphi(w)}{w} \\ &\quad \times \left( x \exp\left(-i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t\right) \right)^w dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{((k/2)-1-\sigma)}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{s+w-k} \\ &\quad \times \Gamma(k-s-w) F_0(k-s-w) \frac{K_\varphi(w)}{w} \left( x \exp\left(-i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t\right) \right)^w dw \\ &= \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{-s} \Gamma(s) \frac{1}{2\pi i \Gamma(s)} \int_{((k/2)+1-\sigma)}^{\infty} \Gamma(s+w) F(s+w) \frac{K_\varphi(w)}{w} \\ &\quad \times \left( \frac{xN}{2\pi} \exp\left(-i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t\right) \right)^w dw - \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{s-k} \Gamma(k-s) \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi i \Gamma(k-s)} \int_{(\sigma+1-(k/2))}^{\infty} \Gamma(k-s+w) F_0(k-s+w) \frac{K_\varphi(-w)}{(-w)} \\ &\quad \times \left( \frac{N}{2\pi x} \exp\left(i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t\right) \right)^w dw = \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{-s} \Gamma(s) G(s, x; \varphi, F) \\ &\quad + \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{s-k} \Gamma(k-s) \frac{1}{2\pi i \Gamma(k-s)} \int_{((k/2)+1-[k-\sigma])}^{\infty} \Gamma(k-s+w) \\ &\quad \times F_0(k-s+w) \frac{K_{\varphi_0}(w)}{w} \left( \frac{N}{2\pi x} \exp\left(-i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} (-t)\right) \right)^w dw \\ &= \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{-s} \Gamma(s) G(s, x; \varphi, F) \\ &\quad + \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{s-k} \Gamma(k-s) G\left(k-s, \frac{1}{x}; \varphi_0, F_0\right). \end{aligned}$$

Dies beweist (i).  $\gamma_j(s, |t|^{-1})$ , ausgedrückt als Summe der Residuen der Pole im Innern von  $\mathfrak{F}$ , ist

$$\gamma_j(s, |t|^{-1}) = \sum_{n=0}^j D_{nj} \frac{\Gamma(s-n)}{\Gamma(s)} (it)^n,$$

wobei  $D_{nj}$  komplexe Zahlen sind. Also ist  $\gamma_j(s, |t|^{-1})$  eine rationale Funktion von  $t$ , deren Koeffizienten für beschränkte  $\sigma$  offensichtlich beschränkt bleiben. Mit Lemma 4(i) beweist dies (iii).

Wir brauchen also noch die Entwicklungen (ii) zu beweisen: Sei  $y > 0$  und  $l > (k+1)/2$ . Mit Lemma 3 lässt sich  $G$  in zwei absolut konvergente Doppelintegrale aufspalten:

$$\begin{aligned} G(s, x; \varphi, F) &= \frac{1}{2\pi i \Gamma(s)} \int_{((k/2)+1-\sigma)} \Gamma(s+w) \frac{(-1)^{l+1}}{w(w+1)\dots(w+l)} \int_0^\infty \varphi^{(l+1)}(\varrho) \varrho^{w+l} \\ &\quad \times F(s+w) d\varrho \left( \frac{xN}{2\pi} \exp \left( -i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t \right) \right)^w dw = \frac{1}{2\pi i \Gamma(s)} \int_{((k/2)+1-\sigma)} 1 \\ &\quad \times \Gamma(s+w) \frac{(-1)^{l+1}}{w(w+1)\dots(w+l)} \int_0^\infty \varphi^{(l+1)}(\varrho) \varrho^{w+l} \left( \sum_{n \leqslant \varrho y} a_n n^{-(s+w)} \right) d\varrho \\ &\quad \times \left( \frac{xN}{2\pi} \exp \left( -i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t \right) \right)^w dw + \frac{1}{2\pi i \Gamma(s)} \int_{((k/2)+1-\sigma)} \Gamma(s+w) \\ &\quad \times \frac{(-1)^{l+1}}{w(w+1)\dots(w+l)} \int_0^\infty \varphi^{(l+1)}(\varrho) \varrho^{w+l} \left( \sum_{n > \varrho y} a_n n^{-(s+w)} \right) d\varrho \\ &\quad \times \left( \frac{xN}{2\pi} \exp \left( -i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t \right) \right)^w dw = I_1 + I_2, \end{aligned}$$

sagen wir. Mit dem Satz von Cauchy ersetzen wir den Integrationsweg  $u = (k/2) + 1 - \sigma$  in  $I_1$  durch den Weg  $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_3$  in  $I_2$  durch  $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 + \mathfrak{E}_3$ . Dabei sind für  $k > 2$   $\mathfrak{D}_j$ ,  $\mathfrak{E}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , unter der Voraussetzung  $|t| > l^2 > ((k+1)/2)^2$  wie folgt definiert:

$\mathfrak{D}_1$ : Halbgerade  $((k/2)-1-\sigma-i\infty, (k/2)-1-\sigma-i\sqrt{|t|})$ ,

$\mathfrak{D}_2$ : Halbkreis mit Zentrum  $w = (k/2) - 1 - \sigma$  und Radius  $\sqrt{|t|}$  in  $u \leqslant (k/2) - 1 - \sigma$ ,

$\mathfrak{D}_3$ : Halbgerade  $((k/2)-1-\sigma+i\sqrt{|t|}, (k/2)-1-\sigma+i\infty)$ ,

- $\mathfrak{C}_1$ : Halbgerade  $((k/2)+1-\sigma-i\infty, (k/2)+1-\sigma-i\sqrt{|t|})$ ,  
 $\mathfrak{C}_2$ : Halbkreis mit Zentrum  $w=(k/2)+1-\sigma$  und Radius  $\sqrt{|t|}$  in  $u \geq (k/2)+1-\sigma$ ,  
 $\mathfrak{C}_3$ : Halbgerade  $((k/2)+1-\sigma+i\sqrt{|t|}, (k/2)+1-\sigma+i\infty)$ .

Die Wege sind so zu durchlaufen, dass  $v$  nichtabnehmend ist. Für  $k=1, 2$  gelten dieselben Definitionen, nur dass jetzt in  $\mathfrak{C}_1$  das Wegstück  $w=(k/2)-1-\sigma+iv$ ,  $|t+v|\leq 1$ , durch den Weg  $\mathfrak{D}_0$  ersetzt wird, der aus den übrigen 3 Seiten des Rechteckes  $w=(k/2)-1-\sigma-i(t+1)$ ,  $w=\frac{1}{2}-\sigma-i(t+1)$ ,  $w=\frac{1}{2}-\sigma-i(t-1)$ ,  $w=(k/2)-1-\sigma-i(t-1)$  in dieser Reihenfolge besteht. Das Integral des Integranden von  $I_j$ ,  $j=1, 2$ , über  $\mathfrak{C}_j$  bezeichnen wir mit  $I'_j$ .

Für festes  $s$  und  $|v|\rightarrow\infty$  strebt der Integrand von  $I_1$  gleichmässig für  $(k/2)-1-\sigma \leq u \leq (k/2)+1-\sigma$  gegen Null, wenn  $l>(k+1)/2$ . Also ist

$$\begin{aligned} I_1 &= I'_1 + \text{Res}(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2), \\ I_2 &= I'_2, \end{aligned}$$

wo  $\text{Res}(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2)$  die Summe der Residuen des Integranden von  $I_1$  zwischen  $\mathfrak{C}_1$  und  $\mathfrak{C}_2$  bezeichnet. Da  $|t|>l^2$  ist, erhalten wir für diese Summe

$$\begin{aligned} \text{Res}(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) &= \frac{1}{2\pi i \Gamma(s)} \int_{\mathfrak{F}} \Gamma(s+w) \frac{(-1)^{l+1}}{w(w+1)\dots(w+l)} \int_0^\infty \varphi^{(l+1)}(\varrho) \varrho^{w+l} \\ &\quad \times \left( \sum_{n \leq \varrho y} a_n n^{-(s+w)} \right) d\varrho \left( \frac{xN}{2\pi} \exp \left( -i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t \right) \right)^w dw, \end{aligned}$$

wo  $\mathfrak{F}$  eine Kurve ist, wie sie in der Definition (6) von  $\gamma_j$  auftritt. Mit partieller Summation ergibt sich, da  $\varphi(\varrho)=0$  ist für  $\varrho \geq 2$ ,

$$\sum_{n/y \leq 2} a_n n^{-(s+w)} \int_{n/y}^\infty \varphi^{(l+1)}(\varrho) \varrho^{w+l} d\varrho = \int_0^\infty \varphi^{(l+1)}(\varrho) \varrho^{w+l} \left( \sum_{n/y \leq \varrho} a_n n^{-(s+w)} \right) d\varrho,$$

und mit Lemma 4(ii) ist

$$\begin{aligned} \text{Res}(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) &= \sum_{n \leq 2y} a_n n^{-s} \frac{1}{2\pi i \Gamma(s)} \int_{\mathfrak{F}} \Gamma(s+w) \frac{(-1)^{l+1}}{w(w+1)\dots(w+l)} \int_{n/y}^\infty \varphi^{(l+1)}(\varrho) \varrho^{w+l} d\varrho \\ &\quad \times \left( \frac{xN}{2\pi n} \exp \left( -i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t \right) \right)^w dw = \\ &\quad \sum_{n \leq 2y} a_n n^{-s} \left\{ \sum_{j=0}^l \varphi^{(j)} \left( \frac{n}{y} \right) \left( -\frac{n}{y} \right)^j \gamma_j \left( s, \frac{xN}{2\pi y} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$G(s, x; \varphi, F) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \left\{ \sum_{j=0}^l \varphi^{(j)} \left( \frac{n}{y} \right) \left( -\frac{n}{y} \right)^j \gamma_j \left( s, \frac{xN}{2\pi y} \right) \right\} + I'_1 + I'_2,$$

und zeigen nun, dass die  $I'_j$ ,  $j=1, 2$ , von der gewünschten Größenordnung sind, wenn  $2\pi y/Nx = |t|$  ist:

Wegen Lemma 1(i) ist

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \varphi^{(l+1)}(\varrho) \varrho^{w+l} \left( \sum_{n>\varrho y} a_n n^{-(s+w)} \right) d\varrho \\ &= O \left( \int_{1/2}^2 |\varphi^{(l+1)}(\varrho)| \varrho^{u+l} (\varrho y)^{(k+1)/2-\sigma-u} d\varrho \right) \\ &= O \left( y^{(k+1)/2-\sigma-u} \int_{1/2}^2 |\varphi^{(l+1)}(\varrho)| d\varrho \right) \\ &= O(y^{(k+1)/2-\sigma-u} \|\varphi^{(l+1)}\|_1), \quad y>0, \end{aligned} \tag{10}$$

gleichmässig für  $w$  auf  $\mathfrak{C}_2$ ,  $(k-1)/2 \leq \sigma \leq (k+1)/2$  und  $\varphi$  aus  $\mathfrak{K}$ . Ebenso ist

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \varphi^{(l+1)}(\varrho) \varrho^{w+l} \left( \sum_{n \leq \varrho y} a_n n^{-(s+w)} \right) d\varrho \\ &= O \left( \int_{1/2}^2 |\varphi^{(l+1)}(\varrho)| \varrho^{u+l} (\varrho y)^{(k+1)/2-\sigma-u} d\varrho \right) \\ &= O(y^{(k+1)/2-\sigma-u} \|\varphi^{(l+1)}\|_1), \quad y>0, \end{aligned} \tag{11}$$

gleichmässig für  $w$  auf  $\mathfrak{C}_1$ ,  $(k-1)/2 \leq \sigma \leq (k+1)/2$  und  $\varphi$  aus  $\mathfrak{K}$ .

Aus (10) und Lemma 2, erster Teil, folgt, da  $2\pi y/Nx = |t|$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i \Gamma(s)} \int_{\mathfrak{C}_1} \Gamma(s+w) \frac{(-1)^{l+1}}{w(w+1)\dots(w+l)} \int_0^\infty \varphi^{(l+1)}(\varrho) \varrho^{w+l} \left( \sum_{n \geq \varrho y} a_n n^{-(s+w)} \right) d\varrho \\ & \quad \times \left( \frac{xN}{2\pi} \exp \left( -i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t \right) \right)^w dw \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O \left( \int_{-\infty}^{-\sqrt{|t|}} \frac{(1+|t+v|)^{\sigma+u-1/2}}{|t|^{\sigma-1/2} |v|^{l+1}} y^{(k+1)/2-\sigma-u} \|\varphi^{(l+1)}\|_1 \left( \frac{xN}{2\pi} \right)^u dv \right) \\
&= O \left( y^{(k+1)/2-\sigma} \left( \frac{2\pi y}{Nx} \right)^{-u} |t|^{1/2-\sigma} \int_{-\infty}^{-\sqrt{|t|}} |v|^{-l-1} (1+|t+v|)^{(k+1)/2} dv \|\varphi^{(l+1)}\|_1 \right) \\
&= O \left( \|\varphi^{(l+1)}\|_1 y^{(k+1)/2-\sigma} |t|^{-(k+1)/2} \int_{-\infty}^{-\sqrt{|t|}} |v|^{-l-1} (1+|t+v|)^{(k+1)/2} dv \right) \\
&= O (\|\varphi^{(l+1)}\|_1 y^{(k+1)/2-\sigma} |t|^{-l/2}), \quad \text{wenn } |t| \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\sqrt{|t|}} |v|^{-l-1} (1+|t+v|)^{(k+1)/2} dv = O \left( \int_{-\infty}^{-2|t|} |v|^{(k+1)/2-l-1} dv \right) \\
&+ O \left( |t|^{(k+1)/2} \int_{-2|t|}^{-\sqrt{|t|}} |v|^{-l-1} dv \right) \\
&= O (|t|^{(k+1)/2-l}) + O (|t|^{(k+1)/2-l/2}) = O (|t|^{(k+1-l)/2}), \quad |t| \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Der Beitrag zu  $I'_2$  von der Integration längs  $\mathfrak{E}_3$  lässt sich gleich behandeln. Ebenso lassen sich die Beiträge zu  $I'_1$  von der Integration längs  $\mathfrak{D}_1$ ,  $\mathfrak{D}_3$  behandeln, wenn man (11) anstelle von (10) verwendet. Für  $k=1, 2$  ist noch zu beachten, dass für  $w$  auf  $\mathfrak{D}_1$  oder  $\mathfrak{D}_3$ , aber nicht auf  $\mathfrak{D}_0$

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{-\sqrt{|t|}} |v|^{-l-1} (1+|t+v|)^{\sigma+u-1/2} dv = \int_{-\infty}^{-\sqrt{|t|}} |v|^{-l-1} (1+|t+v|)^{(k-3)/2} dv \\
&= O \left( \int_{-\infty}^{-2|t|} |v|^{-l-1+(k-3)/2} dv \right) + O \left( |t|^{-l-1} \int_{-2|t|}^{-|t|/2} (1+|t+v|)^{(k-3)/2} dv \right) \\
&+ O \left( |t|^{(k-3)/2} \int_{-|t|/2}^{-\sqrt{|t|}} |v|^{-l-1} dv \right) = O (|t|^{(k-3)/2-l}) + O (|t|^{(k-3)/2-l} \log |t|) \\
&+ O (|t|^{(k-3)/2-l/2}) = O (|t|^{(k-3-l)/2}), \quad \text{wenn } |t| \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{D}_0} |v|^{-l-1} (1+|t+v|)^{\sigma+u-1/2} |dw| &= O \left( |t|^{-l-1} \int_{\mathfrak{D}_0} |dw| \right) = O(|t|^{-l-1}) \\ &= O(|t|^{(k-3-l)/2}), \quad |t| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Mit Lemma 2, zweiter Teil, und (10) resp. (11) kann man auch die restlichen Integrale über  $\mathfrak{D}_2$  und  $\mathfrak{E}_2$  abschätzen, z.B.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i \Gamma(s)} \int_{\mathfrak{D}_2} \Gamma(s+w) \frac{(-1)^{l+1}}{w(w+1)\dots(w+l)} \int_0^\infty \varphi^{(l+1)}(\varrho) \varrho^{w+l} \left( \sum_{n \leq \varrho y} a_n n^{-s-w} \right) d\varrho \\ &\times \left( \frac{xN}{2\pi} \exp \left( -i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t \right) \right)^w dw \\ &= O \left( \int_{\mathfrak{D}_2} \frac{|t|^u}{|w\dots(w+l)|} y^{(k+1)/2-\sigma-u} \|\varphi^{(l+1)}\|_1 \left( \frac{xN}{2\pi} \right)^u |dw| \right) \\ &= O \left( \|\varphi^{(l+1)}\|_1 y^{(k+1)/2-\sigma} |t|^{-(l+1)/2} \int_{\mathfrak{D}_2} \left( \frac{|t| xN}{2\pi y} \right)^u |dw| \right) \\ &= O(\|\varphi^{(l+1)}\|_1 y^{(k+1)/2-\sigma} |t|^{-l/2}), \quad |t| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

gleichmässig für  $(k-1)/2 \leq \sigma \leq (k+1)/2$  und  $\varphi$  aus  $\mathfrak{K}$ .

Damit ist der Satz bewiesen.

## 5. Beweis der Korollare

Nach Satz (ii) ist für  $2\pi xy_2/N = |t|$

$$\begin{aligned} G(k-s, 1/x; \varphi_0, F_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{s-k} \left\{ \sum_{j=0}^l \varphi_0^{(j)} \left( \frac{n}{y_2} \right) \left( -\frac{n}{y_2} \right)^j \gamma_j(k-s, |t|^{-1}) \right\} \\ &\quad + O(\|\varphi_0^{(l+1)}\|_1 y_2^{\sigma-(k-1)/2} |t|^{-l/2}), \quad |t| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

gleichmässig für  $(k-1)/2 \leq \sigma \leq (k+1)/2$  und  $\varphi$  aus  $\mathfrak{K}$ . Da

$$\left| \left( \frac{2\pi}{N} \right)^{2s-k} \frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(s)} \right| \sim \left( \frac{2\pi}{N} \right)^{2\sigma-k} |t|^{k-2\sigma} = (y_1 y_2)^{(k/2)-\sigma}, \quad |t| \rightarrow \infty,$$

folgt nun Korollar 1 unmittelbar.

Sei  $\alpha \geq 0$  und  $|t| \geq 1$ . Mit  $\varphi$  ist auch  $\psi$  in  $\mathfrak{K}$ , wenn

$$\psi(\varrho, |t|^\alpha) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varrho \leq 1 - \frac{1}{2}|t|^{-\alpha}, \\ \varphi(1 + (\varrho - 1)|t|^\alpha), & 1 - \frac{1}{2}|t|^{-\alpha} \leq \varrho \leq 1 + |t|^{-\alpha}, \\ 0, & \varrho \geq 1 + |t|^{-\alpha}, \end{cases}$$

denn  $(d/d\varrho)\psi(\varrho, |t|^\alpha) = 0$  für  $\varrho = 1 - \frac{1}{2}|t|^{-\alpha}$  und  $\varrho = 1 + |t|^{-\alpha}$ . Also ist für  $j = 1, 2, \dots$

$$\psi^{(j)}(\varrho, |t|^\alpha) = (d^j/d\varrho^j)\psi(\varrho, |t|^\alpha) = |t|^{j\alpha} \varphi^{(j)}(1 + (\varrho - 1)|t|^\alpha), \quad 0 \leq \varrho < \infty, \quad (12)$$

und

$$\int_0^\infty |\psi^{(j)}(\varrho, |t|^\alpha)| d\varrho = O\left(|t|^{j\alpha} \int_{1 - \frac{1}{2}|t|^{-\alpha}}^{1 + |t|^{-\alpha}} d\varrho\right) = O(|t|^{(j-1)\alpha}), \quad |t| \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Da

$$\psi_0(\varrho, |t|^\alpha) = 1 - \psi(1/\varrho, |t|^\alpha),$$

ist

$$\psi_0^{(1)}(\varrho, |t|^\alpha) = \psi^{(1)}(1/\varrho, |t|^\alpha) \varrho^{-2}, \quad \text{für } 0 \leq \varrho < \infty,$$

also ist auch

$$\psi_0^{(j)}(\varrho, |t|^\alpha) = O(|t|^{j\alpha}), \quad |t| \rightarrow \infty, \quad \text{gleichmässig für } 0 \leq \varrho < \infty. \quad (14)$$

und

$$\int_0^\infty |\psi_0^{(j)}(\varrho, |t|^\alpha)| d\varrho = O(|t|^{(j-1)\alpha}), \quad |t| \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Schliesslich soll  $\xi$  wieder die charakteristische Funktion des Intervalls  $[0, 1]$  bezeichnen. Um Korollar 2 zu beweisen, wenden wir Korollar 1 mit  $\psi$  anstelle von  $\varphi$  an. Wählen wir dabei  $\alpha = \frac{1}{2} - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , und  $l \geq 1/2\varepsilon$ , erhalten wir

$$F(s) = \sum_{n \leq y_1} a_n n^{-s} + \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{2s-k} \frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(s)} \sum_{n \leq y_2} b_n n^{s-k} + R(s),$$

wobei nach (13), (15) und Satz(ii)

$$R(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \left\{ \psi\left(\frac{n}{y_1}, |t|^\alpha\right) - \xi\left(\frac{n}{y_1}\right) + \sum_{j=1}^l \psi^{(j)}\left(\frac{n}{y_1}, |t|^\alpha\right) \left(-\frac{n}{y_1}\right)^j \gamma_j(s, |t|^{-1}) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{2\pi}{N} \right)^{2s-k} \frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{s-k} \\
& \times \left\{ \psi_0 \left( \frac{n}{y_2}, |t|^\alpha \right) - \xi \left( \frac{n}{y_2} \right) + \sum_{j=1}^l \psi_0^{(j)} \left( \frac{n}{y_2}, |t|^\alpha \right) \left( -\frac{n}{y_2} \right)^j \gamma_j(k-s, |t|^{-1}) \right\} \\
& + O(y_1^{(k+1)/2-\sigma} |t|^{-1/2}) + O(y_2^{(k/2)-\sigma} y_2^{1/2} |t|^{-1/2}), \quad |t| \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

gleichmässig für  $(k-1)/2 \leq \sigma \leq (k+1)/2$ . Für  $j \geq 1$  haben wir

$$\psi^{(j)}(\varrho, |t|^\alpha) = \psi_0^{(j)}(\varrho, |t|^\alpha) = \psi(\varrho, |t|^\alpha) - \xi(\varrho) = \psi_0(\varrho, |t|^\alpha) - \xi(\varrho) = 0,$$

wenn  $\varrho \leq (1+|t|^{-\alpha})^{-1}$  oder  $\varrho \geq 1+|t|^{-\alpha}$ , da  $(1-\frac{1}{2}|t|^{-\alpha})(1+|t|^{-\alpha}) \geq 1$ . Mit (12), (14) und (iii) des Satzes erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
R(s) &= O\left(\sum^{(1)} |a_n| n^{-\sigma}\right) + O\left((y_1 y_2)^{(k/2)-\sigma} \sum^{(2)} |b_n| n^{\sigma-k}\right) + O(y_1^{(k+1)/2-\sigma} |t|^{-1/2}) \\
&\quad + O(y_1^{(k/2)-\sigma} y_2^{1/2} |t|^{-1/2}), \quad |t| \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

worin  $\sum^{(j)}$  Summation über  $y_j(1+|t|^{-\alpha})^{-1} \leq n \leq y_j(1+|t|^{-\alpha})$ ,  $j=1, 2$ , bedeutet. Ist nun  $y_1 = y_2 = |t| N/2\pi$ , so ergibt sich aus den Voraussetzungen dieses Korollars

$$\begin{aligned}
\sum^{(1)} |a_n| n^{-\sigma} &\leq (\sum^{(1)} |a_n|^2 \sum^{(1)} n^{-2\sigma})^{1/2} = O((|t|^{k-\beta} |t|^{-2\sigma+1-\alpha})^{1/2}) \\
&= O(|t|^{(k+1)/2-\sigma-(\alpha+\beta)/2}), \quad |t| \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

und

$$\sum^{(2)} |b_n| n^{\sigma-k} \leq (\sum^{(2)} |b_n|^2 \sum^{(2)} n^{2\sigma-2k})^{1/2} = O(|t|^{(k-\beta)/2} |t|^{\sigma-k+(1-\alpha)/2}), \quad |t| \rightarrow \infty.$$

Also ist wie gewünscht

$$R(s) = O(|t|^{(k+1)/2-\sigma-(\alpha+\beta)/2}), \quad |t| \rightarrow \infty.$$

Korollar 3 ergibt sich sofort aus Korollar 2 und Lemma 1(i).

## TEIL II

### 1. Einleitung

In Teil I bewiesen wir approximative Funktionalgleichungen für Dirichletreihen, die Spitzenformen assoziiert sind. Dieses Resultat wird hier zur Herleitung des folgenden Satzes verwendet:

**SATZ.** Seien  $k$  und  $N$  positive ganze Zahlen. Sei  $H$  eine Spitzenform der Art  $(-k, N)$  im Sinne von Hecke [8] mit der Fourierentwicklung

$$H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z / N}, \quad \Im z > 0.$$

Dann gilt für die ganze Funktion  $F(s)$ ,  $s = \sigma + it$ , welche für  $\sigma > (k+1)/2$  durch  $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  definiert wird,

$$\int_0^T |F(\sigma + it)|^2 dt = \begin{cases} 2AkT \log T + O(T), & \sigma = k/2, \\ T \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{-2\sigma} + O(T^{k+1-2\sigma}), & k/2 < \sigma < (k+1)/2, \\ T \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{-2\sigma} + O(\log^2 T), & \sigma = (k+1)/2, \end{cases}$$

wenn  $T \rightarrow \infty$  strebt. Dabei ist

$$A = \frac{12(4\pi)^{k-1}}{j(N) N^k \Gamma(k+1)} \iint_{\mathfrak{D}} |H(u+iv)|^2 v^{k-2} du dv,$$

wobei  $\mathfrak{D}$  ein Fundamentalgebiet der inhomogenen Hauptkongruenzgruppe zur Stufe  $N$  und  $j(N)$  der Index dieser Gruppe in der inhomogenen Modulgruppe ist.

In [4] bewiesen wir einen solchen Mittelwertsatz für  $F$  mit dem Restglied  $o(T \log T)$  für  $\sigma = k/2$  und  $o(T)$  für  $k/2 < \sigma \leq (k+1)/2$ , wenn  $k > 1$  ist. Das Hauptproblem ist hier also, eine bessere Abschätzung des Restgliedes zu erhalten. Neben einer approximativen Funktionalgleichung für  $F$  aus Teil I verwenden wir dabei wesentlich eine Ungleichung von Hilbert für eine Bilinearform (Lemma 6) und Abschätzungen gewisser trigonometrischer Integrale (Lemma 7). Der Gedanke, dass hier eine solche Ungleichung von Hilbert angewandt werden könnte, entstand beim Lesen eines Preprints von K. Ramachandra, das dem Autor von Prof. K. Chandrasekharan freundlicherweise zur Verfügung gestellt wurde. Ramachandra zitiert darin einen Satz aus einer damals noch unveröffentlichten Arbeit von H. L. Montgomery und R. C. Vaughan mit dem Titel 'Hilbert's Inequality' [15]. Der von Ramachandra zitierte Satz ist hier nicht anwendbar.

## 2. Hilfssätze

**LEMMA 5.** Sei  $\eta > 0$ . Für die Fourierkoeffizienten der Spitzenform  $H$  des Satzes gilt, wenn  $x \rightarrow \infty$

(i)

$$\sum_{n \leq \eta x} |a_n|^2 n^{-2\sigma} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{-2\sigma} + O(x^{k-2\sigma}), & \sigma > k/2, \\ Ak \log x + O(1), & \sigma = k/2, \\ O(x^{k-2\sigma}), & \sigma < k/2, \end{cases}$$

wobei  $A$  denselben Wert wie im Satz hat, und

$$\sum_{n \leq \eta x} |a_n|^2 n^{-2\sigma} |\log(x/n)| = O(x^{k-2\sigma}), \quad \sigma < k/2.$$

(ii) Besitzt die Spitzenform  $H_0(z) = H(-1/z) (-iz)^{-k}$  die Fourierentwicklung

$$H_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{2\pi i nz/N}, \quad \Re z > 0,$$

dann ist

$$\sum_{n \leq \eta x} |b_n|^2 n^{-k} = Ak \log x + O(1),$$

mit demselben  $A$  wie im Satz.

Beweis. (i) und (ii) folgen durch partielle Summation sofort aus R. A. Rankins Resultat [16]

$$\sum_{n \leq x} |a_n|^2 = Ax^k + O(x^{k-2/5}), \quad \sum_{n \leq x} |b_n|^2 = Ax^k + O(x^{k-2/5}), \quad x \rightarrow \infty.$$

LEMMA 6. Seien  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  und  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  wie in Lemma 5. Sei  $c > 0, \eta > 0$ . Wir definieren

$$R_{\sigma}(x) = \sum_{n \leq x} \sum_{m \leq n} \frac{|a_n b_m|}{(nm)^{\sigma}}, \quad S_{\sigma}(x) = \sum_{n \leq \eta x} \sum_{m \leq n} \frac{|a_n b_m|}{(nm)^{\sigma}} |\log(x/n)|$$

und für Folgen  $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}, (\beta_n)_{n=1}^{\infty}$  mit  $|\alpha_n| \leq c |a_n|$  und  $|\beta_n| \leq c |b_n|$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,

$$T_{\sigma}(x) = \sum_{n \leq x} \sum_{m < n} \frac{|\alpha_n \beta_m|}{(nm)^{\sigma} n (\log(n/m))^2}, \quad U_{\sigma}(x) = \sum_{n, m \leq x} \frac{\alpha_n \bar{\beta}_m}{(nm)^{\sigma} \log(n/m)}.$$

Dann gilt

$$R_{\sigma}(x) = \begin{cases} O(x^{k+1-2\sigma}), & k/2 \leq \sigma < (k+1)/2, \\ O(\log^2 x), & \sigma = (k+1)/2, \end{cases} \quad S_{\sigma}(x) = O(x^{k+1-2\sigma}), \quad k/2 \leq \sigma < (k+1)/2,$$

und

$$T_\sigma(x) = \begin{cases} O(x^{k+1-2\sigma}), & k/2 \leq \sigma < (k+1)/2, \\ O(\log^2 x), & \sigma = (k+1)/2, \end{cases} \quad U_\sigma(x) = \begin{cases} O(x^{k+1-2\sigma}), & k/2 \leq \sigma < (k+1)/2, \\ O(\log^2 x), & \sigma = (k+1)/2. \end{cases}$$

*Beweis.* Wegen Lemma 1(i) und

$$\begin{aligned} R_\sigma(x) &\leq \sum_{n \leq x} |a_n| n^{-\sigma} \sum_{m \leq x} |b_m| m^{-\sigma}, \\ S_\sigma(x) &\leq \sum_{n \leq \eta x} |a_n| n^{-\sigma} |\log(x/n)| \sum_{m \leq \eta x} |b_m| m^{-\sigma} \end{aligned}$$

folgen die Behauptungen für  $R_\sigma(x)$  und  $S_\sigma(x)$  nach partieller Summation von  $\sum_{n \leq \eta x} |a_n| n^{-\sigma} |\log(x/n)|$  sofort. Für  $m \neq n$  ist

$$\begin{aligned} \log(n/m) &= \log\left(1 - \frac{m-n}{m}\right) \leq -\frac{m-n}{m} = \frac{n-m}{m}, \\ \log(n/m) &= -\log\left(1 - \frac{n-m}{n}\right) \geq \frac{n-m}{n}, \end{aligned} \tag{16}$$

also

$$\frac{1}{(\log(n/m))^2} \leq \frac{(\max(n, m))^2}{(n-m)^2} < 1 + \frac{2mn}{(n-m)^2},$$

und

$$\begin{aligned} T_\sigma(x) &\leq R_\sigma(x) + 2 \sum_{m < n \leq x} \frac{|\alpha_n \beta_m|}{(nm)^{\sigma-1/2} (n-m)^2} = R_\sigma(x) + 2 \sum_{1 \leq r \leq x} r^{-2} \\ &\quad \times \sum_{r < n \leq x} \frac{|\alpha_n \beta_{n-r}|}{(n(n-r))^{\sigma-1/2}} \leq R_\sigma(x) + 2 \sum_{1 \leq r \leq x} r^{-2} \\ &\quad \times \left( \sum_{1 \leq n \leq x} \frac{|\alpha_n|^2}{n^{2\sigma-1}} \sum_{r < n \leq x} \frac{|\beta_{n-r}|^2}{(n-r)^{2\sigma-1}} \right)^{1/2} = \begin{cases} O(x^{k+1-2\sigma}), & k/2 \leq \sigma < (k+1)/2, \\ O(\log^2 x), & \sigma = (k+1)/2. \end{cases} \end{aligned}$$

Aus (16) folgt weiter

$$\frac{(m/n)^{1/2} - 1}{(n-m)} \leq \frac{(mn)^{-1/2}}{\log(n/m)} - \frac{1}{(n-m)} \leq \frac{(n/m)^{1/2} - 1}{(n-m)}.$$

Wegen

$$\frac{(m/n)^{1/2} - 1}{(n-m)} < 0 < \frac{(n/m)^{1/2} - 1}{(n-m)},$$

ist somit

$$\left| \frac{(mn)^{-1/2}}{\log(n/m)} - \frac{1}{(n-m)} \right| \leq \frac{\left( \frac{\max(n, m)}{\min(n, m)} \right)^{1/2} - 1}{|n-m|} \leq \frac{1 + \frac{\frac{1}{2}|n-m|}{\min(n, m)} - 1}{|n-m|} = \frac{1}{2 \min(n, m)}.$$

Damit erhalten wir für ein positives  $\eta < 1$

$$\begin{aligned} U_\sigma(x) &= \sum_{\substack{n, m \leq x \\ n \neq m}} \frac{\alpha_n \bar{\beta}_m}{(nm)^{\sigma-1/2} (n-m)} + \left( \sum_{\substack{n, m \leq x \\ m < \eta n}} + \sum_{\substack{n, m \leq x \\ m > n/\eta}} \right) \frac{\alpha_n \bar{\beta}_m}{(mn)^\sigma} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{\log(n/m)} - \frac{(nm)^{1/2}}{(n-m)} \right\} + O \left( \sum_{\substack{n \leq x \\ \eta n \leq m \leq n/\eta}} \frac{|\alpha_n \bar{\beta}_m|}{(nm)^{\sigma-1/2} \min(n, m)} \right) \\ &= \sum_{\substack{n, m \leq x \\ n \neq m}} \frac{\alpha_n \bar{\beta}_m}{(nm)^{\sigma-1/2} (n-m)} + O \left( \left( \sum_{\substack{n, m \leq x \\ m < \eta n}} + \sum_{\substack{n, m \leq x \\ m > n/\eta}} \right) \frac{|a_n b_m|}{(nm)^\sigma} \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{|\log \eta|} + \frac{(mn)^{1/2}}{\max(n, m) (1-\eta)} \right\} \right) + O \left( \sum_{\substack{n \leq x \\ \eta n \leq m \leq n/\eta}} \frac{|a_n b_m|}{(nm)^{\sigma-1/2} n} \right) \\ &= \sum_{\substack{n, m \leq x \\ n \neq m}} \frac{\alpha_n \bar{\beta}_m}{(nm)^{\sigma-1/2} (n-m)} + O \left( \sum_{m, n \leq x} \frac{|a_n b_m|}{(nm)^\sigma} \right). \end{aligned} \tag{17}$$

Sind nun  $(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty$  zwei Folgen reeller Zahlen mit  $\sum_{n=1}^\infty x_n^2 < \infty$  und  $\sum_{n=1}^\infty y_n^2 < \infty$ , dann gilt nach [6], p. 212, Theorem 294, für die Hilbertsche Form  $\sum_{\substack{n, m=1 \\ n \neq m}}^\infty x_n y_m / (n-m)$

$$\left| \sum_{\substack{n, m=1 \\ n \neq m}}^\infty \frac{x_n y_m}{(n-m)} \right| \leq \pi \left( \sum_{n=1}^\infty x_n^2 \sum_{n=1}^\infty y_n^2 \right)^{1/2}.$$

Wenn  $\alpha_n = \gamma_{1n} + i\gamma_{2n}$ ,  $\beta_n = \gamma_{3n} + i\gamma_{4n}$ ,  $\gamma_{jn}$  reell für  $j=1, 2, 3, 4$ ,  $n=1, 2, \dots$ , ist für  $j=1, 2$   $|\gamma_{jn}| \leq c|a_n|$  und  $|\gamma_{jn}| \leq c|b_n|$  für  $j=3, 4$ , also

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{n, m \leq x \\ n \neq m}} \frac{\alpha_n \bar{\beta}_m}{(nm)^{\sigma-1/2} (n-m)} \right| &= \left| \sum_{\substack{n, m \leq x \\ n \neq m}} \frac{\gamma_{1n} \gamma_{3m} + \gamma_{2n} \gamma_{4m} + i\gamma_{2n} \gamma_{3m} - i\gamma_{1n} \gamma_{4m}}{(nm)^{\sigma-1/2} (n-m)} \right| \leq \\ &4\pi c^2 \left( \sum_{n \leq x} |a_n|^2 n^{1-2\sigma} \sum_{n \leq x} |b_n|^2 n^{1-2\sigma} \right)^{1/2} = \begin{cases} O(x^{k+1-2\sigma}), & (k-1)/2 \leq \sigma < (k+1)/2, \\ O(\log x), & \sigma = (k+1)/2. \end{cases} \end{aligned}$$

Daraus folgt nun mit (17) und der Abschätzung für  $R_\sigma(x)$  die Behauptung für  $U_\sigma(x)$ .

LEMMA 7. Sei  $0 = \varepsilon_1 < \delta < \delta_1$ ,  $0 < \varepsilon_2 < \delta_2$  und  $\delta_1 < \delta_2$ ,  $\delta_1 \delta_2 < 1$ . Seien  $\psi_1$  und  $\psi_2$  zweimal stetig differenzierbare Funktionen mit folgenden Eigenschaften

$$\psi_1(\varrho) = \begin{cases} 1, & \text{für } \varepsilon_1 \leq \varrho \leq \delta, \\ 0, & \text{für } \delta_1 \leq \varrho, \end{cases} \quad \text{und} \quad \psi_2(\varrho) = 0 \quad \text{für } \varrho \leq \varepsilon_2 \text{ resp. } \varrho \geq \delta_2.$$

Bezeichnen  $m, n$  positive ganze Zahlen, dann ist für feste  $\beta \geq 0$ ,  $c > 0$  gleichmässig in  $m, n, T$

$$J = \int_0^T \overline{\psi_j\left(\frac{cn}{t}\right)} \psi_l\left(\frac{cm}{t}\right) t^{-\beta} \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt = \begin{cases} 0, & n \geq T\delta_j/c \text{ oder } m \geq T\delta_l/c, \\ \frac{T^{1-\beta}}{(1-\beta)} + O(n^{1-\beta}), & 0 \leq \beta < 1, \\ O(|\log(T/n)|) + O(1), & \beta = 1, \\ O(n^{1-\beta}), & \beta > 1, \\ O(n^{1-\beta}), & \begin{cases} j=l=1, & m=n \geq T\delta/c, \\ j \neq 1 \text{ oder } l \neq 1, & m=n, \end{cases} \\ \overline{\psi_j\left(\frac{cn}{T}\right) n^{-iT}} \psi_l\left(\frac{cm}{T}\right) m^{-iT} \frac{T^{-\beta}}{i \log(n/m)} \\ + O((\max(n, m))^{-1-\beta} (\log(n/m)^{-2})), & \text{für } m \neq n, \end{cases}$$

und falls  $j \neq 2$  oder  $l \neq 2$

$$J' = \int_0^T \overline{\psi_j\left(\frac{cn}{t}\right)} \psi_l\left(\frac{cm}{t}\right) \frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(s)} (c^2 mn)^{it} dt \\ = \begin{cases} 0, & n \geq T\delta_j/c \text{ oder } m \geq T\delta_l/c, \\ O\left(\left|\log\left(\frac{T}{\max(n, m)}\right)\right|\right), & \sigma = k/2, \\ O((\max(n, m))^{k-2\sigma}), & k/2 < \sigma \leq (k+1)/2. \end{cases}$$

Beweis. Da  $\psi_j(cn/t) = 0$  für  $cn/t \geq \delta_j$ , also für  $t \leq cn/\delta_j$ , ist  $J = J' = 0$ , wenn  $T \leq c \max(n/\delta_j, m/\delta_l)$ , d.h. wenn  $n \geq T\delta_j/c$  oder  $m \geq T\delta_l/c$ . Weiter ist für  $t > cn/\varepsilon_j$   $\psi_j(cn/t) = 0$ . (Für  $j=1$  ist diese Aussage leer.) Somit kann im Integral  $J$   $c \max(n/\delta_j, m/\delta_l)$  als untere und  $\min(T, cn/\varepsilon_j, cm/\varepsilon_l)$  als obere Integrationsgrenze angenommen werden. Wenn  $j=l=1$  und  $m=n < T\delta/c$ , haben wir, da  $n = O(T)$

$$\begin{aligned}
J &= \int_{cn/\delta_1}^T \left| \psi_1 \left( \frac{cn}{t} \right) \right|^2 t^{-\beta} dt = \int_{cn/\delta_1}^{cn/\delta} \left| \psi_1 \left( \frac{cn}{t} \right) \right|^2 t^{-\beta} dt + \int_{cn/\delta}^T t^{-\beta} dt \\
&= O(n^{1-\beta}) + \begin{cases} \frac{T^{1-\beta}}{(1-\beta)} + O(n^{1-\beta}), & 0 \leq \beta < 1, \\ \log(T\delta/cn), & \beta = 1, \\ O(n^{1-\beta}), & \beta > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Wenn  $j=l=1$  und  $m=n \geq T\delta/c$  gilt

$$J = O \left( \int_{cn/\delta_1}^{cn/\delta} \left| \psi_1 \left( \frac{cn}{t} \right) \right|^2 t^{-\beta} dt \right) = O(n^{1-\beta}),$$

und falls  $j \neq 1$  oder  $l \neq 1$ , haben wir für  $m=n$ , weil  $\varepsilon_j > 0$  oder  $\varepsilon_l > 0$

$$J = O \left( \int_{cn/\delta_2}^{cn/\varepsilon_2} t^{-\beta} dt \right) = O(n^{1-\beta}).$$

Falls  $m \neq n$  integrieren wir zweimal partiell und erhalten

$$\begin{aligned}
J &= \overline{\psi_j(cn/T)} \psi_l(cm/T) T^{-\beta} \frac{(n/m)^{iT}}{i \log(n/m)} - \frac{1}{i \log(n/m)} \int_0^T \left( \frac{n}{m} \right)^{it} \\
&\quad \times \frac{d}{dt} \left\{ \overline{\psi_j \left( \frac{cn}{t} \right)} \psi_l \left( \frac{cm}{t} \right) t^{-\beta} \right\} dt = \overline{\psi_j(cn/T)} \psi_l(cm/T) T^{-\beta} \frac{(n/m)^{iT}}{i \log(n/m)} \\
&\quad + \frac{(n/m)^{iT}}{(\log(n/m))^2} \frac{d}{dt} \left\{ \dots \right\}_{t=T} - \frac{1}{(\log(n/m))^2} \int_0^T \left( \frac{n}{m} \right)^{it} \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \dots \right\} dt. \tag{18}
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Ableitungen von  $\psi_j, j=1, 2$  mit Strichen, dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \psi_j \left( \frac{cn}{t} \right) &= \psi'_j \left( \frac{cn}{t} \right) \left( -\frac{nc}{t^2} \right) = O \left( \frac{n}{t^2} \right), \\
\frac{d^2}{dt^2} \psi_j \left( \frac{cn}{t} \right) &= \psi''_j \left( \frac{cn}{t} \right) \left( \frac{cn}{t^2} \right)^2 + \psi'_j \left( \frac{cn}{t} \right) \left( \frac{2cn}{t^3} \right) = O(n^2 t^{-4}) + O(nt^{-3}).
\end{aligned}$$

Damit ist für  $c \max(n/\delta_j, m/\delta_l) \leq t \leq T$

$$\frac{d}{dt} \{ \dots \}_{t=T} = O((n+m) T^{-2-\beta}) + O(T^{-1-\beta}) = O(T^{-1-\beta})$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \{ \dots \} &= O((n^2 + m^2) t^{-4-\beta}) + O((n+m) t^{-3-\beta}) + O(t^{-2-\beta}) + O(m n t^{-4-\beta}) \\ &\quad + O((n+m) t^{-2-\beta-1}) = O((n+m)^2 t^{-4-\beta}) + O((n+m) t^{-3-\beta}) \\ &\quad + O(t^{-2-\beta}) = O(t^{-2-\beta}), \end{aligned}$$

also mit (18)

$$\begin{aligned} J &= \overline{\psi_j\left(\frac{cn}{T}\right)} \psi_l\left(\frac{cm}{T}\right) T^{-\beta} \frac{(n/m)^{iT}}{i \log(n/m)} + O\left(\frac{T^{-1-\beta}}{(\log(n/m))^2}\right) \\ &\quad + O\left((\log(n/m))^{-2} \int_{c \max(n/\delta_j, m/\delta_l)}^T t^{-\beta-2} dt\right) = \overline{\psi_j\left(\frac{cn}{T}\right)} \psi_l\left(\frac{cm}{T}\right) T^{-\beta} \frac{(n/m)^{iT}}{i \log(n/m)} \\ &\quad + O\left(\frac{T^{-1-\beta}}{(\log(n/m))^2}\right) + O\left(\frac{(\max(n, m))^{-1-\beta}}{(\log(n/m))^2}\right) = \overline{\psi_j\left(\frac{cn}{T}\right)} \psi_l\left(\frac{cm}{T}\right) T^{-\beta} \frac{(n/m)^{iT}}{i \log(n/m)} \\ &\quad + O((\log(n/m))^{-2} (\max(n, m))^{-1-\beta}), \end{aligned}$$

womit alle Behauptungen für  $J$  bewiesen sind.

Ist  $\alpha$  reell, so gilt die Stirlingsche Formel

$$\begin{aligned} \Gamma(s+\alpha) &= (2\pi)^{1/2} |t|^{\sigma+\alpha-1/2} \exp\left(-\frac{\pi}{2} |t| + i\left(\frac{\pi}{2} (\sigma+\alpha-\frac{1}{2}) \operatorname{sgn} t - t + t \log |t|\right)\right) \\ &\quad \times (1+O(|t|^{-1})), \quad |t| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

gleichmässig für  $s$  in einem vertikalen Streifen endlicher Breite. Deshalb ist

$$\frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(s)} = |t|^{k-2\sigma} \exp\left(-2it(\log|t|-1) - i\frac{\pi}{2}(k-1) \operatorname{sgn} t\right) (1+O(|t|^{-1})), \quad |t| \rightarrow \infty, \quad (19)$$

und folglich

$$\begin{aligned}
J' = & e^{-i(\pi/2)(k-1)} \int_0^T \overline{\psi_j\left(\frac{cn}{t}\right)} \psi_l\left(\frac{cm}{t}\right) t^{k-2\sigma} \\
& \times \exp(-2it(\log t - \log(c(mn)^{1/2}) - 1)) dt \\
& + O\left(\int_0^T \left|\overline{\psi_j\left(\frac{cn}{t}\right)} \psi_l\left(\frac{cm}{t}\right)\right| t^{k-2\sigma-1} dt\right).
\end{aligned} \tag{20}$$

Nun ist für  $t > c(mn)^{1/2} = c'$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\exp(-2it(\log t - \log c' - 1))}{2i(\log c' - \log t)} \right\} = & \exp(-2it(\log t - \log c' - 1)) \\
& + \frac{\exp(-2it(\log t - \log c' - 1))}{2it(\log c' - \log t)^2}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Da für  $j \neq 2$  oder  $l \neq 2$   $\delta_j \delta_l < 1$  ist, haben wir

$$c' = c(mn)^{1/2} < c \left( \frac{mn}{\delta_j \delta_l} \right)^{1/2} \leq c \max\left(\frac{n}{\delta_j}, \frac{m}{\delta_l}\right),$$

und für  $t \geq c \max(n/\delta_j, m/\delta_l)$

$$|\log c' - \log t| \geq \left| \log(c(mn)^{1/2}) - \log\left(c\left(\frac{mn}{\delta_j \delta_l}\right)^{1/2}\right) \right| = -\frac{1}{2} \log(\delta_j \delta_l) > 0.$$

Wenn wir (21) in (20) zur partiellen Integration benutzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
J' = & -e^{-i(\pi/2)(k-1)} \int_0^T \overline{\psi_j\left(\frac{cn}{t}\right)} \psi_l\left(\frac{cm}{t}\right) t^{k-2\sigma} \frac{\exp(-2it(\log t - \log c' - 1))}{2it(\log c' - \log t)^2} dt \\
& + e^{-i(\pi/2)(k-1)} \overline{\psi_j\left(\frac{cn}{T}\right)} \psi_l\left(\frac{cm}{T}\right) T^{k-2\sigma} \frac{\exp(-2iT(\log T - \log c' - 1))}{2i(\log c' - \log T)} \\
& - e^{-i(\pi/2)(k-1)} \int_0^T \frac{\exp(-2it(\log t - \log c' - 1))}{2i(\log c' - \log t)} \frac{d}{dt} \left\{ \overline{\psi_j\left(\frac{cn}{t}\right)} \psi_l\left(\frac{cm}{t}\right) t^{k-2\sigma} \right\} dt \\
& + O\left(\int_{c \max(n/\delta_j, m/\delta_l)}^T t^{k-2\sigma-1} dt\right).
\end{aligned}$$

Da für  $c \max(n/\delta_j, m/\delta_l) \leq t \leq T$

$$\frac{d}{dt} \{ \dots \} = O((n+m) t^{k-2\sigma-2}) + O(t^{k-2\sigma-1}) = O(t^{k-2\sigma-1}),$$

ist schliesslich

$$\begin{aligned} J' &= O \left( \int_{c \max(n/\delta_j, m/\delta_l)}^T t^{k-2\sigma-1} dt \right) + O(T^{k-2\sigma}) \\ &= \begin{cases} O \left( \left| \log \left( \frac{T}{\max(n, m)} \right) \right| \right), & \sigma = k/2, \\ O((\max(n, m))^{k-2\sigma}), & k/2 < \sigma \leq (k+1)/2. \end{cases} \end{aligned}$$

### 3. Beweis des Mittelwertsatzes

Wir benötigen die Darstellung von  $F(s)$  im kritischen Streifen durch die approximative Funktionalgleichung, wie sie in Korollar 1, Teil I, bewiesen wurde. Wir verwenden dieselbe Notation.

Für ein festes  $\varphi$  aus  $\mathfrak{K}$  wählen wir zwei Paare von Funktionen  $\psi_j$  und  $\psi_{0j}$ ,  $j=1, 2$ , welche den Bedingungen von Lemma 7 mit  $0 < \delta < \delta_1 < \frac{1}{2}$  und  $\varepsilon_2 = \delta$ ,  $\delta_2 = 2$  genügen, sodass

$$\varphi(\varrho) = \psi_1(\varrho) + \psi_2(\varrho), \quad \varrho \geq 0,$$

und

$$\varphi_0(\varrho) = \psi_{01}(\varrho) + \psi_{02}(\varrho), \quad \varrho \geq 0.$$

Setzen wir  $\kappa = 1/\lambda = (2\pi/N)$  und  $y_1 = y_2 = \lambda |t|$ , so gilt also

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \psi_1 \left( \frac{n}{y_1} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \psi_2 \left( \frac{n}{y_1} \right) + \kappa^{2s-k} \frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{s-k} \psi_{01} \left( \frac{n}{y_2} \right) \\ &\quad + \kappa^{2s-k} \frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{s-k} \psi_{02} \left( \frac{n}{y_2} \right) + R(s) = \sum_{v=1}^5 f_v(s), \end{aligned}$$

sagen wir, wobei

$$R(s) = O(|t|^{(k-1)/2-\sigma}), \quad |t| \rightarrow \infty, \tag{22}$$

gleichmässig für  $(k-1)/2 \leq \sigma \leq (k+1)/2$ . Denn für  $l > (k+1)/2$  ist

$$\begin{aligned} R(s) = & O\left(\sum_{j=1}^l |t|^{-j} |\gamma_j(s, |t|^{-1})| \sum_{n \leq 2y_1} |a_n| n^{j-\sigma}\right) \\ & + O\left(\left|\frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(s)}\right| \sum_{j=1}^l |t|^{-j} |\gamma_j(k-s, |t|^{-1})| \sum_{n \leq 2y_2} |b_n| n^{j+\sigma-k}\right) \\ & + O(|t|^{(k+1)/2 - \sigma - l/2}), \quad |t| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

gleichmässig für  $s$  im kritischen Streifen. Mit (19) und den Abschätzungen für  $\gamma_j, j \geq 1$ , in Teil I folgt (22) sofort aus Lemma 1(i). Definieren wir

$$\Lambda_{\mu\nu} = \int_0^T f_\nu(\sigma + it) \overline{f_\mu(\sigma + it)} dt, \quad \mu, \nu = 1, \dots, 5,$$

dann ist

$$\int_0^T |F(\sigma + it)|^2 dt = \sum_{\nu, \mu=1}^5 \Lambda_{\nu\mu}.$$

Es wird sich zeigen, dass für  $\sigma > k/2$   $\Lambda_{11}$  den Hauptbeitrag zu dieser Summe liefert. Für  $\sigma = k/2$  steuern  $\Lambda_{11}$  und  $\Lambda_{33}$  je die Hälfte zum Hauptterm bei. Wir werden deshalb zuerst die Integrale  $\Lambda_{\nu\nu}$  behandeln:

Nach Lemma 5(i), 6 und 7 ist

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} = & \int_0^T \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \psi_1\left(\frac{\kappa n}{t}\right) \right|^2 dt = \sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_n a_m}{(nm)^\sigma} \int_0^T \overline{\psi_1\left(\frac{\kappa n}{t}\right)} \psi_1\left(\frac{\kappa m}{t}\right) \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt \\ = & \sum_{n < \lambda T \delta} |a_n|^2 n^{-2\sigma} (T + O(n)) + \sum_{\lambda T \delta \leq n \leq \lambda T \delta_1} |a_n|^2 n^{-2\sigma} O(n) \\ & + \sum_{\substack{m, n \leq \lambda T \delta_1 \\ m \neq n}} \frac{\bar{a}_n a_m}{(nm)^\sigma i \log(n/m)} \overline{\psi_1(\kappa n/T)} n^{-iT} \psi_1(\kappa m/T) m^{-iT} \\ & + O\left(\sum_{n \leq \lambda T \delta_1} \sum_{m < n} \frac{|a_n a_m|}{(mn)^\sigma n (\log(n/m))^2}\right) \\ = & \begin{cases} AkT \log T + O(T), & \sigma = k/2, \\ T \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{-2\sigma} + O(T^{k+1-2\sigma}), & k/2 < \sigma < (k+1)/2, \\ T \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{-2\sigma} + O(\log^2 T), & \sigma = (k+1)/2, \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
A_{22} &= \int_0^T \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \psi_2 \left( \frac{\kappa n}{t} \right) \right|^2 dt = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_n a_m}{(nm)^{\sigma}} \int_0^T \overline{\psi_2 \left( \frac{\kappa n}{t} \right)} \psi_2 \left( \frac{\kappa m}{t} \right) \left( \frac{n}{m} \right)^{it} dt \\
&= \sum_{n \leq \lambda T \delta_2} |a_n|^2 n^{-2\sigma} O(n) + \sum_{\substack{n,m \leq \lambda T \delta_2 \\ n \neq m}} \frac{\bar{a}_n a_m}{(nm)^{\sigma} i \log(n/m)} \\
&\quad \times \overline{\psi_2(\kappa n/T) n^{-iT}} \psi_2(\kappa m/T) m^{-iT} + O \left( \sum_{n \leq \lambda T \delta_2} \sum_{m < n} \frac{|a_n a_m|}{(nm)^{\sigma} n (\log(n/m))^2} \right) \\
&= \begin{cases} O(T^{k+1-2\sigma}), & k/2 \leq \sigma < (k+1)/2, \\ O(\log^2 T), & \sigma = (k+1)/2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Mit Stirlings Formel (19) erhalten wir für

$$\begin{aligned}
A_{33} &= \int_0^T \left| \kappa^{2s-k} \frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{s-k} \psi_{01} \left( \frac{\kappa n}{t} \right) \right|^2 dt \\
&= \kappa^{2(2\sigma-k)} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\bar{b}_n b_m}{(nm)^{k-\sigma}} \int_0^T \overline{\psi_{01} \left( \frac{\kappa n}{t} \right)} \psi_{01} \left( \frac{\kappa m}{t} \right) t^{2(k-2\sigma)} \\
&\quad \times (1 + O(t^{-1})) \left( \frac{n}{m} \right)^{-it} dt.
\end{aligned}$$

Mit den Lemma 5(ii), 6 und 7 ist also für  $\sigma = k/2$

$$\begin{aligned}
A_{33} &= \sum_{n < \lambda T \delta} |b_n|^2 n^{-k} (T + O(n) + O(|\log(T/n)|)) + \sum_{\lambda T \delta \leq n \leq \lambda T \delta_1} |b_n|^2 n^{-k} \\
&\quad \times (O(n) + O(|\log(T/n)|)) + \sum_{\substack{n,m \leq \lambda T \delta_1 \\ n \neq m}} \frac{\bar{b}_n b_m}{(nm)^{k/2} (-i \log(n/m))} \\
&\quad \times \overline{\psi_{01}(\kappa n/T) n^{iT}} \psi_{01}(\kappa m/T) m^{iT} + \sum_{m < n \leq \lambda T \delta_1} \frac{|b_n b_m|}{(nm)^{k/2}} \\
&\quad \times (O(n^{-1} (\log(n/m))^{-2}) + O(|\log(T/n)|)) = AkT \log T + O(T).
\end{aligned}$$

und für  $k/2 < \sigma \leq (k+1)/2$  wieder mit den Lemma 5(i), 6 und 7

$$\begin{aligned}
A_{33} &= (\lambda T)^{2(k-2\sigma)} \sum_{\substack{n, m \leq \lambda T \delta_1 \\ n \neq m}} \frac{\bar{b}_n b_m}{(nm)^{k-\sigma} (-i \log(n/m))} \overline{\psi_{01}(\kappa n/T) n^{iT}} \psi_{01}(\kappa m/T) m^{iT} \\
&\quad + O \left( \sum_{m < n \leq \lambda T \delta_1} \frac{|b_n b_m|}{(nm)^{k-\sigma}} (n^{2(k-2\sigma)-1} (\log(n/m))^{-2} + n^{2(k-2\sigma)}) \right) \\
&\quad + \sum_{n \leq \lambda T \delta_1} |b_n|^2 n^{-2(k-\sigma)} \\
&\quad \times \begin{cases} O(T^{2(k-2\sigma)+1} + n^{2(k-2\sigma)+1} + n^{2(k-2\sigma)}), & k/2 < \sigma < k/2 + \frac{1}{4}, \\ O(|\log(T/n)| + 1 + n^{-1}), & \sigma = k/2 + \frac{1}{4}, \\ O(n^{2(k-2\sigma)+1} + n^{2(k-2\sigma)}), & k/2 + \frac{1}{4} < \sigma \leq (k+1)/2, \end{cases} \\
&= (\lambda T)^{2(k-2\sigma)} \sum_{\substack{n, m \leq \lambda T \delta_1 \\ n \neq m}} \frac{\bar{b}_n b_m \overline{\psi_{01}(\kappa n/T) n^{iT}} \psi_{01}(\kappa m/T) m^{iT}}{(nm)^{k-\sigma} (-i \log(n/m))} \\
&\quad + O \left( \sum_{m < n \leq \lambda T \delta_1} \frac{|b_n b_m|}{(nm)^\sigma} (1 + n^{-1} (\log(n/m))^{-2}) \right) \\
&\quad \times \begin{cases} O(T^{2(k-2\sigma)+1}) \sum_{n \leq \lambda T \delta_1} |b_n|^2 n^{2(\sigma-k)}, & k/2 < \sigma < k/2 + \frac{1}{4}, \\ O \left( \sum_{n \leq \lambda T \delta_1} |b_n|^2 n^{-k+1/2} (|\log(T/n)| + 1) \right), & \sigma = k/2 + \frac{1}{4}, \\ O \left( \sum_{n \leq \lambda T \delta_1} |b_n|^2 n^{1-2\sigma} \right), & k/2 + \frac{1}{4} < \sigma \leq (k+1)/2, \end{cases} \\
&= \begin{cases} O(T^{k+1-2\sigma}), & k/2 < \sigma < (k+1)/2, \\ O(\log^2 T), & \sigma = (k+1)/2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Analog erhalten wir für

$$\begin{aligned}
A_{44} &= \kappa^{2(2\sigma-k)} \sum_{n, m=1}^{\infty} \frac{\bar{b}_n b_m}{(nm)^{k-\sigma}} \int_0^T \overline{\psi_{02}\left(\frac{\kappa n}{t}\right)} \psi_{02}\left(\frac{\kappa m}{t}\right) t^{2(k-2\sigma)} \\
&\quad \times (1 + O(t^{-1})) \left(\frac{n}{m}\right)^{-it} dt = \sum_{n \leq \lambda T \delta_2} |b_n|^2 n^{2(\sigma-k)} O(n^{2(k-2\sigma)+1}) + \\
&\quad \sum_{\substack{n, m \leq \lambda T \delta_2 \\ n \neq m}} \frac{\bar{b}_n b_m \overline{\psi_{02}(\kappa n/T) n^{iT}} \psi_{02}(\kappa m/T) m^{iT}}{(nm)^{k-\sigma} (-i \log(n/m))} (\lambda T)^{2(k-2\sigma)} \\
&\quad + O \left( \sum_{m < n \leq \lambda T \delta_2} \frac{|b_n b_m|}{(nm)^{k-\sigma}} n^{2(k-2\sigma)} (n^{-1} (\log(n/m))^{-2} + 1) \right) \\
&= \begin{cases} O(T^{k+1-2\sigma}), & k/2 \leq \sigma < (k+1)/2, \\ O(\log^2 T), & \sigma = (k+1)/2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Mit (22) ergibt sich für

$$\Lambda_{55} = \begin{cases} O(\log T), & \sigma = k/2, \\ O(1), & k/2 < \sigma \leq (k+1)/2. \end{cases}$$

Für die gemischten Terme  $\Lambda_{v\mu}$ ,  $v \neq \mu$  genügt in manchen Fällen die Schwarzsche Ungleichung  $|\Lambda_{v\mu}| \leq (\Lambda_{vv}\Lambda_{\mu\mu})^{1/2}$ . Insbesondere erhalten wir so

$$\Lambda_{v\mu} = \begin{cases} O(T), & \sigma = k/2, \\ O(T^{k+1-2\sigma}), & k/2 < \sigma < (k+1)/2, \\ O(\log^2 T), & \sigma = (k+1)/2. \end{cases} \quad \begin{array}{lll} \mu \neq 1, 3 & \text{und} & v \neq 1, 3, \\ \mu > 1 & \text{und} & v > 1, \\ \mu > 1 & \text{und} & v > 1. \end{array}$$

Schwächere  $O$ -Terme als im Satz verlangt ergeben sich auf diese Weise für  $\Lambda_{1\mu}$ ,  $k/2 \leq \sigma \leq (k+1)/2$ ,  $\mu = 2, \dots, 5$ , und  $\Lambda_{3\mu}$ ,  $\sigma = k/2$ ,  $\mu = 1, 2, 4, 5$ . Man sieht, dass für  $\sigma = k/2$  jeweilen  $\Lambda_{12}$  und  $\Lambda_{34}$ ,  $\Lambda_{14}$  und  $\Lambda_{32}$ , respektive  $\Lambda_{15}$  und  $\Lambda_{35}$  dieselbe Größenordnung haben. Es genügt also, noch  $\Lambda_{1\mu}$ ,  $\mu = 2, \dots, 5$  für  $k/2 \leq \sigma \leq (k+1)/2$  zu untersuchen: Ähnlich wie bei  $\Lambda_{22}$  erhalten wir für

$$\begin{aligned} \Lambda_{12} &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_n a_m}{(nm)^{\sigma}} \int_0^T \overline{\psi_1\left(\frac{\kappa n}{t}\right)} \psi_2\left(\frac{\kappa m}{t}\right) \left(\frac{n}{m}\right)^{it} dt = O\left(\sum_{n \leq \lambda T \delta_2} |a_n|^2 n^{-2\sigma+1}\right) \\ &\quad + \sum_{\substack{n, m \leq \lambda T \delta_2 \\ n \neq m}} \frac{\bar{a}_n a_m \overline{\psi_1(\kappa n/T)} n^{-iT} \psi_2(\kappa m/T) m^{-iT}}{(nm)^{\sigma} i \log(n/m)} \\ &\quad + O\left(\sum_{m < n \leq \lambda T \delta_2} \frac{|a_n a_m|}{(nm)^{\sigma} n (\log(n/m))^2}\right) = \begin{cases} O(T^{k+1-2\sigma}), & k/2 \leq \sigma < (k+1)/2, \\ O(\log^2 T), & \sigma = (k+1)/2. \end{cases} \end{aligned}$$

Benutzen wir die Abschätzungen für  $J'$  in Lemma 7, so ergeben sich für

$$\begin{aligned} \Lambda_{13} &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n n^{-\bar{s}} \overline{\psi_1\left(\frac{\kappa n}{t}\right)} \kappa^{2s-k} \frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(s)} \sum_{m=1}^{\infty} b_m m^{s-k} \psi_{01}\left(\frac{\kappa m}{t}\right) dt \\ &= \kappa^{2\sigma-k} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_n b_m}{n^{\sigma} m^{k-\sigma}} \int_0^T \overline{\psi_1\left(\frac{\kappa n}{t}\right)} \psi_{01}\left(\frac{\kappa m}{t}\right) \frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(s)} (\kappa^2 mn)^{it} dt \\ &= O\left(\sum_{m \leq n \leq \lambda T \delta_1} \frac{|a_n b_m|}{n^{\sigma} m^{k-\sigma}} \left\{ \begin{array}{l} |\log(T/n)|, \quad \sigma = k/2, \\ n^{k-2\sigma}, \quad k/2 < \sigma \leq (k+1)/2 \end{array} \right\}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O \left( \sum_{m \leq n \leq \lambda T \delta_1} \frac{|a_n b_m|}{(nm)^\sigma} \left\{ \begin{array}{l} |\log(T/n)|, \quad \sigma = k/2, \\ 1, \quad k/2 < \sigma \leq (k+1)/2 \end{array} \right\} \right) \\
&= \begin{cases} O(T^{k+1-2\sigma}), & k/2 \leq \sigma < (k+1)/2, \\ O(\log^2 T), & \sigma = (k+1)/2, \end{cases}
\end{aligned}$$

und für

$$\begin{aligned}
A_{14} &= \kappa^{2\sigma-k} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_n b_m}{n^\sigma m^{k-\sigma}} \int_0^T \overline{\psi_1\left(\frac{\kappa n}{t}\right)} \psi_{02}\left(\frac{\kappa m}{t}\right) \frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(s)} (\kappa^2 mn)^{it} dt \\
&= O \left( \sum_{m \leq n \leq \lambda T \delta_2} \frac{|a_n b_m|}{n^\sigma m^{k-\sigma}} \left\{ \begin{array}{l} |\log(T/n)|, \quad \sigma = k/2, \\ n^{k-2\sigma}, \quad k/2 < \sigma \leq (k+1)/2 \end{array} \right\} \right) \\
&= \begin{cases} O(T^{k+1-2\sigma}), & k/2 \leq \sigma < (k+1)/2, \\ O(\log^2 T), & \sigma = (k+1)/2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Da aus Lemma 1(i) für  $j=1, 3$  folgt, dass

$$f_j(\sigma+it) = \begin{cases} O(|t|^{(k+1)/2-\sigma}), & k/2 \leq \sigma < (k+1)/2, \\ O(\log |t|), & \sigma = (k+1)/2 \end{cases}, \quad |t| \rightarrow \infty,$$

ergibt sich schliesslich mit (22) für

$$\begin{aligned}
A_{51} &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \psi_1\left(\frac{\kappa n}{t}\right) \overline{R(\sigma+it)} dt \\
&= \begin{cases} O\left(\int_0^T t^{k-2\sigma} dt\right), & k/2 \leq \sigma < (k+1)/2, \\ O\left(\int_1^T \frac{\log t}{t} dt\right), & \sigma = (k+1)/2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} O(T^{k+1-2\sigma}), & k/2 \leq \sigma < (k+1)/2, \\ O(\log^2 T), & \sigma = (k+1)/2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Chandrasekharan, K. und Narasimhan, R., *The approximate functional equation for a class of zeta-functions*, Math. Ann. 152 (1963), 30–64.
- [2] Deligne, P., *La conjecture de Weil I*, Publ. Math. I.H.E.S. 43 (1974), 273–307.
- [3] Deuring, M., *Asymptotische Entwicklungen der Dirichletschen L-Reihen*, Math. Ann. 168 (1967), 1–30.
- [4] Good, A., *Ein Mittelwertsatz für Dirichletreihen, die Modulformen assoziiert sind*, Comment. Math. Helv. 49 (1974), 35–47.
- [5] Hardy, G. H. and Littlewood, J. E., *The approximate functional equation for  $\zeta$  and  $\zeta^2$* , Proc. London Math. Soc. (2) 29 (1929), 81–97.
- [6] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., and Pólya, G., *Inequalities*, Cambridge University Press (1952).
- [7] Hecke, E., *Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung*, Math. Ann. 112 (1936), 644–699.
- [8] ——, *Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung I*, Math. Ann. 114 (1937), 1–28.
- [9] Huxley, M. N., *The large sieve inequality for algebraic number fields II: Means of moments of Hecke zeta-functions*, Proc. London Math. Soc. (3) 21 (1970), 108–128.
- [10] ——, *The distribution of prime numbers*, Clarendon Press, Oxford (1972).
- [11] Lavrik, A. F., *An approximate functional equation for Dirichlet L-functions*, Trans. Moscow Math. Soc. 18 (1968), 101–115.
- [12] ——, *Approximate functional equations for Dirichlet functions*, Math. of the USSR-Izvestija 2, No. 1 (1968), 129–179.
- [13] Linnik, Yu. V., *An asymptotic formula in an additive problem of Hardy-Littlewood*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser Mat. 24, (1960), 629–706; Engl. transl., Amer. Math. Soc. Transl. (2) 46 (1965), 65–148.
- [14] ——, *All large numbers are sums of a prime and two squares (A problem of Hardy-Littlewood) II*, Mat. Sb. 53(95) (1961), 3–38; Engl. transl., Amer. Math. Soc. Transl. (2) 37 (1964), 197–240.
- [15] Montgomery, H. L. and Vaughan, R. C., *Hilbert's Inequality*, Journ. London Math. Soc. (2) 8 (1974), 73–82.
- [16] Rankin, R. A., *Contributions to the theory of Ramanujan's function  $\tau(n)$  and similar arithmetical functions II*, Proc. Cambr. Phil. Soc. 35 (1939), 357–372.
- [17] Siegel, C. L., *Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik 2 (1932).
- [18] ——, *Contributions to the theory of the Dirichlet L-series and the Epstein zeta-functions*, Annals of Math. 44 (1943), 143–172.

ETH Zürich, Hg G 15.1

Rämistrasse 101

8006 Zürich – Schweiz

Eingegangen den 27. Januar 1975

