

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 50 (1975)

**Artikel:** Ringepimorphismen und Morita-projektive Moduln über kommutativen Dedekind-Ringen.  
**Autor:** Knörr, Reinhard  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-38809>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Ringepimorphismen und Morita-projektive Moduln über kommutativen Dedekind-Ringen

VON REINHARD KNÖRR

Ziel dieser Arbeit ist die Klassifizierung der Morita-projektiven (s.u.) Moduln über einem kommutativen Dedekind-Ring  $R$  (Satz 2). Dabei ergibt sich eine explizite Beschreibung der ringepimorphen Bilder von  $R$ ; es zeigt sich nämlich, daß ein Ringhomomorphismus  $\alpha: R \rightarrow T$  genau dann ein Epimorphismus in der Kategorie der unitären Ringe (im folgenden Ringepimorphismus genant) ist, wenn – bis auf Isomorphie –  $T$  der Bizenralisator eines Morita-projektiven  $R$ -Moduls ist und  $\alpha$  die kanonische Abbildung. Eine solche Beschreibung wurde zuerst von Cheatham und Enochs in [7] gegeben (für  $R = \mathbb{Z}$  vergleiche [1]). Sie charakterisieren die epimorphen Bilder von  $R$  mit Hilfe ihrer  $R$ -Torsionsuntermoduln und der Faktormoduln nach diesen. In der vorliegenden Arbeit werden die Ringepimorphismen von  $R$  explizit beschrieben, die  $R$ -Torsionsuntermoduln werden in den Beweisen wesentlich benutzt.

Neben Wohlbekanntem werden in der Arbeit vor allem die Ergebnisse aus [4] und [5] sowie das Silver'sche Kriterium für Ringepimorphismen ([6], Prop. 1.1) verwendet.

**DEFINITION.** Ein  $R$ -Linksmodul  $M$  heißt *Morita-projektiv*, (MP-Moduln), falls für seinen Bizenralisator  $\text{Bi}({}_R M) = : T$  gilt.

- (a)  ${}_T M$  ist endlich erzeugt und projektiv,
- (b)  $T_R \otimes_R M \cong M$  (kanonisch).

*Bemerkung.* MP-Moduln sind zuerst von Morita in [5] unter dem Namen FP-Moduln eingeführt und untersucht worden. Analog definiert sind Morita-injektive Moduln (FI-Moduln in [5]). Eine Klassifizierung von Morita-injektiven Moduln über Dedekind-Ringen findet sich in [4].

**BEZEICHNUNGEN.** Im folgenden bezeichnet  $R$  einen kommutativen Dedekind-Ring, wenn nicht anders erwähnt.  $K$  sei der Quotienten-Körper von  $R$ ,  $\mathbf{P}$  die Menge der Primideale  $\neq 0$ ,  $\pi$  und  $\sigma$  Teilmengen von  $\mathbf{P}$  mit  $\pi \cap \sigma = \emptyset$  und  $n$  eine Abbildung von  $\pi$  in  $\mathbb{N}$ . Jedes Ideal  $A \neq 0$  von  $R$  läßt sich bekanntlich eindeutig als Produkt von Primidealen schreiben;  $\text{ex}_P(A)$  sei der Exponent des Primideals  $P$  in dieser Darstellung. Entsprechend sei  $\text{ex}_P(r) := \text{ex}_P(Rr)$  für ein  $0 \neq r \in R$  und außerdem  $\text{ex}_P(0) := \infty$ .

Dann gilt bekanntlich  $\text{ex}_P(a+b) \geq \min[\text{ex}_P(a), \text{ex}_P(b)]$  und  $\text{ex}_P(ab) = \text{ex}_P(a) + \text{ex}_P(b)$ . Mit diesen Bezeichnungen sei

$$(a) \quad R^{\pi, n} := \prod_{P \in \pi} R/P^{n(P)}$$

$$(b) \quad R_\sigma := \{x/y \in K \mid \text{ex}_P(x) \geq \text{ex}_P(y) \quad \forall P \in \sigma\}.$$

$R^{\pi, n}$  und  $R_\sigma$  werden auf kanonische Weise zu Ringen mit 1, und es existiert jeweils ein natürlicher Ringhomomorphismus von  $R$  in  $R^{\pi, n}$  bzw.  $R_\sigma$ .

Falls  $\pi$  unendlich ist, kann man  $R$  als Unterring von  $R^{\pi, n}$  betrachten. Damit gibt die folgende Definition Sinn:

$$(c) \quad R_\sigma^{\pi, n} := \{x \in R^{\pi, n} \mid \exists 0 \neq r \in R: rx \in R \wedge \text{ex}_P(rx) \geq \text{ex}_P(r) \quad \forall P \in \sigma\}.$$

In dieser Arbeit sind die folgenden Ringe von Interesse:

- (I)  $R^{\pi, n}$  mit  $0 < |\pi| < \aleph_0$
- (II)  $R_\sigma \oplus R^{\pi, n}$  mit  $\pi \cap \sigma = \emptyset$  und  $|\pi| < \aleph_0$
- (III)  $R_\sigma^{\pi, n}$  mit  $\pi \cap \sigma = \emptyset$  und  $|\pi| \geq \aleph_0$
- (IV)  $R^{\pi, n}$  mit  $|\pi| \geq \aleph_0$ .

Diese Ringe werden dementsprechend als Ringe vom Typ I–IV bezeichnet.

Typ I existiert nur, falls  $R$  kein Körper ist, die Typen III und IV nur, falls  $R$  unendlich viele Primideale enthält. Typ II umfaßt auch die unter (b) beschriebenen Ringe für den Fall  $\pi = \emptyset$ . Typ III ist ein Unterring von Typ IV, der  $R$  und das Torsionsideal  $U := \bigoplus_{P \in \pi} R/P^{n(P)}$  von  $R^{\pi, n}$  enthält. In [4], Beweis von Lemma 4.7, ist gezeigt, daß  $R_\sigma^{\pi, n}/U \cong R_\sigma$  ist.

Es ist klar, daß wiederum kanonische Ringhomomorphismen von  $R$  in die Ringe vom Typ I–IV existieren.

Für diese gilt (vergl. auch [8], Prop.):

**LEMMA 1.** *Sei  $T$  ein Ring vom Typ I, II oder III. Dann ist die kanonische Abbildung von  $R$  in  $T$  ein Ringepimorphismus.*

*Beweis.* Für Ringe vom Typ I ist die Behauptung klar, weil die kanonische Abbildung von  $R$  in  $R^{\pi, n}$  nach dem Chinesischen-Reste-Satz surjektiv ist.

Sei nun  $T = R_\sigma$ . Es genügt,  $R_\sigma \otimes_R R_\sigma \cong R_\sigma$  zu zeigen. Sei  $a/b \in R_\sigma$ . Weil  $R$  ein Dedekind-Ring ist, existieren  $x, y \in R$  mit  $Ra \cap Rb = Rx + Ry$ . Sei  $r_1 a = s_1 b = x$ ,  $r_2 a = s_2 b = y$ , also  $a/b = s_1/r_1 = s_2/r_2$ . Weil  $a/b \in R_\sigma$  ist, gilt für alle  $P \in \sigma$ , daß  $\text{ex}_P(a) \geq \text{ex}_P(b)$ ; also  $\text{ex}_P(a) = \max[\text{ex}_P(a), \text{ex}_P(b)] = \text{ex}_P(Ra \cap Rb) = \min[\text{ex}_P(x), \text{ex}_P(y)] = \text{ex}_P(a) + \min[\text{ex}_P(r_1), \text{ex}_P(r_2)]$ . Für alle  $P \in \sigma$  ist also  $\min[\text{ex}_P(r_1), \text{ex}_P(r_2)] = 0$ . Daher ist  $R_\sigma r_1 + R_\sigma r_2 = R_\sigma$ , d.h. es gibt  $\alpha, \beta \in R_\sigma$  mit  $\alpha r_1 + \beta r_2 = 1$ . Also ist  $\alpha s_1 + \beta s_2 = \alpha r_1 (s_1/r_1) + \beta r_2 (s_2/r_2) = a/b$ , und für beliebiges  $\gamma \in R_\sigma$  gilt:  $(a/b) \otimes \gamma = (a/b) \otimes (r_1 \alpha + r_2 \beta) \gamma = (a/b) r_1 \otimes \alpha \gamma + (a/b) r_2 \otimes \beta \gamma = s_1 \otimes \alpha \gamma + s_2 \otimes \beta \gamma = 1 \otimes (s_1 \alpha + s_2 \beta) \gamma = 1 \otimes (a/b) \gamma$ . Daraus folgt  $R_\sigma \otimes_R R_\sigma \cong R_\sigma$ .

Sei  $a/b \in R_\sigma$ ,  $x \in R$  und  $P \in \pi$ . Nach [4], Lemma 3.12, existieren  $r, s \in R$  mit  $r/s \in R_\sigma$ ,  $\text{ex}_P(r) = 0$  und  $\text{ex}_P(s) = n(P)$ . Daher ist  $Rr + P^{n(P)} = R$ , d.h. es gibt  $t \in R$  und  $u \in P^{n(P)}$  mit  $1 = tr + u$ . Also ist  $x - trx \in P^{n(P)}$  und  $(a/b) \otimes (x + P^{n(P)}) = (a/b) \otimes (trx + P^{n(P)}) = (ar/b)s \otimes (tx + P^{n(P)}) = (ar/b)s \otimes (stx + P^{n(P)}) = 0$ , weil  $s \in P^{n(P)}$  ist. Damit ist  $R_\sigma \otimes_R R/P^{n(P)} = 0$  für  $P \in \pi$  gezeigt. Es folgt sofort  $R_\sigma \otimes_R R^{\pi, n} = 0$ , und das bisher Bewiesene ergibt die Behauptung für Ringe vom Typ II.

Sei nun  $T = R_\sigma^{\pi, n}$  und  $U$  das Torsionsideal von  $T$ . Aus der exakten Folge

$$0 \rightarrow U \rightarrow T \rightarrow T/U \rightarrow 0 \quad (*)$$

wird durch Tensorieren über  $R$  die exakte Folge

$$U \otimes U \xrightarrow{\beta} T \otimes U \rightarrow T/U \otimes U \rightarrow 0.$$

Es ist  $T/U \cong R_\sigma$ , und oben wurde  $R_\sigma \otimes_R R/P^{n(P)} = 0$  für  $P \in \pi$  gezeigt. Also ist  $T/U \otimes U = 0$  und  $\beta$  ein Epimorphismus. Für  $P, Q \in \mathbf{P}$  ist bekanntlich  $R/P^{n(P)} \otimes_R R/Q^{n(Q)} \cong R/(P^{n(P)} + Q^{n(Q)})$  (kanonisch), also ist die Abbildung  $u \otimes u' \mapsto uu'$  ein Isomorphismus von  $U \otimes U$  auf  $U$ . Sei  $\lambda$  die kanonische Abbildung von  $T \otimes U$  in  $U$ . Es ist  $\lambda\beta(u \otimes u') = uu'$ , also ist  $\lambda\beta$  ein Isomorphismus, und weil  $\beta$  ein Epimorphismus ist, ist  $\lambda$  ein Monomorphismus.

Aus (\*) wird durch Tensorieren über  $R$  die exakte Folge  $U \otimes T/U \rightarrow T \otimes T/U \rightarrow T/U \otimes T/U \rightarrow 0$ , aber  $U \otimes T/U = 0$ , also  $T \otimes T/U \cong T/U \otimes T/U \cong R_\sigma \otimes R_\sigma \cong R_\sigma \cong T/U$  (kanonisch). Sei  $\nu$  der kanonische Isomorphismus von  $T \otimes T/U$  auf  $T/U$ . Aus (\*) gewinnt man das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} T \otimes U & \rightarrow & T \otimes T & \rightarrow & T \otimes T/U & \rightarrow & 0 \\ \downarrow \lambda & & \downarrow \mu & & \downarrow \nu & & \\ 0 \rightarrow U & \rightarrow & T & \rightarrow & T/U & \rightarrow & 0, \end{array}$$

dessen Zeilen exakt sind und das kommutativ ist, wenn für  $\mu$  die kanonische Abbildung eingesetzt wird. Offenbar ist  $\mu$  ein Epimorphismus, und weil  $\lambda$  und  $\nu$  Monomorphismen sind, gilt dies auch für  $\mu$ . Daraus folgt die Behauptung für Ringe vom Typ III.

Im Kontrast dazu gilt:

**LEMMA 2.** Sei  $T$  ein Ring vom Typ IV und  $M$  ein endlich erzeugter, treuer  $T$ -Modul. Dann ist die kanonische Abbildung  $\alpha: T \otimes_R M \rightarrow M$  kein Monomorphismus.

*Beweis.*  $T$  ist selbstinjektiv als direktes Produkt von selbstinjektiven Ringen. Weil  $M$  endlich erzeugt und treu ist und  $T$  kommutativ, läßt sich  $T$  in eine endliche direkte Summe von Kopien von  $M$  einbetten. Daher ist  ${}_T T \oplus {}_T X \cong \bigoplus_{i=1}^n {}_T M$ . Nach [4], Lemma 3.6 ist  $T/R$  teilbar. Sei  $t$  ein Element von  $T$ , das in unendlich vielen Kompo-



nenten gleich 0 und in unendlich vielen Komponenten ungleich 0 ist. Dann ist  $t + R$  kein Torsionselement von  $T/R$ , also  $T/R$  kein Torsionsmodul. Wegen der Struktur von teilbaren Moduln über kommutativen Dedekind-Ringen enthält  $T/R$  eine Kopie von  $K$  als direkten Summanden.

Mit der exakten Folge

$$0 \rightarrow R \rightarrow T \rightarrow T/R \rightarrow 0$$

ist auch die Folge

$$R \otimes M \xrightarrow{\beta} T \otimes M \rightarrow T/R \otimes M \rightarrow 0$$

(Tensorieren über  $R$ ) exakt. Angenommen,  $\alpha$  sei ein Monomorphismus. Dann ist  $\beta$  ein Epimorphismus, also  $T/R \otimes M = 0$ . Weil  $T$  direkter Summand in einer direkten Summe von Kopien von  $M$  ist, gilt dann auch  $T/R \otimes T = 0$ , also erst recht  $T/R \otimes T/R = 0$ . Aber daraus folgt  $K \otimes K = 0$ , im Widerspruch zu Lemma 1.

**LEMMA 3.** *Sei  $T$  ein Ring vom Typ I-IV und  $M$  ein endlich erzeugter, treuer, projektiver  $T$ -Modul. Dann ist  ${}_T M$  ein Generator.*

*Beweis.* Ringe vom Typ I sind Quasi-Frobenius-Ringe, also ist jeder treue Modul ein Generator. Für Ringe vom Typ IV zeigt der Anfang des Beweises von Lemma 2, daß jeder endlich erzeugte, treue Modul ein Generator ist.

Wenn  $T = R_\sigma$  ist, dann ist  $T$  bekanntlich ein Dedekind-Ring und jeder endlich erzeugte, projektive  $T$ -Modul ein Generator. Daher ist jeder endlich erzeugte, treue, projektive  $T$ -Modul ein Generator, falls  $T$  vom Typ II ist.

Sei nun  $T$  vom Typ III,  ${}_T M$  endlich erzeugt, treu und projektiv und  ${}_T X \neq 0$  ein beliebiger Modul. Es genügt zu zeigen, daß  $\text{Hom}_T(M, X) \neq 0$  ist. Zur Abkürzung sei  $T_P$  für die  $P$ -Komponente von  $R_\sigma^{n,n}$  geschrieben, d.h.  $T_P = R/P^{(P)}$ .

(a)  $UX \neq 0$ . Dann existiert  $P \in \pi$  mit  $T_P X \neq 0$ . Da  $M$  treu ist und  $T_P$  ein direkter Summand von  $T$  (als zweiseitiges Ideal), ist  $T_P M$  ein treuer  $T_P$ -Modul, also ein Generator als  $T_P$ -Modul. Daher ist  $\text{Hom}_{T_P}(T_P M, T_P X) \neq 0$ , also auch  $\text{Hom}_T(M, X) \neq 0$ , weil  $T_P M$  ein direkter Summand von  $M$  (als  $T$ -Moduln) ist.

(b)  $UX = 0$ . Dann ist  $X$  ein  $T/U$ -Modul, also ein  $R_\sigma$ -Modul. Ebenso ist  $M/UM$  ein  $R_\sigma$ -Modul und als solcher treu: Sei  $(t + U)(m + UM) = 0$  für alle  $m \in M$ . Dann ist  $tm \in UM$  für alle  $m \in M$  und speziell für die erzeugenden Elemente  $m_1, \dots, m_n$  von  ${}_T M$ . Daher gibt es  $0 \neq r_i \in R$  mit  $r_i(tm_i) = 0$  für  $i = 1, \dots, n$ . Sei nun  $r := \prod_{i=1}^n r_i$ ; dann ist  $0 \neq r \in R$ , und für beliebiges  $m = \sum_{i=1}^n t_i m_i$  aus  $M$  gilt  $(rt)m = \sum_{i=1}^n (t_i \prod_{j \neq i} r_j)(r_i tm_i) = 0$ . Weil  ${}_T M$  treu ist, folgt  $rt = 0$ , also  $t \in U$ , d.h.  $t + U = 0 \in T/U \cong R_\sigma$ . Außerdem ist  $M/UM$  als  $R_\sigma$ -Modul endlich erzeugt und daher Generator. Daher ist  $\text{Hom}_{R_\sigma}(M/UM, X) \neq 0$ , also auch  $\text{Hom}_T(M/UM, X) \neq 0$  und erst recht  $\text{Hom}_T(M, X) \neq 0$ .

Im nächsten Lemma sind  $R$  und  $T$  beliebige Ringe. Sei  $\alpha$  ein Ringhomomorphismus von  $R$  in  $T$ . Ein  $T$ -Modul  $M$  wird zu einem  $R$ -Modul durch  $rm := \alpha(r)m$  für  $r \in R$  und  $m \in M$ . Es gilt:

LEMMA 4. Sei  $\alpha: R \rightarrow T$  ein Ringepimorphismus und  $M$  ein  $T$ -Modul. Dann:

- (a)  ${}_T T_R \otimes_R M \cong {}_T M$  (kanonisch)
- (b)  $\text{End}({}_T M) = \text{End}({}_R M)$  und daher  $\text{Bi}({}_T M) = \text{Bi}({}_R M)$
- (c) Wenn  ${}_T M$  ein MP-Modul ist, dann auch  ${}_R M$ .

*Beweis.* (a) und (b) sind wohlbekannt; siehe z.B. [7]: die Behauptungen sind Spezialfälle von (9) bzw. (7) von Th. 1. (c) Sei  ${}_T M$  ein MP-Modul und  $S := \text{Bi}({}_T M)$ . Wegen (b) genügt es,  ${}_S S_R \otimes_R M \cong {}_S M$  (kanonisch) zu zeigen. Es ist

$${}_S S_R \otimes_R M \cong ({}_S S_T \otimes_T T_R) \otimes_R M \cong {}_S S_T \otimes ({}_T T_R \otimes_R M) \cong {}_S S_T \otimes {}_T M \cong {}_S M.$$

Wie oben sind alle Abbildungen kanonisch; daß die beiden ersten Isomorphismen sind, ist bekannt, die dritte ist dies wegen (a) und die vierte, weil  ${}_T M$  ein MP-Modul ist.

SATZ 1. Sei  $R$  ein kommutativer Dedekind-Ring. Genau dann ist  ${}_R M$  ein MP-Modul, wenn es einen Ring  $T$  vom Typ I, II oder III gibt, so daß  ${}_T M$  ein endlich erzeugter, treuer, projektiver Modul ist. In diesem Fall ist  $T = \text{Bi}({}_R M)$ .

*Beweis.* Sei  ${}_R M$  ein MP-Modul und  $T := \text{Bi}({}_R M)$ . Es genügt zu zeigen, daß  $T$  vom Typ I, II oder III ist. Nach [5], Th. 4.1 gibt es einen Morita-injektiven Modul  ${}_R N$  mit  $T = \text{Bi}({}_R N)$ . Nach [4], Th. 2 und nach Lemma 2 folgt die Behauptung.

Sei umgekehrt  $T$  ein Ring vom Typ I, II oder III und  ${}_T M$  ein endlich erzeugter, treuer, projektiver Modul. Nach [5], Cor. 1.2 ist  ${}_T M$  ein MP-Modul. Nach Lemma 1 ist die kanonische Abbildung von  $R$  in  $T$  ein Ringepimorphismus. Nach Lemma 4 ist  ${}_R M$  ein MP-Modul und  $\text{Bi}({}_R M) = \text{Bi}({}_T M)$ . Aber  $\text{Bi}({}_T M) = T$ , denn nach Lemma 3 ist  ${}_T M$  ein Generator.

KOROLLAR. Sei  $R$  ein kommutativer Dedekind-Ring mit unendlich vielen Primidealen. Die Ringe vom Typ I, II und III sind genau die ringepimorphen Bilder von  $R$ .

*Beweis.* Daß diese Ringe ringepimorphe Bilder von  $R$  sind, ist Lemma 1. Sei  $\alpha: R \rightarrow T$  ein Ringepimorphismus. Dann ist nach Lemma 4 mit  ${}_T T$  auch  ${}_R T$  ein MP-Modul und  $\text{Bi}({}_R T) = T$ . Nach dem Satz ist  $T$  vom Typ I, II oder III.

*Bemerkung.* Falls  $R$  nur endlich viele Primideale hat, sind die Typen I und II genau die ringepimorphen Bilder von  $R$ ; falls  $R$  ein Körper ist, nur  $R$  selbst.

Im Hinblick auf Satz 1 genügt es zur Klassifizierung der MP-Moduln über kommutativen Dedekind-Ringen, die Struktur der endlich erzeugten, treuen, projektiven Moduln über Ringen vom Typ I–III zu klären. Dies geschieht im folgenden getrennt für die einzelnen Typen.

(I)  $T = R^{\pi, n}$  mit  $\pi$  endlich.  $T$  ist ein Quasi-Frobenius-Ring, daher ist ein projektiver  $T$ -Modul auch injektiv. Nach [4], Lemma 2.2 hat ein endlich erzeugter, treuer, projektiver  $T$ -Modul  $M$  also die Form

$$M \cong \bigoplus_{P \in \pi} [R/P^{n(P)}]^{k(P)}$$

mit  $k(P) \in \mathbb{N}$  für alle  $P \in \pi$ . Umgekehrt sind solche Moduln offenbar endlich erzeugt, treu und projektiv.

(II)  $T = R_{\sigma} \oplus R^{\pi, n}$  mit  $\pi$  endlich und  $\pi \cap \sigma = \emptyset$ .  $R_{\sigma}$  ist ein Dedekind-Ring, die endlich erzeugten, projektiven  $R_{\sigma}$ -Moduln sind also bis auf Isomorphie direkte Summen von Idealen (siehe z.B. [3], §22). Ein projektiver  $T$ -Modul ist direkte Summe eines projektiven  $R_{\sigma}$ -Moduls und eines projektiven  $R^{\pi, n}$ -Moduls. Wegen (I) sind daher die treuen, projektiven und endlich erzeugten  $T$ -Moduln genau die der Form

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^k A_i \oplus \bigoplus_{P \in \pi} [R/P^{n(P)}]^{k(P)}$$

mit  $k, k(P) \in \mathbb{N}$  und Idealen  $A_i$  von  $R_{\sigma}$ .

(III)  $T = R_{\sigma}^{\pi, n}$ . Dieser Fall bereitet mehr Schwierigkeiten. Zur Vorbereitung dienen die folgenden Lemmata.

LEMMA 5. Sei  $T$  ein beliebiger kommutativer Ring und  $A := Ta + Tb$  mit  $a, b \in T$ , so daß  $a$  kein Nullteiler ist. Dann sind gleichwertig:

(a)  $A$  ist projektiv.

(b) Es gibt Elemente  $u, v, x, y \in T$  mit  $u + y = 1$ ,  $bu = av$  und  $bx = ay$ .

Beweis. Sei  $\kappa: T \oplus T \rightarrow A$  der kanonische Epimorphismus.

„ $\Rightarrow$ “ Wenn  $A$  projektiv ist, existiert ein Homomorphismus  $\alpha$ , der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \alpha \swarrow & \downarrow \text{id} & \\ T \oplus T & \xrightarrow{\kappa} & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

kommutativ macht.

Sei  $(u, x) := \alpha(a)$  und  $(v, y) := \alpha(b)$ . Dann ist  $(bu, bx) = b\alpha(a) = a\alpha(b) = (av, ay)$ , also  $bu = av$  und  $bx = ay$ . Außerdem ist  $a = \kappa\alpha(a) = ua + xb = ua + ya = (u + y)a$ , also  $u + y = 1$ .

„ $\Leftarrow$ “ Seien  $u, v, x, y \in T$  mit den angegebenen Eigenschaften. Durch triviale Rechnung findet man, daß durch  $\alpha(ra + sb) := r(u, x) + s(v, y)$  ein Homomorphismus  $\alpha: A \rightarrow T \oplus T$  wohldefiniert ist mit  $\kappa\alpha = \text{id}_A$ . Also ist  $A$  projektiv.

LEMMA 6. Sei  $T := R_{\sigma}^{\pi, n}$  und  $U := \bigoplus_{P \in \pi} R/P^{n(P)}$  das Torsionsideal von  $T$ . Jedes Ideal  $A$  von  $T$  mit  $U < A$  ist treu, projektiv und von zwei Elementen erzeugt.

Beweis.  $U$  ist offenbar treu, also auch  $A$ . Es ist  $A/U \neq 0$  ein Ideal von  $T/U \cong R_{\sigma}$ ; dies ist ein Dedekind-Ring, daher ist  $A/U$  projektiv und von zwei Elementen  $\bar{a}, \bar{b}$  erzeugt. Diese Elemente können  $\neq 0$  gewählt werden und sind keine Nullteiler von  $T/U$ . Nach Lemma 5 existieren Elemente  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{x}, \bar{y} \in T/U$  mit  $\bar{u} + \bar{y} = \bar{1}$ ,  $\bar{b}\bar{u} = \bar{a}\bar{v}$  und  $\bar{b}\bar{x} = \bar{a}\bar{y}$ .

Sei  $a \in T$  ein Urbild von  $\bar{a}$ . Dann ist  $a \notin U$  und aus der Definition von  $R_{\sigma}^{\pi, n}$  folgt leicht, daß die  $P$ -Komponente  $a_P$  von  $a$  eine Einheit von  $R/P^{n(P)}$  ist für fast alle  $P \in \pi$ . Daher kann o.B.d.A. angenommen werden, daß  $a$  in allen Komponenten Einheiten hat. Dann ist  $a$  kein Nullteiler in  $T$ , und es gilt  $U \leq Ta$ . Entsprechend läßt sich ein Urbild  $b$  von  $\bar{b}$  wählen, das in allen Komponenten Einheiten hat. Wegen  $U \leq Ta$  ist  $A = Ta + Tb$ . Sei  $u \in T$  ein beliebiges Urbild von  $\bar{u}$  und  $y := 1 - u$ . Dann ist  $y$  ein Urbild von  $\bar{y}$ , und für ein beliebiges Urbild  $x'$  von  $\bar{x}$  ist daher  $w := bx' - ay \in U$ . Weil  $U \leq Tb$  ist, existiert ein  $w' \in T$  mit  $w = w'b$ . Mit  $x := x' + w'$  ist dann  $bx = ay$ . Entsprechend läßt sich  $v \in T$  wählen, so daß  $bu = av$  gilt. Aus Lemma 5 folgt nun die Behauptung.

BEZEICHNUNG. Sei  $\mu \subseteq \pi$  und  $e_{\mu}$  eine durch  $\pi$  indizierte Folge mit

$$(e_{\mu})_P = \begin{cases} 1 \in R/P^{n(P)} & \text{für } P \in \mu \\ 0 \in R/P^{n(P)} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Falls  $\mu$  oder  $\pi \setminus \mu$  endlich ist, gilt offenbar  $e_{\mu} \in T := R_{\sigma}^{\pi, n}$ . Wenn  $e_{\mu}, e_{\tau} \in T$  sind, dann ist  $e_{\mu}e_{\tau} = e_{\mu \cap \tau}$ , insbesondere ist  $e_{\mu}$  idempotent. Es sei  $e_P := e_{\{P\}}$ ; dann ist  $e_P T = R/P^{n(P)}$ . Außerdem existiert zu  $u \in U$  eine kleinste endliche Teilmenge  $\mu \subseteq \pi$  mit  $e_{\mu}u = u$ , nämlich  $\mu := \{P \in \pi \mid u_P \neq 0\}$ .

LEMMA 7. Sei  $T$  ein Ring vom Typ III und  $U$  das Torsionsideal von  $T$ . Genau dann ist  $M$  ein endlich erzeugter, treuer, projektiver  $T$ -Modul, wenn es eine endliche Teilmenge  $\mu \subseteq \pi$ , natürliche Zahlen  $k(P)$  für  $P \in \mu$  und endlich viele Ideale  $U < A_i$ ,  $i = 1, \dots, k \neq 0$ , von  $T$  gibt, so daß mit  $\tau := \pi \setminus \mu$  gilt

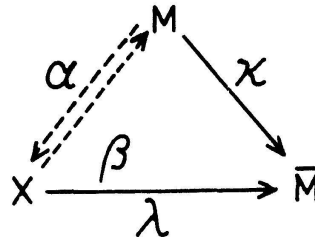
$$M \cong \bigoplus_{i=1}^k e_{\tau} A_i \oplus \bigoplus_{P \in \mu} [R/P^{n(P)}]^{k(P)}.$$

Beweis. Es ist  $A_i = e_{\tau} A_i \oplus e_{\mu} A_i$  für  $i = 1, \dots, k$ . Daher ist mit  $A_i$  (Lemma 6) auch  $e_{\tau} A_i$  endlich erzeugt und projektiv. Dasselbe gilt offenbar für  $R/P^{n(P)} = e_P T$ . Ein  $M$  von der angegebenen Form ist also endlich erzeugt und projektiv. Wegen  $\tau \cup \mu = \pi$  und  $k(P) \geq 1$  für  $P \in \mu$  ist  $A_1 \leq M$ ; mit  $A_1$  ist also auch  $M$  treu.

Sei umgekehrt  $M$  ein endlich erzeugter, treuer, projektiver  $T$ -Modul. Dann ist  $\bar{M} := M/UM$  ein endlich erzeugter, projektiver  $T/U = R_{\sigma}$ -Modul.  $UM$  ist nicht endlich

erzeugt und treu, also ist  $\bar{M} \neq 0$ . Weil  $R_\sigma$  ein Dedekind-Ring ist, gibt es Ideale  $\bar{A}_i$ ,  $i = 1, \dots, k > 0$ , von  $R_\sigma$  mit  $\bar{M} \cong \bigoplus_{i=1}^k \bar{A}_i$ .

Seien  $A_i$  die Urbilder von  $\bar{A}_i$  in  $T$ , dann sind die  $A_i$  projektive Ideale von  $T$  mit  $U < A_i$  und  $\bar{A}_i \cong A_i/U$ . Sei  $X := \bigoplus_{i=1}^k A_i$ , dann ist  $X/UX \cong \bar{M}$ , und weil  $X$  und  $M$  projektiv sind, existieren  $T$ -Homomorphismen  $\alpha$  und  $\beta$ , die das Diagramm



kommutativ machen.  $\kappa$  und  $\lambda$  sind dabei Epimorphismen.

Offenbar ist  $\kappa(1 - \beta\alpha) = 0$ , also  $\text{Im}_1 := (1 - \beta\alpha)M \leq \text{Ker } \kappa = UM$ ; außerdem ist mit  $M$  auch  $\text{Im}_1$  endlich erzeugt. Ebenso ist  $\text{Im}_2 := (1 - \alpha\beta)X \leq UX$  und endlich erzeugt. Wenn  $\alpha(m) = 0$  ist, dann ist  $m = (1 - \beta\alpha)(m)$ , also gilt  $\text{Ker } \alpha \leq \text{Im}_1$ .

Sei  $\mu := \{P \in \pi \mid \exists y \in \text{Im}_1 \cup \text{Im}_2 : e_P y \neq 0\}$ .  $\text{Im}_1$  ist von endlich vielen Elementen erzeugt, die o.B.d.A. die Form  $u_i m_i$ ,  $i = 1, \dots, s$  haben. Für jedes  $i$  ist  $e_P u_i m_i = 0$  für fast alle  $P \in \pi$ . Eine analoge Überlegung gilt für  $\text{Im}_2$ , daher ist  $\mu$  endlich. Sei  $\tau := \pi \setminus \mu$ . Es ist  $\text{Im}_1 \leq e_\mu M$ ; denn sei  $vm$  ein erzeugendes Element. Dann gibt es eine endliche Teilmenge  $v \subseteq \pi$  mit  $e_v v = v$ . Also ist  $e_\tau vm = e_\tau e_v vm = \sum_{P \in \tau \cap v} e_P vm = 0$ , weil  $\tau \cap v \cap \mu = \emptyset$ , und daher  $vm = (e_\tau + e_\mu)vm = e_\mu vm \in e_\mu M$ . Analog zeigt man  $\text{Im}_2 \leq e_\mu X$ .

Nun sei  $\gamma: M \rightarrow X$  definiert durch  $\gamma(m) := e_\tau \alpha(m)$ . Offenbar ist  $\text{Im } \gamma \leq e_\tau X$ . Sei  $x = e_\tau x \in e_\tau X$ . Dann ist  $(1 - \alpha\beta)(x) = (1 - \alpha\beta)(e_\tau x) = e_\tau(1 - \alpha\beta)(x) \in \text{Im}_2 \cap e_\tau X \leq e_\mu X \cap e_\tau X = 0$ , also  $x = \alpha\beta(x) = \alpha\beta(e_\tau^2 x) = e_\tau \alpha[e_\tau \beta(x)] = \gamma[e_\tau \beta(x)]$ . Daher ist  $\gamma|_{e_\tau M}$  ein Epimorphismus auf  $e_\tau X$ . Sei  $m \in \text{Ker } \gamma$ ; dann ist  $0 = \gamma(m) = e_\tau \alpha(m) = \alpha(e_\tau m)$ , also  $e_\tau m \in \text{Ker } \alpha \leq \text{Im}_1 \leq e_\mu M$ . Daher ist  $\gamma|_{e_\tau M}$  injektiv, und es gilt  $e_\tau M \cong e_\tau X = \bigoplus_{i=1}^k e_\tau A_i$ . Wegen  $M = e_\tau M \oplus e_\mu M$  ist  $e_\mu M$  ein endlich erzeugter, treuer, projektiver Modul über  $e_\mu T = R^{\mu, n}$ . Mit (I) folgt die Behauptung.

Aus den vorstehenden Ergebnissen folgt unmittelbar

**SATZ 2.** Sei  $R$  ein kommutativer Dedekind-Ring. Genau dann ist  ${}_R M$  ein MP-Modul, wenn Teilmengen  $\mu, \pi, \sigma \subseteq \mathbf{P}$  mit  $\mu \subseteq \pi$ ,  $\mu$  endlich und  $\pi \cap \sigma = \emptyset$ , Abbildungen  $n: \pi \rightarrow \mathbf{N}$  und  $k: \mu \rightarrow \mathbf{N}$  und eine ganze Zahl  $s \geq 0$  existieren, so daß  $M$  zu einem der beiden folgenden Moduln isomorph ist:

$$(a) \bigoplus_{i=1}^s A_i \oplus \bigoplus_{P \in \mu} [R/P^{n(P)}]^{k(P)}$$

mit Idealen  $A_i$  von  $R_\sigma$  oder

$$(b) \bigoplus_{i=1}^s e_{\tau} A_i \oplus \bigoplus_{P \in \mu} [R/P^n(P)]^{k(P)}$$

mit  $\pi$  unendlich,  $U < A_i$  Ideale von  $R_{\sigma}^{\pi, n}$  und  $\tau := \pi \setminus \mu$ .

# LITERATUR

- [1] BOUSFIELD, A. K. and KAN, D. M.: *The core of a ring*, J. pure appl. Algebra 2, 73–81 (1972).
- [2] CARTAN, H. and EILENBERG, S.: *Homological algebra*, Princeton: University Press 1956.
- [3] CURTIS, C. W. and REINER, I.: *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Interscience, New York, 1962.
- [4] KNÖRR, R.: *Morita-injektive Moduln über kommutativen Dedekind-Ringen*, Erscheint in J. reine angew. Math..
- [5] MORITA, K.: *Localisations in categories of modules I*, Math. Z. 114, 121–144 (1970).
- [6] SILVER, L.: *Noncommutative localisations and applications*, J. Algebra 7, 44–76 (1967).
- [7] CHEATHAM, T. and ENOCHS, E.: *The epimorphic images of a Dedekind domain*, Proc. Amer. Math. Soc. 35, 37–42 (1972).
- [8] STORRER, H. H.: *A characterisation of Prüfer domains*, Canad. Math. Bull. 12, 809–812 (1969).

*Math. Inst. Univ. Gießen*  
 63 Gießen, Arndstr. 2

Eingegangen den 25. Juli 1974.

