

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 50 (1975)

**Artikel:** Partitionstheoreme für Graphen.  
**Autor:** Deuber, Walter  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-38811>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.05.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Partitionstheoreme für Graphen

WALTER DEUBER

### §1. Einleitung

Im Zusammenhang mit einem logischen Problem bewies Ramsey [10] den folgenden Satz: Sei  $n$  eine natürliche Zahl. Wird die Menge  $\binom{\mathbb{N}}{n}$  aller  $n$ -elementigen Teilmengen von  $\mathbb{N}$  der Menge aller natürlichen Zahlen in zwei Klassen zerlegt, dann gibt es eine unendliche Teilmenge  $X$  von  $\mathbb{N}$  so, dass die Menge  $\binom{X}{n}$  aller  $n$ -elementigen Teilmengen von  $X$  ganz in einer Klasse enthalten ist.

Mit dem Unendlichkeitslemma von König erhält man leicht das folgende ebenfalls von Ramsey stammende Resultat: Seien  $x, n$  natürliche Zahlen. Dann gibt es eine natürliche Zahl  $r$  mit folgender Eigenschaft: Wird die Menge  $\binom{r}{n}$  aller  $n$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, r\}$  in zwei Klassen zerlegt, dann gibt es eine  $x$ -elementige Teilmenge  $X$  von  $\{1, \dots, r\}$  so, dass  $\binom{X}{n}$  ganz in einer Klasse enthalten ist.

Frägt man nach Verallgemeinerungsmöglichkeiten für den Satz von Ramsey, so bietet sich unter anderem ([1], [2], [3], [4], [7]) die Graphentheorie an. In der Sprache der Graphentheorie lautet der Satz von Ramsey: Seien  $x, n$  natürliche Zahlen. Dann gibt es eine natürliche Zahl  $r$  mit folgender Eigenschaft: Wird die Menge  $\binom{K_r}{K_n}$  aller  $n$ -punktigen vollständigen Subgraphen eines  $r$ -punktigen vollständigen Graphen  $K_r$  in zwei Klassen zerlegt, so gibt es einen  $x$ -punktigen vollständigen Subgraphen  $K_x$  von  $K_r$  so, dass  $\binom{K_x}{K_n}$  ganz in einer Klasse enthalten ist.

Da für vollständige Graphen die Begriffe „Subgraph“, „Teilgraph“, „Untergraph“, zusammenfallen, eröffnen sich hier zwei Verallgemeinerungsmöglichkeiten.

Einerseits existieren nach dem Satz von Ramsey trivialerweise „verallgemeinerte Ramseyzahlen“: Sei  $X$  ein ungerichteter Graph ohne Schlingen und Mehrfachkanten und  $n$  eine natürliche Zahl. Dann gibt es eine kleinste Zahl  $r$  mit folgender Eigenschaft: Es gibt einen  $r$ -punktigen Graphen  $R$  so, dass zu jeder Zerlegung der Menge

$\binom{R}{K_n}$  aller  $n$ -punktigen vollständigen Teilgraphen von  $R$  in zwei Klassen ein zu  $X$  isomorpher Teilgraph  $X^*$  von  $R$  existiert, so, dass  $\binom{X^*}{K_n}$  in einer Klasse enthalten ist.

Das schwierige Problem hierbei ist die Berechnung von  $r$  (siehe den Uebersichtsartikel [5]). So faszinierend die bei diesen Berechnungen angewandten Ueberlegungen sind, so geben diese Ramseyzahlen doch nur die Kardinalität der Punkt-mengen gewisser Graphen an.

Andrerseits erhebt sich folgendes Problem: Zu welchen Graphen  $X, N$  gibt es einen Graphen  $R$  mit folgender Eigenschaft: Zu jeder Zerlegung der Menge  $\binom{R}{N}$  aller zu  $N$  isomorphen Untergraphen von  $R$  in zwei Klassen gibt es einen zu  $X$  isomorphen Untergraphen  $X^*$  von  $R$  so, dass  $\binom{X^*}{N}$  ganz in einer Klasse enthalten ist?

Für  $N = K_1$  wurde dies von Folkman [11], für  $N = K_2$  von Deuber [2] und unter verschärften Bedingungen von Nešetřil, Rödl [9] für alle  $X$  positiv gelöst.

Es ist leicht einzusehen, dass die Frage für die in Figur 1 definierten Graphen  $X, N$  negativ zu beantworten ist. Hierzu sei  $R$  ein beliebiger Graph mit geordneter Punktmenge. Sei  $N^*$  ein zu  $N$  isomorpher Untergraph von  $R$ . Sei  $N^*$  in der ersten Klasse, falls  $a^* < b^*$  und sonst in der zweiten Klasse. Offenbar enthält  $R$  keinen zu  $X$  isomorphen Untergraphen  $X^*$  so, dass  $\binom{X^*}{N}$  ganz in einer Klasse enthalten ist.

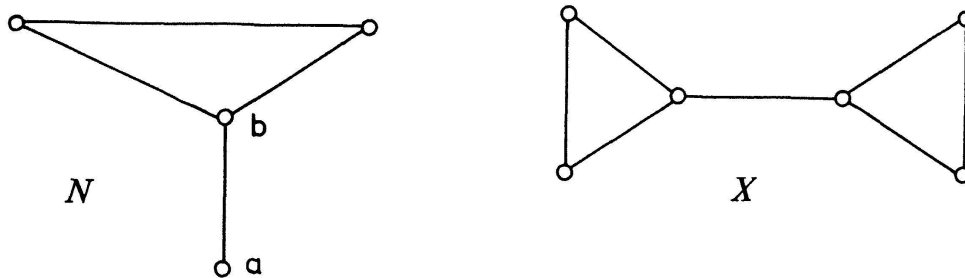


Fig. 1.

Dieses Gegenbeispiel führt dazu, Graphen mit geordneten Punkt-mengen und Untergraphen mit ordnungstreuen Einbettungen zu betrachten, und hierfür obiges Problem zu studieren.

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst gezeigt, dass folgendes gilt:

**SATZ.** Sei  $X$  ein beliebiger geordneter Graph und  $N$  ein vollständiger Graph. Dann gibt es einen geordneten Graphen  $R$  mit folgender Eigenschaft: Wird die Menge  $\binom{R}{N}$  aller zu  $N$  isomorphen Untergraphen von  $R$  in zwei Klassen zerlegt, dann gibt es einen

zu  $X$  ordnungstreu isomorphen Untergraphen  $X^*$  von  $R$  so, dass  $\binom{X^*}{N}$  ganz in einer Klasse enthalten ist.

Anschliessend wird ein analoges Resultat für eine allgemeinere Klasse von Graphen  $N$  als nur die der vollständigen Graphen bewiesen. Insbesondere gilt:

**SATZ.** Sei  $X$  ein beliebiger geordneter Graph und  $N$  ein geordneter Stern, dessen Zentrum extremal in der Ordnung ist. Dann gibt es einen geordneten Graphen  $R$  mit folgender Eigenschaft: Wird die Menge  $\binom{R}{N}$  aller zu  $N$  ordnungstreu isomorphen Untergraphen von  $R$  in zwei Klassen zerlegt, so gibt es einen zu  $X$  ordnungstreu isomorphen Untergraphen  $X^*$  von  $R$  so, dass  $\binom{X^*}{N}$  ganz in einer Klasse enthalten ist.

## §2. Definitionen

Ein Graph  $X$  ist ein Paar  $X = (V(X), E(X))$ , wo  $V(X)$  eine endliche geordnete Menge und  $E(X)$  eine Menge von zweielementigen Teilmengen von  $V(X)$  ist. Die Elemente von  $V(X)$  sind die Punkte, diejenigen von  $E(X)$  die Kanten des Graphen  $X$ . Ein Graph  $X$  sei vollständig, falls  $E(X)$  die Menge aller zweielementigen Teilmengen von  $V(X)$  ist. Der vollständige Graph mit Punktmenge  $\{1, \dots, m\}$  ( $m$  eine natürliche Zahl) werde mit „ $K_m$ “ bezeichnet.

Im weitem seien  $X_i = (V(X_i), E(X_i))$  ( $i = 1, 2$ ) Graphen.

Eine injektive ordnungstreu Abbildung  $\alpha: V(X_1) \rightarrow V(X_2)$  ist eine Einbettung – in Zeichen:  $\alpha: X_1 \rightarrow X_2$  –, falls für alle zweielementigen Teilmengen  $\{v_1, v_2\}$  von  $V(X_1)$  gilt:  $\{v_1, v_2\} \in E(X_1)$  genau wenn  $\{\alpha(v_1), \alpha(v_2)\} \in E(X_2)$ . Eine Einbettung  $\alpha: X_1 \rightarrow X_2$  ist ein Isomorphismus, falls  $\alpha$  umkehrbar ist.  $X_1$  und  $X_2$  sind isomorph, falls ein Isomorphismus  $\alpha: X_1 \rightarrow X_2$  existiert. Da  $V(X_i)$  ( $i = 1, 2$ ) geordnete endliche Mengen sind, gibt es höchstens einen Isomorphismus  $X_1 \rightarrow X_2$ .

$X_1$  ist Untergraph von  $X_2$  – in Zeichen:  $X_1 \subseteq X_2$  –, falls  $V(X_1) \subseteq V(X_2)$  und die Inklusionsabbildung eine Einbettung ist. Sei  $V^* \subseteq V(X_1)$ ; dann gibt es genau einen Untergraphen  $X^*$  von  $X_1$  mit  $V(X^*) = V^*$ , den von  $V^*$  erzeugten Untergraphen. Sei  $\alpha: X_1 \rightarrow X_2$  eine Einbettung; dann ist  $\text{Im } \alpha$  der von  $\{x \in V(X_2) : \exists y \in V(X_1) \alpha(y) = x\}$  erzeugte Untergraph. Offenbar sind  $X_1$  und  $\text{Im } \alpha$  isomorph.  $\binom{X_2}{X_1}$  ist die Menge der Einbettungen  $\alpha: X_1 \rightarrow X_2$ . Somit ist  $\left\{ \text{Im } \alpha : \alpha \in \binom{X_2}{X_1} \right\}$  die Menge der zu  $X_1$  isomorphen Untergraphen von  $X_2$ . Letztere werden „ $X_1$ -Untergraphen von  $X_2$ “ genannt und meist durch ihre Einbettung vorgegeben.

$X'_1$  ist der Untergraph von  $X_1$  erzeugt von  $V(X_1) - \{\max V(X_1)\}$ .  $X''_1$  ist der Untergraph von  $X'_1$  erzeugt von  $\{x \in V(X'_1) : \{x, \max V(X_1)\} \in E(X_1)\}$ .  $X_1$  ist durch

$X'_1, X''_1$  bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Diese Bemerkung wird in Beweisen zum Tragen kommen, die Rekursion über den Aufbau von  $X$  benützen.

Das Komplement  $X_1^c$  von  $X_1$  ist folgender Graph:  $V(X_1^c) = V(X_1)$ ,  $E(X_1^c) = \{\{v_1, v_2\} : v_1, v_2 \in V(X_1), v_1 \neq v_2, \{v_1, v_2\} \notin E(X_1)\}$ . Das Komplement eines vollständigen Graphen ist ein leerer Graph.  $X_1 + X_2$  ist die disjunkte Vereinigung von  $X_1$  und  $X_2$ .

$\mathbb{N}$  ist die Menge der positiven ganzen Zahlen. Im weitem seien  $X_i, X_i^*$  ( $i=1, 2$ ) geordnete endliche Mengen.  $X_1 + X_2$  ist die disjunkte Vereinigung von  $X_1$  und  $X_2$ , d.h.  $X_1 + X_2 = \{1\} \times X_1 \cup \{2\} \times X_2$  und  $(i_1, v_1) < (i_2, v_2)$  ( $(i_1, v_1), (i_2, v_2) \in X_1 + X_2$ ) genau wenn  $i_1 < i_2$  oder aber  $i_1 = i_2$  und  $v_1 < v_2$  in  $X_{i_1}$ . Sind  $X_1$  und  $X_2$  disjunkt, so ist die Abbildung  $\alpha: X_1 + X_2 \rightarrow X_1 \cup X_2$  mit  $\alpha((i, x)) = x$ , ( $(i, x) \in X_1 + X_2$ ), eine vergessbare Bijektion. Sind  $X_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) geordnete Mengen, so ist  $\sum_1^n X_i = X_1 + \dots + X_n$ . Sind  $\alpha_i: X_i^* \rightarrow X_i$  ( $i=1, 2$ ) ordnungstreue Abbildungen, so ist  $\alpha_1 + \alpha_2: X_1^* + X_2^* \rightarrow X_1 + X_2$  die folgende ordnungstreue Abbildung:

$$(\alpha_1 + \alpha_2)((i, x)) = \begin{cases} (1, \alpha_1(x)) & \text{falls } i=1 \\ (2, \alpha_2(x)) & \text{falls } i=2. \end{cases}$$

Es sei  $\alpha: X_1 \rightarrow X_2$  eine beliebige Abbildung und  $X_1^* \subseteq X_1$ . Dann ist  $\alpha \upharpoonright X_1^*$  die Beschränkung von  $\alpha$  auf  $X_1^*$ . Sei  $v \in X_2$ ; für jede Menge  $X_1$  sei  $\mathbf{v}$  die konstante Abbildung  $X_1 \rightarrow X_2$  mit  $\mathbf{v}(x) = v$ .

Eine Färbung von  $X_1$  ist eine Abbildung  $f: X_1 \rightarrow \{\text{rot, blau}\}$ .  $f(x)$  ist die Farbe netes von  $x$ , und  $x$  ist  $f(x)$ -gefärbt.

### §3. Verheftungen

Der hier definierte Begriff der Verheftung von Graphen wird sich später als geeignete technisches Hilfsmittel herausstellen.

Seien  $R, S, T$  Graphen und  $\binom{R}{T} \neq \emptyset$ ,  $\binom{S}{T} \neq \emptyset$ . Sei  $\gamma \in \binom{S}{T}$ . Sei  $\binom{R}{T} = \{\delta_1, \dots, \delta_q\}$

Die Verheftung von  $R$  und  $S$  längs  $\gamma$  ist der folgende Graph  $W = (\bar{R} \& S) / \gamma$ :

$$V(W) = \{1, \dots, q\} \times (V(S) - V(\text{Im } \gamma)) \cup V(R) \cup \{0_R\}.$$

Die Ordnung  $\leq^{\&}$  auf  $V(W)$  ist wie folgt definiert: Sei  $u, v \in V(R)$ ,  $i, j \in \{1, \dots, q\}$  und  $x, y \in V(S) - V(\text{Im } \gamma)$ . Dann ist  $u \leq^{\&} 0_R$ ,  $(i, x) \leq^{\&} 0_R$ . Es ist  $u \leq^{\&} v$  genau wenn  $u \leq^R v$ . Es ist  $u \leq^{\&} (i, x)$  falls  $u <^{\&} \min V(\text{Im } \delta_i)$  oder  $\exists z \gamma(z) <^S x \wedge u \leq^{\&} \delta_i(z)$ , andernfalls  $(i, x) \leq^{\&} u$ . Es ist  $(i, x) \leq^{\&} (j, y)$  falls  $\exists v(i, x) \leq^{\&} v$ ,  $v \leq^{\&} (j, y)$ , sonst falls lexikographisch  $(i, x) \leq (j, y)$ .

$$E(W) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4, \text{ wo}$$

$$A_1 = \{\{0_R, x\} : x \in V(R)\},$$

$$A_2 = E(R),$$

$$A_3 = \bigcup_1^q \{ \{(i, x), (i, y)\} : x, y \in V(S) - V(\text{Im } \gamma), \{x, y\} \in E(S) \},$$

$$A_4 = \bigcup_1^q \{ \{x, (i, y)\} : y \in V(S) - V(\text{Im } \gamma), \exists \bar{x} \in V(T) \ x = \delta_i(\bar{x}) \wedge \{\gamma(\bar{x}), y\} \in E(S) \}.$$

Anschaulich ist  $(\bar{R} \& S)/\gamma$  somit der Graph, den man erhält, indem man an jeden  $T$ -Untergraphen von  $R$  eine Kopie von  $S$  längs  $\text{Im } \gamma$  anheftet, die so entstandene Punktmenge geeignet ordnet, einen letzten Punkt  $0_R$  hinzufügt und diesen mit jedem Punkt von  $R$  durch eine Kante verbindet.

LEMMA 1. Seien  $R, S, T$  Graphen,  $\gamma \in \binom{S}{T}$ ,  $\left(\frac{R}{T}\right) = \{\delta_1, \dots, \delta_q\}$  und  $W = (\bar{R} \& S)/\gamma$ . Dann ist für jedes  $i \in \{1, \dots, q\}$  die Abbildung  $\alpha_i: V(S) \rightarrow V(W)$  mit

$$\alpha_i(x) = \begin{cases} \delta_i(\bar{x}) & \text{falls } x = \gamma(\bar{x}) \\ (i, x) & \text{falls } x \in V(S) - V(\text{Im } \gamma). \end{cases}$$

eine Einbettung von  $S$  in  $W$ .

Beweis 1. Definition von  $W$ .

DEFINITION. Die in Lemma 1 definierten Einbettungen  $\alpha_i \in \binom{(\bar{R} \& S)/\gamma}{S}$  ( $i = 1, \dots, q$ ) sind die kanonischen Einbettungen und die Untergraphen  $\text{Im } \alpha_i$  die kanonischen Untergraphen von  $(\bar{R} \& S)/\gamma$ .

DEFINITION. Seien  $R, S, T, U$  Graphen und  $\varepsilon \in \binom{S}{U}$ , sowie  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, q$ ) die kanonischen Einbettungen von  $(\bar{R} \& S)/\gamma$ . Dann ist  $\varepsilon^\&$  die Einbettung des von  $\bigcup_1^q V(\text{Im } \alpha_i \circ \varepsilon)$  erzeugten Untergraphen von  $(\bar{R} \& S)/\gamma$ .

LEMMA 2. Seien  $S_0, R_0, R_1, T_0, T_1$  Graphen,  $\gamma_0 \in \binom{S_0}{T_0}$ ,  $\gamma_1 \in \binom{S_0}{T_1}$ . Sei  $S_1 = (\bar{R}_0 \& S_0)/\gamma_0$ ,  $S_2 = (\bar{R}_1 \& S_1)/\gamma_1^\&$ . Sei ferner  $\tilde{S}_1$  kanonischer Untergraph von  $S_2$  und  $\tilde{S}_0$  kanonischer Untergraph von  $\tilde{S}_1$ . Dann gilt: Für alle  $x \in V(\tilde{S}_0)$  ist  $\{0_{R_1}, x\} \in E(S_2)$  genau wenn  $x \in V(\text{Im } \tilde{\gamma}_1)$ , wo  $\tilde{\gamma}_1$  die  $\gamma_1$  entsprechende Einbettung  $T_1 \rightarrow \tilde{S}_0$  ist.

Beweis. Sei  $x \in V(S_2) - \{0_{R_1}\}$ .  $\{0_{R_1}, x\} \in E(S_2)$  genau wenn  $x \in V(R_1)$ . Nach Definition von  $\tilde{S}_1$  gilt für alle  $x \in V(\tilde{S}_1)$ :  $\{0_{R_1}, x\} \in E(S_2)$  genau wenn  $x \in V(\text{Im } \gamma_1^\&)$ . Nach Definition von  $\gamma_1^\&$  ist  $x \in V(\text{Im } \gamma_1^\&)$  genau, wenn eine kanonische Einbettung  $\alpha: S_0 \rightarrow \tilde{S}_1$  existiert mit  $x \in V(\text{Im } \alpha \circ \gamma_1)$ . Nach Definition von  $\tilde{S}_1$  ist  $V(\text{Im } \alpha \circ \gamma_1) \cap V(\tilde{S}_0) = V(\text{Im } \tilde{\gamma}_1)$ .

#### §4. Ramseygraphen

Seien  $X, Y, Z$  Graphen.  $R_Z(X, Y)$  ist die Klasse aller Graphen  $U$  für die gilt: Für jede Färbung  $f$  von  $\binom{U}{Z}$  gilt mindestens eine der folgenden Aussagen:

(I) Es gibt einen zu  $X$  isomorphen Untergraphen  $X^*$  von  $U$  mit  $f \upharpoonright \binom{X^*}{Z} = \text{rot}$ .

(II) Es gibt einen zu  $Y$  isomorphen Untergraphen  $Y^*$  von  $U$  mit  $f \upharpoonright \binom{Y^*}{Z} = \text{blau}$ .

*Bemerkungen.* Ramsey [10] bewies, dass für alle  $p, q, r \in \mathbb{N}$  gilt:  $R_{K_r}(K_p, K_q) \neq \emptyset$ . Für alle Graphen  $X, Y$  gilt  $R_{K_1}(X, Y) \neq \emptyset$  und  $R_{K_2}(X, Y) \neq \emptyset$ , ersteres nach Folkman [11], letzteres nach Deuber [2], Nešetřil, Rödl [9]. Im nächsten Paragraphen werden wir zeigen: Für alle  $r \in \mathbb{N}$  und alle Graphen  $X, Y$  ist  $R_{K_r}(X, Y) \neq \emptyset$ . Die Beweise der angegebenen Sätze gelangen letztlich, weil der Binomialkoeffizient  $\binom{U}{V}$  sich für gewisse Graphen  $U, V$  durch eine genügend einfache Pascalformel aus den Binomialkoeffizienten  $\binom{U^*}{V^*}$  ( $U^* \subseteq U, V^* \subseteq V$ ) berechnen lässt. Eine befriedigende Theorie der Pascalformeln für Graphen ist trotz Ansätzen (Deuber, Leeb: nicht veröffentlicht) bisher nicht gelungen.

**SATZ 1.** Für alle natürlichen Zahlen  $m$  und alle Graphen  $X, Y$  gilt  $R_{K_m}(X, Y) \neq \emptyset$ .

**DEFINITION.**  $R_m(X, Y) = R_{K_m}(X, Y)$ .

*Beweisskizze:* Mit Induktion wird gezeigt, dass für alle natürlichen Zahlen  $m$  gilt: Für alle Graphen  $X, Y$  ist  $R_m(X, Y) \neq \emptyset$ . Wie schon erwähnt, gilt dies für  $m=1$ . Sei also  $m \geq 1$  und nehmen wir an:

A1 Für all Graphen  $U, V$  ist  $R_m(U, V) \neq \emptyset$ .

Um die Aussage für  $m+1$  zu beweisen, wird Doppelinduktion über den Aufbau von  $X, Y$  angewandt. Falls  $\binom{X}{K_{m+1}} = \emptyset$  oder  $\binom{Y}{K_{m+1}} = \emptyset$ , so ist  $X+Y \in R_{m+1}(X, Y)$ .

Nehmen wir also an:

A2  $R_{m+1}(X', Y) \neq \emptyset$  und  $R_{m+1}(X, Y') \neq \emptyset$ .

Somit bleibt zu zeigen, dass  $R_{m+1}(X, Y) \neq \emptyset$ .

Das folgende Lemma möge das Verständnis der Konstruktion eines Graphen aus  $R_{m+1}(X, Y)$  erleichtern.

LEMMA 3. VORAUSSETZUNGEN: Seien  $S, T$ , Graphen,  $\gamma \in \binom{S}{T}$ ,  $R \in R_m(T, T)$ ,  $\binom{R}{T} = \{\delta_1, \dots, \delta_q\}$  und  $W = (\bar{R} \& S)/\gamma$ .

BEHAUPTUNG: Zu jeder Färbung von  $\binom{W}{K_{m+1}}$  gibt es eine kanonische Einbettung  $\alpha$  so, dass für den von  $V(\text{Im } \alpha) + \{0_R\}$  aufgespannten Untergraphen von  $W$  gilt: Alle  $K_{m+1}$ -Untergraphen welche  $0_R$  enthalten sind gleich gefärbt.

Beweis 3. Sei  $f$  eine Färbung von  $\binom{W}{K_{m+1}}$ . Sei  $R$  der von  $V(R)$  aufgespannte Untergraph von  $W$ . Wir definieren eine Färbung  $f'$  von  $\binom{R}{K_m}$ : Sei  $\xi' \in \binom{R}{K_m}$ . Nach Definition von  $W$  ist der von  $V(\text{Im } \xi') + \{0_R\}$  erzeugte Untergraph von  $W$  isomorph zu  $K_{m+1}$ . Sei  $\xi$  dessen Einbettung und  $f'(\xi') = f(\xi)$ . Da  $R \in R_m(T, T)$ , gibt es  $i \in \{1, \dots, q\}$  so, dass  $f' \upharpoonright \binom{\text{Im } \delta_i}{K_m} = \text{const}$  ( $\text{const} \in \{\text{rot}, \text{blau}\}$ ). Sei  $\alpha = \alpha_i$ . Für den von  $V(\text{Im } \alpha) + \{0_R\}$  aufgespannten Untergraphen  $S^*$  von  $W$  gilt nach Definition von  $W$ : Für alle  $\xi \in \binom{S^*}{K_{m+1}}$  mit  $0_R \in V(\text{Im } \xi)$  ist  $(\text{Im } \xi)'$  ein  $K_m$ -Untergraph von  $\text{Im } \delta_i$ . Nach Definition von  $f'$  ist somit  $f(\xi) = \text{const}$ .

Der Beweis von Satz 1 wird durch folgendes Lemma vervollständigt.

LEMMA 4: VORAUSSETZUNGEN: Sei  $m \geq 1$ .

A1 Für alle Graphen  $U, V$  ist  $R_m(U, V) \neq \emptyset$ .

A2 Seien  $X_1, X_2$  Graphen mit  $R_{m+1}(X'_1, X_2) \neq \emptyset$  und  $R_{m+1}(X_1, X'_2) \neq \emptyset$ .

BEHAUPTUNG:  $R_{m+1}(X_1, X_2) \neq \emptyset$ .

Beweis 4: Es wird rekursiv ein Graph definiert. Anschliessend wird gezeigt, dass  $R_{m+1}(X_1, X_2)$  diesen Graphen enthält.

Sei  $A_1 \in R_{m+1}(X'_1, X_2)$ ,  $A_2 \in R_{m+1}(X_1, X'_2)$ . Für  $i = 1, 2$  seien  $\varepsilon^i$  die Einbettungen von  $X''_i$  in  $X'_i$  und  $\beta^i = \bar{\beta}^i \circ \varepsilon^i$ ,  $\left( \bar{\beta}^i \in \binom{A_i}{X'_i} \right)$ .

KONSTRUKTION:

SCHRITT 0: Sei  $S^0 = A_1 + A_2$ .

Sei  $\{\gamma_1^0, \dots, \gamma_p^0\} = \left\{ \gamma \in \binom{S^0}{X''_1 + X''_2} : \exists \bar{\beta}^1 \in \binom{A_1}{X'_1} \exists \bar{\beta}^2 \in \binom{A_2}{X'_2} \gamma = \beta^1 + \beta^2 \right\}$ .

Sei  $k < p$ .

SCHRITT  $k+1$ : Es seien  $S^k$  und  $\gamma_j^k$  ( $j=1, \dots, p$ ) definiert. Es sei  $R^{k+1} \in R_m(\text{Im } \gamma_{k+1}^k, \text{Im } \gamma_{k+1}^k)$ .

$$S^{k+1} = (\overline{R^{k+1}} \& S^k) / \gamma_{k+1}^k, \quad \gamma_j^{k+1} = (\gamma_j^k)^\& \quad (j=1, \dots, p).$$

*Erläuterung:* In  $A_i$  ( $i=1, 2$ ) treten  $X'_i$ -Untergraphen auf, wobei jeder einen  $X''_i$ -Untergraphen enthält. Die  $\beta^i$  sind die dabei interessierenden Einbettungen von  $X''_i$  in  $A_i$ .  $S^0$  ist die disjunkte Vereinigung von  $A_1$  und  $A_2$ .  $\{\gamma_j^0, j=1, \dots, p\}$  ist die Menge aller aus Paaren  $(\beta^1, \beta^2)$  bestehenden Einbettungen von  $X''_1 + X''_2$  in  $S^0$ . Die Konstruktion berücksichtigt nun genau diese  $p$  vielen Einbettungen, und zwar im  $k+1$ -ten Schritt  $\gamma_{k+1}^k$ , d.h. den Graphen, der in  $k$  Schritten aus  $\gamma_{k+1}^0$  erzeugt wurde. Die  $S^k$  sind so definiert, dass die Lemmata über Verheftungen anwendbar sind. Es ist nun zu zeigen, dass gilt:

**BEHAUPTUNG 5.**  $S^p \in R_{m+1}(X_1, X_2)$ .

*Beweis 5.* Eine sorgfältige Analyse obiger Konstruktion ergibt einen indirekten Beweis für Behauptung 5. Nehmen wir an, es sei  $S^p \notin R_{m+1}(X_1, X_2)$ . Dann gibt es eine Färbung  $f$  von  $\binom{S^p}{K_{m+1}}$  derart, dass  $S^p$  weder einen zu  $X_1$  isomorphen Untergraphen  $X_1^*$  mit  $f \upharpoonright \binom{X_1^*}{K_{m+1}} = \text{rot}$ , noch einen zu  $X_2$  isomorphen Untergraphen  $X_2^*$  mit  $f \upharpoonright \binom{X_2^*}{K_{m+1}} = \text{blau}$  enthält.  $f$  heiße dann „schlecht“.

Nach Definition von  $S^p$  als Verheftung von  $R^p$  und  $S^{p-1}$  längs  $\gamma_p^{p-1}$  gibt es nun nach Lemma 3 einen kanonischen Untergraphen  $\text{Im } \alpha^{p-1}$  von  $S^p$  so, dass in dem von  $V(\text{Im } \alpha^{p-1}) + \{0_p\}$  erzeugten Untergraphen gilt: Alle  $K_{m+1}$ -Untergraphen welche  $0_p$  enthalten sind gleich gefärbt. Sei  $f^{p-1} \in \{\text{rot}, \text{blau}\}$  die gemeinsame Farbe dieser  $K_{m+1}$ -Untergraphen.

Iterierte Anwendung dieser Ueberlegung definiert nun Folgen  $\alpha^j, 0_{j+1}, f^j$  ( $j=p-1, \dots, 0$ ). Dabei ist  $\alpha^j \in \binom{S^{j+1}}{S^j}$  eine kanonische Einbettung,  $0_{j+1}$  der im  $j+1$ -ten Schritt adjungierte Punkt,  $f^j$  die gemeinsame Farbe aller den Punkt  $0_{j+1}$  enthaltenden  $K_{m+1}$ -Untergraphen des von  $V(\text{Im } \alpha^j) + \{0_{j+1}\}$  erzeugten Untergraphen von  $S^{j+1}$ .

Sei nun  $\bar{S} = \text{Im } \alpha^{p-1} \circ \dots \circ \alpha^0$  und  $\bar{S}$  der von  $V(\bar{S}) + \{0_1, \dots, 0_p\}$  erzeugte Untergraph von  $S^p$ . Nach Lemma 2 gilt für alle  $x \in V(\bar{S})$  und alle  $j \in \{0, \dots, p-1\} : \{0_{j+1}, x\} \in E(\bar{S})$  genau wenn  $x \in V(\text{Im } \gamma_{j+1}^0)$ . Da  $\bar{S}$  isomorph zu  $S^0$ , mithin also  $\bar{S} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2$ , gilt nach Definition von  $S^0$  mindestens eine der folgenden Aussagen:

- (i)  $\bar{S}$  enthält einen zu  $X_1$  isomorphen Untergraphen  $X_1^*$  mit  $f \upharpoonright \binom{X_1^*}{K_{m+1}} = \text{rot}$   
oder einen zu  $X_2$  isomorphen Untergraphen  $X_2^*$  mit  $f \upharpoonright \binom{X_2^*}{K_{m+1}} = \text{blau}$ .

- (ii)  $\bar{A}_1$  enthält einen zu  $X'_1$  isomorphen Untergraphen  $\text{Im } \beta^1$  mit  $f \upharpoonright \binom{\text{Im } \beta^1}{K_{m+1}} = \text{rot}$   
 und  $\bar{A}_2$  enthält einen zu  $X'_2$  isomorphen Untergraphen  $\text{Im } \beta^2$  mit  $f \upharpoonright \binom{\text{Im } \beta^2}{K_{m+1}} = \text{blau}$ .

Da nach Annahme  $f$  schlecht ist, entfällt (i). Sei  $\gamma_{j_0}^0$  die durch  $(\beta^1, \beta^2)$  definierte Einbettung von  $X''_2 + X''_1$  in  $\bar{S}$ . Ist nun  $f^{j_0} = \text{rot}$ , so ist der von  $V(\text{Im } \beta^1) + \{0_{j_0}\}$  erzeugte Untergraph  $X_1^*$  von  $\bar{S}$  isomorph zu  $X_1$  und  $f \upharpoonright \binom{X_1^*}{K_{m+1}} = \text{rot}$ . Widerspruch. Ist aber  $f^{j_0} = \text{blau}$ , so ist der von  $V(\text{Im } \beta^2) + \{0_{j_0}\}$  erzeugte Untergraph  $X_2^*$  isomorph zu  $X_2$  und  $f \upharpoonright \binom{X_2^*}{K_{m+1}} = \text{blau}$ . Widerspruch. Damit ist gezeigt, dass die Annahme der Existenz einer schlechten Färbung widerspruchsvoll ist, und Satz 1 bewiesen.

**§5. Verallgemeinerungen**

Im Beweis von Satz 1 wurde folgende Tatsache wesentlich ausgenutzt: Für alle  $m \in \mathbb{N}$  ist  $K''_m = K'_m$ . Satz 1 kann etwas verallgemeinert werden. Anschliessend daran formulieren wir ein sich natürlich ergebendes Problem, welches wir nicht lösen konnten.

DEFINITION. Sei  $X$  ein Graph. Dann ist  $X^* = (\bar{X} \& X) / 1 \left( 1 \in \binom{X}{X} \right)$ .

Es gilt nun:

SATZ 2. Seien  $X, Y, Z$  Graphen und  $U \in R_Z(X, Y)$ . Dann ist  $U^c \in R_{Z^c}(X^c, Y^c)$ .

Beweis. Sei  $f^c$  eine Färbung von  $\binom{U^c}{Z^c}$ . Wir definieren eine Färbung  $f$  von  $\binom{U}{Z}$ . Sei  $\xi \in \binom{U}{Z}$ . Dann ist  $\xi \in \binom{U^c}{Z^c}$ . Sei  $f(\xi) = f^c(\xi)$ . Nach Definition von  $U$  gibt es einen zu  $X$  isomorphen Untergraphen  $\bar{X}$  von  $U$  mit  $f \upharpoonright \binom{\bar{X}}{Z} = \text{rot}$ , oder einen zu  $Y$  isomorphen Untergraphen  $\bar{Y}$  von  $U$  mit  $f \upharpoonright \binom{\bar{Y}}{Z} = \text{blau}$ . Jenachdem ist somit  $f^c \upharpoonright \binom{\bar{X}^c}{Z^c} = \text{rot}$ , oder  $f^c \upharpoonright \binom{\bar{Y}^c}{Z^c} = \text{blau}$ .

SATZ 3. Sei  $Z$  ein Graph so, dass für alle Graphen  $X, Y$  gilt:  $R_Z(X, Y) \neq \emptyset$ . Dann gilt für alle Graphen  $X, Y$ :  $R_{Z^*}(X, Y) \neq \emptyset$ .

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 1 wird Doppelinduktion über den Aufbau von  $X, Y$  angewandt. Ist  $\binom{X}{Z^*} \neq \emptyset$  oder  $\binom{Y}{Z^*} \neq \emptyset$ , so ist die Behauptung trivialer-

weise erfüllt. Sei  $A_1 \in R_{Z^*}(X', Y)$ ,  $A_2 \in R_{Z^*}(X, Y')$ ,  $\varepsilon^1$  die Einbettung von  $X''$  in  $X'$  und  $\varepsilon^2$  die Einbettung von  $Y''$  in  $Y'$ . Ferner sei  $\beta^i = \bar{\beta}^i \circ \varepsilon^i$ ,  $\left( \bar{\beta}^1 \in \binom{A_1}{X'}, \bar{\beta}^2 \in \binom{A_2}{Y'} \right)$ .

### KONSTRUKTION:

SCHRITT 0: Sei  $S^0 = A_1 + A_2$ .

Sei:  $\{\gamma_1^0, \dots, \gamma_p^0\} = \left\{ \gamma \in \binom{S^0}{X'' + Y''} : \exists \bar{\beta}^1 \in \binom{A_1}{X'} \exists \bar{\beta}^2 \in \binom{A_2}{Y'} \gamma = \beta^1 + \beta^2 \right\}$ .

Sei  $k < p$ .

SCHRITT  $k+1$ : Es seien  $S^k$  und  $\gamma_j^k$  ( $j=1, \dots, p$ ) definiert. Es sei  $R^{k+1} \in R_Z(\text{Im } \gamma_{k+1}^k, \text{Im } \gamma_{k+1}^k)$ ,

$$S^{k+1} = (\overline{R^{k+1}} \& S) / \gamma_{k+1}^k, \quad \gamma_j^{k+1} = (\gamma_j^k)^\& \quad (j=1, \dots, p).$$

Es ist nun zu zeigen, dass  $S^p \in R_{Z^*}(X, Y)$ , wofür der Beweis von Behauptung 5 übernommen werden kann.

Aus der Definition von  $X^*$  und den Sätzen 2,3 ergibt sich nun folgendes Problem. Es sei  $\mathcal{V}$  der rekursive Abschluss der vollständigen Graphen bezüglich Komplementbildung und Verheftung. Gilt für all  $Z \in \mathcal{V}$  und beliebige Graphen  $X, Y: R_Z(X, Y) \neq \emptyset$ ? Ist insbesondere für  $X, Y, Z \in \mathcal{V}$  auch  $R_Z(X, Y) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ ?

### LITERATUR

- [1] DEUBER, W., *A generalization of Ramsey's theorem for regular trees*, J. Comb. Th. B. 18 (1975), 18–23.
- [2] —, *Generalizations of Ramsey's theorem*, Erscheint demnächst.
- [3] DEUBER, W. and LEEB, K., *Ramsey's theorem for trees*, Erscheint demnächst.
- [4] GRAHAM, R. L., LEEB, K., and ROTHSCCHILD, B. L., *Ramsey's theorem for a class of categories*, Advances in Math. 8 (1972), 417–433.
- [5] HARARY, F., *Recent results on generalized Ramsey Theory for graphs*, in Graph Theory and Applications, Springer Lecture Notes in Mathematics 303 (1972).
- [6] HENSON, C. W., *Edge partition properties of graphs*, Can. J. Math. XXV (1973), 603–610.
- [7] LEEB, K., *A full Ramsey theorem for the Deuber category*, Erscheint demnächst.
- [8] —, *Vorlesungen über Pascaltheorie*, Erlangen Sommer 1973, Erscheint demnächst.
- [9] NEŠETŘIL, J. and RÖDL, V., *Ramsey property of the categories of graphs with forbidden complete subgraphs*, Erscheint demnächst.
- [10] RAMSEY, F. P., *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. 30 (1930), 264–268.
- [11] FOLKMAN, J., *Graphs with monochromatic complete subgraphs in every edge coloring*, SIAM J. Appl. Math. 18 (1970), 19–24.

Institut für Mathematik  
Technische Universität  
D-3-Hannover

Eingegangen den 20. November 1974