Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 50 (1975)

Artikel: Ringepimorphismen und Morita-projektive Moduln über kommutativen Dedekind-Ringen.

Autor: Knörr, Reinhard

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-38809

Comment. Math. Helvetici *50* (1975) 267–275 Birkhäuser Verlag, Basel

Ringepimorphismen und Morita-projektive Moduln über kommutativen Dedekind-Ringen

von REINHARD KNÖRR

Ziel dieser Arbeit ist die Klassifizierung der Morita-projektiven (s.u.) Moduln über einem kommutativen Dedekind-Ring R (Satz 2). Dabei ergibt sich eine explizite Beschreibung der ringepimorphen Bilder von R; es zeigt sich nämlich, daß ein Ringhomomorphismus $\alpha: R \to T$ genau dann ein Epimorphismus in der Kategorie der unitären Ringe (im folgenden Ringepimorphismus genant) ist, wenn – bis auf Isomorphie – T der Bizentralisator eines Morita-projektiven R-Moduls ist und α die kanonische Abbildung. Eine solche Beschreibung wurde zuerst von Cheatham und Enochs in [7] gegeben (für $R = \mathbf{Z}$ vergleiche [1]). Sie charakterisieren die epimorphen Bilder von R mit Hilfe ihrer R-Torsionsuntermoduln und der Faktormoduln nach diesen. In der vorliegenden Arbeit werden die Ringepimorphismen von R explizit beschrieben, die R-Torsionsuntermoduln werden in den Beweisen wesentlich benutzt.

Neben Wohlbekanntem werden in der Arbeit vor allem die Ergebnisse aus [4] und [5] sowie das Silver'sche Kriterium für Ringepimorphismen ([6], Prop. 1.1) verwendet.

DEFINITION. Ein R-Linksmodul M heißt *Morita-projektiv*, (MP-Moduln), falls für seinen Bizentralisator $\mathrm{Bi}({}_R M) =: T$ gilt.

(a) ${}_T M$ ist endlich erzeugt und projektiv,

(b) $T_R \otimes_R M \cong M$ (kanonisch).

Bemerkung. MP-Moduln sind zuerst von Morita in [5] unter dem Namen FP-Moduln eingeführt und untersucht worden. Analog definiert sind Morita-injektive Moduln (FI-Moduln in [5]). Eine Klassifizierung von Morita-injektiven Moduln über Dedekind-Ringen findet sich in [4].

BEZEICHNUNGEN. Im folgenden bezeichnet R einen kommutativen Dedekind-Ring, wenn nicht anders erwähnt. K sei der Quotienten-Kőrper von R, $\mathbf{P}$ die Menge der Primideale $\neq 0$, π und σ Teilmengen von $\mathbf{P}$ mit $\pi \cap \sigma = \emptyset$ und n eine Abbildung von π in N. Jedes Ideal $A \neq 0$ von R läßt sich bekanntlich eindeutig als Produkt von Primidealen schreiben; $\mathrm{ex}_P(A)$ sei der Exponent des Primideals P in dieser Darstellung. Entsprechend sei $\mathrm{ex}_P(r) := \mathrm{ex}_P(Rr)$ für ein $0 \neq r \in R$ und außerdem $\mathrm{ex}_P(0) := \infty$.

Dann gilt bekanntlich $\mathrm{ex}_P(a+b)\geqslant \min[\mathrm{ex}_P(a),\ \mathrm{ex}_P(b)]$ und $\mathrm{ex}_P(ab)=\mathrm{ex}_P(a)+\mathrm{ex}_P(b)$. Mit diesen Bezeichnungen sei

(a) $R^{\pi,n}:=\prod_{P\in\pi} R/P^{n(P)}$

(b) $R_\sigma:=\{x/y\in K \mid \mathrm{ex}_P(x)\geqslant \mathrm{ex}_P(y) \quad \forall P\in\sigma\}$.

$R^{\pi,n}$ und R_σ werden auf kanonische Weise zu Ringen mit 1, und es existiert jeweils ein natürlicher Ringhomomorphismus von R in $R^{\pi,n}$ bzw. R_σ.

Falls π unendlich ist, kann man R als Unterring von $R^{\pi,n}$ betrachten. Damit gibt die folgende Definition Sinn:

(c) $R_\sigma^{\pi,n}:=\{x\in R^{\pi,n} \mid \exists 0\neq r\in R\colon\ rx\in R\wedge \mathrm{ex}_P(rx)\geqslant \mathrm{ex}_P(r) \quad \forall P\in\sigma\}$.

In dieser Arbeit sind die folgenden Ringe von Interesse:

(I) $R^{\pi,n}$ mit $0<|\pi|<\aleph_0$
(II) $R_\sigma\oplus R^{\pi,n}$ mit $\pi\cap\sigma=\emptyset$ und $|\pi|<\aleph_0$
(III) $R_\sigma^{\pi,n}$ mit $\pi\cap\sigma=\emptyset$ und $|\pi|\geqslant\aleph_0$
(IV) $R^{\pi,n}$ mit $|\pi|\geqslant\aleph_0$.

Diese Ringe werden dementsprechend als Ringe vom Typ I–IV bezeichnet.

Typ I existiert nur, falls R kein Körper ist, die Typen III und IV nur, falls R unendlich viele Primideale enthält. Typ II umfaßt auch die unter (b) beschriebenen Ringe für den Fall $\pi=\emptyset$. Typ III ist ein Unterring von Typ IV, der R und das Torsionsideal $U:=\bigoplus_{P\in\pi} R/P^{n(P)}$ von $R^{\pi,n}$ enthält. In [4], Beweis von Lemma 4.7, ist gezeigt, daß $R_\sigma^{\pi,n}/U\cong R_\sigma$ ist.

Es ist klar, daß wiederum kanonische Ringhomomorphismen von R in die Ringe vom Typ I–IV existieren.

Für diese gilt (vergl. auch [8], Prop.):

LEMMA 1. *Sei T ein Ring vom Typ I, II oder III. Dann ist die kanonische Abbildung von R in T ein Ringepimorphismus.*

Beweis. Für Ringe vom Typ I ist die Behauptung klar, weil die kanonische Abbildung von R in $R^{\pi,n}$ nach dem Chinesischen-Reste-Satz surjektiv ist.

Sei nun $T=R_\sigma$. Es genügt, $R_\sigma\otimes_R R_\sigma\cong R_\sigma$ zu zeigen. Sei $a/b\in R_\sigma$. Weil R ein Dedekind-Ring ist, existieren $x, y\in R$ mit $Ra\cap Rb=Rx+Ry$. Sei $r_1a=s_1b=x$, $r_2a=s_2b=y$, also $a/b=s_1/r_1=s_2/r_2$. Weil $a/b\in R_\sigma$ ist, gilt für alle $P\in\sigma$, daß $\mathrm{ex}_P(a)\geqslant \mathrm{ex}_P(b)$; also $\mathrm{ex}_P(a)=\max[\mathrm{ex}_P(a),\ \mathrm{ex}_P(b)]=\mathrm{ex}_P(Ra\cap Rb)=\min[\mathrm{ex}_P(x),\ \mathrm{ex}_P(y)]=\mathrm{ex}_P(a)+\min[\mathrm{ex}_P(r_1),\ \mathrm{ex}_P(r_2)]$. Für alle $P\in\sigma$ ist also $\min[\mathrm{ex}_P(r_1),\ \mathrm{ex}_P(r_2)]=0$. Daher ist $R_\sigma r_1+R_\sigma r_2=R_\sigma$, d.h. es gibt $\alpha, \beta\in R_\sigma$ mit $\alpha r_1+\beta r_2=1$. Also ist $\alpha s_1+\beta s_2==\alpha r_1\,(s_1/r_1)+\beta r_2\,(s_2/r_2)=a/b$, und für beliebiges $\gamma\in R_\sigma$ gilt: $(a/b)\otimes\gamma=(a/b)\otimes(r_1\alpha+r_2\beta)\,\gamma=(a/b)\,r_1\otimes\alpha\gamma+(a/b)\,r_2\otimes\beta\gamma=s_1\otimes\alpha\gamma+s_2\otimes\beta\gamma=1\otimes(s_1\alpha+s_2\beta)\,\gamma==1\otimes(a/b)\,\gamma$. Daraus folgt $R_\sigma\otimes_R R_\sigma\cong R_\sigma$.

Sei $a/b \in R_\sigma$, $x \in R$ und $P \in \pi$. Nach [4], Lemma 3.12, existieren r, $s \in R$ mit $r/s \in R_\sigma$, $\mathrm{ex}_P(r)=0$ und $\mathrm{ex}_P(s)=n(P)$. Daher ist $Rr+P^{n(P)}=R$, d.h. es gibt $t \in R$ und $u \in P^{n(P)}$ mit $1=tr+u$. Also ist $x-trx \in P^{n(P)}$ und $(a/b)\otimes(x+P^{n(P)})=(a/b)\otimes(trx+P^{n(P)})=(ar/bs)\,s\otimes(tx+P^{n(P)})=(ar/bs)\otimes(stx+P^{n(P)})=0$, weil $s \in P^{n(P)}$ ist. Damit ist $R_\sigma \otimes_R R/P^{n(P)}=0$ für $P \in \pi$ gezeigt. Es folgt sofort $R_\sigma \otimes_R R^{\pi,n}=0$, und das bisher Bewiesene ergibt die Behauptung für Ringe vom Typ II.

Sei nun $T=R_\sigma^{\pi,n}$ und U das Torsionsideal von T. Aus der exakten Folge

$$0 \to U \to T \to T/U \to 0 \tag{$*$}$$

wird durch Tensorieren über R die exakte Folge

$$U \otimes U \xrightarrow{\beta} T \otimes U \to T/U \otimes U \to 0.$$

Es ist $T/U \cong R_\sigma$, und oben wurde $R_\sigma \otimes_R R/P^{n(P)}=0$ für $P \in \pi$ gezeigt. Also ist $T/U \otimes U=0$ und β ein Epimorphismus. Für P, $Q \in \mathbf{P}$ ist bekanntlich $R/P^{n(P)} \otimes_R R/Q^{n(Q)} \cong R/(P^{n(P)}+Q^{n(Q)})$ (kanonisch), also ist die Abbildung $u \otimes u' \mapsto uu'$ ein Isomorphismus von $U \otimes U$ auf U. Sei λ die kanonische Abbildung von $T \otimes U$ in U. Es ist $\lambda\beta(u \otimes u')= =uu'$, also ist $\lambda\beta$ ein Isomorphismus, und weil β ein Epimorphismus ist, ist λ ein Monomorphismus.

Aus $(*)$ wird durch Tensorieren über R die exakte Folge $U \otimes T/U \to T \otimes T/U \to T/U \otimes T/U \to 0$, aber $U \otimes T/U=0$, also $T \otimes T/U \cong T/U \otimes T/U \cong R_\sigma \otimes R_\sigma \cong R_\sigma \cong T/U$ (kanonisch). Sei ν der kanonische Isomorphismus von $T \otimes T/U$ auf T/U. Aus $(*)$ gewinnt man das Diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
T \otimes U & \to & T \otimes T & \to & T \otimes T/U & \to & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\nu} & & \\
0 \to U & \to & T & \to & T/U & \to & 0,
\end{array}$$

dessen Zeilen exakt sind und das kommutativ ist, wenn für μ die kanonische Abbildung eingesetzt wird. Offenbar ist μ ein Epimorphismus, und weil λ und ν Monomorphismen sind, gilt dies auch für μ. Daraus folgt die Behauptung für Ringe vom Typ III.

Im Kontrast dazu gilt:

LEMMA 2. *Sei T ein Ring vom Typ IV und M ein endlich erzeugter, treuer T-Modul. Dann ist die kanonische Abbildung $\alpha: T \otimes_R M \to M$ kein Monomorphismus.*

Beweis. T ist selbstinjektiv als direktes Produkt von selbstinjektiven Ringen. Weil M endlich erzeugt und treu ist und T kommutativ, läßt sich T in eine endliche direkte Summe von Kopien von M einbetten. Daher ist ${}_TT \oplus {}_TX \cong \bigoplus_{i=1}^n {}_TM$. Nach [4], Lemma 3.6 ist T/R teilbar. Sei t ein Element von T, das in unendlich vielen Komponenten gleich 0 und in unendlich vielen Komponenten ungleich 0 ist. Dann ist $t+R$ kein Torsionselement von T/R, also T/R kein Torsionsmodul. Wegen der Struktur von teilbaren Moduln über kommutativen Dedekind-Ringen enthält T/R eine Kopie von K als direkten Summanden.

Mit der exakten Folge

$$0 \to R \to T \to T/R \to 0$$

ist auch die Folge

$$R \otimes M \xrightarrow{\beta} T \otimes M \to T/R \otimes M \to 0$$

(Tensorieren über R) exakt. Angenommen, α sei ein Monomorphismus. Dann ist β ein Epimorphismus, also $T/R \otimes M = 0$. Weil T direkter Summand in einer direkten Summe von Kopien von M ist, gilt dann auch $T/R \otimes T = 0$, also erst recht $T/R \otimes T/R = = 0$. Aber daraus folgt $K \otimes K = 0$, im Widerspruch zu Lemma 1.

LEMMA 3. *Sei T ein Ring vom Typ I-IV und M ein endlich erzeugter, treuer, projektiver T-Modul. Dann ist ${}_TM$ ein Generator.*

Beweis. Ringe vom Typ I sind Quasi-Frobenius-Ringe, also ist jeder treue Modul ein Generator. Für Ringe vom Typ IV zeigt der Anfang des Beweises von Lemma 2, daß jeder endlich erzeugte, treue Modul ein Generator ist.

Wenn $T = R_\sigma$ ist, dann ist T bekanntlich ein Dedekind-Ring und jeder endlich erzeugte, projektive T-Modul ein Generator. Daher ist jeder endlich erzeugte, treue, projektive T-Modul ein Generator, falls T vom Typ II ist.

Sei nun T vom Typ *III*, ${}_TM$ endlich erzeugt, treu und projektiv und ${}_TX \neq 0$ ein beliebiger Modul. Es genügt zu zeigen, daß $\mathrm{Hom}_T(M, X) \neq 0$ ist. Zur Abkürzung sei T_P für die P-Komponente von $R_\sigma^{\pi, n}$ geschrieben, d.h. $T_P = R/P^{n(P)}$.

(a) $UX \neq 0$. Dann existiert $P \in \pi$ mit $T_P X \neq 0$. Da M treu ist und T_P ein direkter Summand von T (als zweiseitiges Ideal), ist $T_P M$ ein treuer T_P-Modul, also ein Generator als T_P-Modul. Daher ist $\mathrm{Hom}_{T_P}(T_P M, T_P X) \neq 0$, also auch $\mathrm{Hom}_T(M, X) \neq 0$, weil $T_P M$ ein direkter Summand von M (als T-Moduln) ist.

(b) $UX = 0$. Dann ist X ein T/U-Modul, also ein R_σ-Modul. Ebenso ist M/UM ein R_σ-Modul und als solcher treu: Sei $(t+U)(m+UM) = 0$ für alle $m \in M$. Dann ist $tm \in UM$ für alle $m \in M$ und speziell für die erzeugenden Elemente $m_1, \ldots, m_n$ von ${}_TM$. Daher gibt es $0 \neq r_i \in R$ mit $r_i(tm_i) = 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Sei nun $r := \prod_{i=1}^n r_i$; dann ist $0 \neq r \in R$, und für beliebiges $m = \sum_{i=1}^n t_i m_i$ aus M gilt $(rt)m = \sum_{i=1}^n (t_i \prod_{j \neq i} r_j)(r_i t m_i) = = 0$. Weil ${}_TM$ true ist, folgt $rt = 0$, also $t \in U$, d.h. $t + U = 0 \in T/U \cong R_\sigma$. Außerdem ist M/UM als R_σ-Modul endlich erzeugt und daher Generator. Daher ist $\mathrm{Hom}_{R_\sigma}(M/UM, X) \neq 0$, also auch $\mathrm{Hom}_T(M/UM, X) \neq 0$ und erst recht $\mathrm{Hom}_T(M, X) \neq 0$.

Im nächsten Lemma sind R und T beliebige Ringe. Sei α ein Ringhomomorphismus von R in T. Ein T-Modul M wird zu einem R-Modul durch $rm := \alpha(r)\,m$ für $r \in R$ und $m \in M$. Es gilt:

LEMMA 4. *Sei $\alpha: R \to T$ ein Ringepimorphismus und M ein T-Modul. Dann:*
(a) ${}_T T_R \otimes_R M \cong {}_T M$ *(kanonisch)*
(b) $\mathrm{End}({}_T M) = \mathrm{End}({}_R M)$ *und daher* $\mathrm{Bi}({}_T M) = \mathrm{Bi}({}_R M)$
(c) *Wenn ${}_T M$ ein* MP-*Modul ist, dann auch ${}_R M$.*

Beweis. (a) und (b) sind wohlbekannt; siehe z.B. [7]: die Behauptungen sind Spezialfälle von (9) bzw. (7) von Th. 1. (c) Sei ${}_T M$ ein MP-Modul und $S := \mathrm{Bi}({}_T M)$. Wegen (b) genügt es, ${}_S S_R \otimes_R M \cong {}_S M$ (kanonisch) zu zeigen. Es ist

$${}_S S_R \otimes_R M \cong ({}_S S_T \otimes {}_T T_R) \otimes_R M \cong {}_S S_T \otimes ({}_T T_R \otimes_R M) \cong {}_S S_T \otimes {}_T M \cong {}_S M.$$

Wie oben sind alle Abbildungen kanonisch; daß die beiden ersten Isomorphismen sind, ist bekannt, die dritte ist dies wegen (a) und die vierte, weil ${}_T M$ ein MP-Modul ist.

SATZ 1. *Sei R ein kommutativer Dedekind-Ring. Genau dann ist ${}_R M$ ein MP-Modul, wenn es einen Ring T vom Typ I, II oder III gibt, so daß ${}_T M$ ein endlich erzeugter, treuer, projektiver Modul ist. In diesem Fall ist $T = Bi({}_R M)$.*

Beweis. Sei ${}_R M$ ein MP-Modul und $T := \mathrm{Bi}({}_R M)$. Es genügt zu zeigen, daß T vom Typ I, II oder III ist. Nach [5], Th. 4.1 gibt es einen Morita-injektiven Modul ${}_R N$ mit $T = \mathrm{Bi}({}_R N)$. Nach [4], Th. 2 und nach Lemma 2 folgt die Behauptung.

Sei umgekehrt T ein Ring vom Typ I, II oder III und ${}_T M$ ein endlich erzeugter, treuer, projektiver Modul. Nach [5], Cor. 1.2 ist ${}_T M$ ein MP-Modul. Nach Lemma 1 ist die kanonische Abbildung von R in T ein Ringepimorphismus. Nach Lemma 4 ist ${}_R M$ ein MP-Modul und $\mathrm{Bi}({}_R M) = \mathrm{Bi}({}_T M)$. Aber $\mathrm{Bi}({}_T M) = T$, denn nach Lemma 3 ist ${}_T M$ ein Generator.

KOROLLAR. *Sei R ein kommutativer Dedekind-Ring mit unendlich vielen Primidealen. Die Ringe vom Typ I, II und III sind genau die ringepimorphen Bilder von R.*

Beweis. Daß diese Ringe ringepimorphe Bilder von R sind, ist Lemma 1. Sei $\alpha: R \to T$ ein Ringepimorphismus. Dann ist nach Lemma 4 mit ${}_T T$ auch ${}_R T$ ein MP-Modul und $\mathrm{Bi}({}_R T) = T$. Nach dem Satz ist T vom Typ I, II oder III.

Bemerkung. Falls R nur endlich viele Primideale hat, sind die Typen I und II genau die ringepimorphen Bilder von R; falls R ein Körper ist, nur R selbst.

Im Hinblick auf Satz 1 genügt es zur Klassifizierung der MP-Moduln über kommutativen Dedekind-Ringen, die Struktur der endlich erzeugten, treuen, projektiven Moduln über Ringen vom Typ I–III zu klären. Dies geschieht im folgenden getrennt für die einzelnen Typen.

(I) $T=R^{\pi,n}$ mit π endlich. T ist ein Quasi-Frobenius-Ring, daher ist ein projektiver T-Modul auch injektiv. Nach [4], Lemma 2.2 hat ein endlich erzeugter, treuer, projektiver T-Modul M also die Form

$$M \cong \bigoplus_{P\in\pi} [R/P^{n(P)}]^{k(P)}$$

mit $k(P)\in \mathrm{N}$ für alle $P\in\pi$. Umgekehrt sind solche Moduln offenbar endlich erzeugt, treu und projektiv.

(II) $T=R_\sigma \oplus R^{\pi,n}$ mit π endlich und $\pi\cap\sigma=\emptyset$. R_σ ist ein Dedekind-Ring, die endlich erzeugten, projektiven R_σ-Moduln sind also bis auf Isomorphie direkte Summen von Idealen (siehe z.B. [3], §22). Ein projektiver T-Modul ist direkte Summe eines projektiven R_σ-Moduls und eines projektiven $R^{\pi,n}$-Moduls. Wegen (I) sind daher die treuen, projektiven und endlich erzeugten T-Moduln genau die der Form

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{k} A_i \oplus \bigoplus_{P\in\pi} [R/P^{n(P)}]^{k(P)}$$

mit k, $k(P)\in \mathrm{N}$ und Idealen A_i von R_σ.

(III) $T=R_\sigma^{\pi,n}$. Dieser Fall bereitet mehr Schwierigkeiten. Zur Vorbereitung dienen die folgenden Lemmata.

LEMMA 5. *Sei T ein beliebiger kommutativer Ring und $A := Ta+Tb$ mit $a, b\in T$, so daß a kein Nullteiler ist. Dann sind gleichwertig:*

(a) *A ist projektiv.*

(b) *Es gibt Elemente $u, v, x, y\in T$ mit $u+y=1$, $bu=av$ und $bx=ay$.*

Beweis. Sei $\kappa\colon T\oplus T\to A$ der kanonische Epimorphismus.

„⇒" Wenn A projektiv ist, existiert ein Homomorphismus α, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, dashed, "\alpha"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \\ T\oplus T \arrow[r, "\kappa"'] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Sei $(u, x) := \alpha(a)$ und $(v, y) := \alpha(b)$. Dann ist $(bu, bx)=b\alpha(a)=a\alpha(b)=(av, ay)$, also $bu=av$ und $bx=ay$. Außerdem ist $a=\kappa\alpha(a)=ua+xb=ua+ya=(u+y)a$, also $u+y=1$.

„⇐" Seien $u, v, x, y\in T$ mit den angegebenen Eigenschaften. Durch triviale Rechnung findet man, daß durch $\alpha(ra+sb) := r(u, x)+s(v, y)$ ein Homomorphismus $\alpha\colon A\to T\oplus T$ wohldefiniert ist mit $\kappa\alpha=\mathrm{id}_A$. Also ist A projektiv.

LEMMA 6. *Sei* $T := R_\sigma^{\pi,n}$ *und* $U := \bigoplus_{P\in\pi} R/P^{n(P)}$ *das Torsionsideal von* T. *Jedes Ideal* A *von* T *mit* $U < A$ *ist treu, projektiv und von zwei Elementen erzeugt.*

Beweis. U ist offenbar treu, also auch A. Es ist $A/U \neq 0$ ein Ideal von $T/U \cong R_\sigma$; dies ist ein Dedekind-Ring, daher ist A/U projektiv und von zwei Elementen $\bar{a}, \bar{b}$ erzeugt. Diese Elemente können $\neq 0$ gewählt werden und sind keine Nullteiler von T/U. Nach Lemma 5 existieren Elemente $\bar{u}, \bar{v}, \bar{x}, \bar{y} \in T/U$ mit $\bar{u}+\bar{y}=\bar{1}$, $\bar{b}\bar{u}=\bar{a}\bar{v}$ und $\bar{b}\bar{x}=\bar{a}\bar{y}$.

Sei $a\in T$ ein Urbild von $\bar{a}$. Dann ist $a\notin U$ und aus der Definition von $R_\sigma^{\pi,n}$ folgt leicht, daß die P-Komponente a_P von a eine Einheit von $R/P^{n(P)}$ ist für fast alle $P\in\pi$. Daher kann o.B.d.A. angenommen werden, daß a in allen Komponenten Einheiten hat. Dann ist a kein Nullteiler in T, und as gilt $U \leqslant Ta$. Entsprechend läßt sich ein Urbild b von $\bar{b}$ wählen, das in allen Komponenten Einheiten hat. Wegen $U \leqslant Ta$ ist $A = Ta + Tb$. Sei $u\in T$ ein beliebiges Urbild von $\bar{u}$ und $y := 1-u$. Dann ist y ein Urbild von $\bar{y}$, und für ein beliebiges Urbild x' von $\bar{x}$ ist daher $w := bx' - ay \in U$. Weil $U \leqslant T$b ist, existiert ein $w'\in T$ mit $w = w'b$. Mit $x := x' + w'$ ist dann $bx = ay$. Entsprechend läßt sich $v\in T$ wählen, so daß $bu = av$ gilt. Aus Lemma 5 folgt nun die Behauptung.

BEZEICHNUNG. Sei $\mu \subseteq \pi$ und $e\mu$ eine durch π indizierte Folge mit

$$(e_\mu)_P = \begin{cases} 1\in R/P^{n(P)} & \text{für} \quad P\in\mu \\ 0\in R/P^{n(P)} & \text{sonst}. \end{cases}$$

Falls μ oder $\pi\setminus\mu$ endlich ist, gilt offenbar $e_\mu \in T := R_\sigma^{\pi,n}$. Wenn $e_\mu, e_\tau \in T$ sind, dann ist $e_\mu e_\tau = e_{\mu\cap\tau}$, insbesondere ist e_μ idempotent. Es sei $e_P := e_{\{P\}}$; dann ist $e_P T = R/P^{n(P)}$. Außerdem existiert zu $u\in U$ eine kleinste endliche Teilmenge $\mu\subseteq\pi$ mit $e_\mu u = u$, nämlich $\mu := \{P\in\pi \mid u_P \neq 0\}$.

LEMMA 7. *Sei* T *ein Ring vom Typ III und* U *das Torsionsideal von* T. *Genau dann ist* M *ein endlich erzeugter, treuer, projektiver* T*-Modul, wenn es eine endliche Teilmenge* $\mu\subseteq\pi$, *natürliche Zahlen* $k(P)$ *für* $P\in\mu$ *und endlich viele Ideale* $U < A_i$, $i = 1,\ldots, k \neq 0$, *von* T *gibt, so daß mit* $\tau := \pi\setminus\mu$ *gilt*

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{k} e_\tau A_i \oplus \bigoplus_{P\in\mu} [R/P^{n(P)}]^{k(P)}.$$

Beweis. Es ist $A_i = e_\tau A_i \oplus e_\mu A_i$ für $i = 1,\ldots, k$. Daher ist mit A_i (Lemma 6) auch $e_\tau A_i$ endlich erzeugt und projektiv. Dasselbe gilt offenbar für $R/P^{n(P)} = e_P T$. Ein M von der angegebenen Form ist also endlich erzeugt und projektiv. Wegen $\tau\cup\mu = \pi$ und $k(P)\geqslant 1$ für $P\in\mu$ ist $A_1 \leqslant M$; mit A_1 ist also auch M treu.

Sei umgekehrt M ein endlich erzeugter, treuer, projektiver T-Modul. Dann ist $\bar{M} := M/UM$ ein endlich erzeugter, projektiver $T/U = R_\sigma$-Modul. UM ist nicht endlich erzeugt und treu, also ist $\bar{M} \neq 0$. Weil R_σ ein Dedekind-Ring ist, gibt es Ideale $\bar{A}_i$, $i=1,\dots,k>0$, von R_σ mit $\bar{M} \cong \bigoplus_{i=1}^k \bar{A}_i$.

Seien A_i die Urbilder von $\bar{A}_i$ in T, dann sind die A_i projektive Ideale von T mit $U < A_i$ und $\bar{A}_i \cong A_i/U$. Sei $X := \bigoplus_{i=1}^k A_i$, dann ist $X/UX \cong \bar{M}$, und weil X und M projektiv sind, existieren T-Homomorphismen α und β, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, shift right, "\alpha"'] \arrow[dr, "\kappa"] & \\ X \arrow[ur, dashed, shift right, "\beta"'] \arrow[rr, "\lambda"'] & & \bar{M} \end{tikzcd}$$

kommutativ machen. κ und λ sind dabei Epimorphismen.

Offenbar ist $\kappa(1-\beta\alpha)=0$, also $\mathrm{Im}_1 := (1-\beta\alpha)\, M \leqslant \mathrm{Ker}\,\kappa = UM$; außerdem ist mit M auch Im_1 endlich erzeugt. Ebenso ist $\mathrm{Im}_2 := (1-\alpha\beta)\, X \leqslant UX$ und endlich erzeugt. Wenn $\alpha(m)=0$ ist, dann ist $m = (1-\beta\alpha)(m)$, also gilt $\mathrm{Ker}\,\alpha \leqslant \mathrm{Im}_1$.

Sei $\mu := \{P \in \pi \mid \exists y \in \mathrm{Im}_1 \cup \mathrm{Im}_2 : e_P y \neq 0\}$. Im_1 ist von endlich vielen Elementen erzeugt, die o.B.d.A. die Form $u_i m_i$, $i=1,\dots,s$ haben. Für jedes i ist $e_P u_i m_i = 0$ für fast alle $P \in \pi$. Eine analoge Überlegung gilt für Im_2, daher ist μ endlich. Sei $\tau := \pi \setminus \mu$. Es ist $\mathrm{Im}_1 \leqslant e_\mu M$; denn sei vm ein erzeugendes Element. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $v \subseteq \pi$ mit $e_v v = v$. Also ist $e_\tau vm = e_\tau e_v vm = \sum_{P \in \tau \cap v} e_P vm = 0$, weil $\tau \cap v \cap \mu = \emptyset$, und daher $vm = (e_\tau + e_\mu)\, vm = e_\mu vm \in e_\mu M$. Analog zeigt man $\mathrm{Im}_2 \leqslant e_\mu X$.

Nun sei $\gamma : M \to X$ definiert durch $\gamma(m) := e_\tau \alpha(m)$. Offenbar ist $\mathrm{Im}\,\gamma \leqslant e_\tau X$. Sei $x = e_\tau x \in e_\tau X$. Dann ist $(1-\alpha\beta)(x) = (1-\alpha\beta)(e_\tau x) = e_\tau(1-\alpha\beta)(x) \in \mathrm{Im}_2 \cap e_\tau X \leqslant e_\mu X \cap e_\tau X = 0$, also $x = \alpha\beta(x) = \alpha\beta(e_\tau^2 x) = e_\tau \alpha[e_\tau \beta(x)] = \gamma[e_\tau \beta(x)]$. Daher ist $\gamma \mid e_\tau M$ ein Epimorphismus auf $e_\tau X$. Sei $m \in \mathrm{Ker}\,\gamma$; dann ist $0 = \gamma(m) = e_\tau \alpha(m) = \alpha(e_\tau m)$, also $e_\tau m \in \mathrm{Ker}\,\alpha \leqslant \mathrm{Im}_1 \leqslant e_\mu M$. Daher ist $\gamma \mid e_\tau M$ injektiv, und es gilt $e_\tau M \cong e_\tau X = \bigoplus_{i=1}^k e_\tau A_i$. Wegen $M = e_\tau M \oplus e_\mu M$ ist $e_\mu M$ ein endlich erzeugter, treuer, projektiver Modul über $e_\mu T = R^{\mu, n}$. Mit (I) folgt die Behauptung.

Aus den vorstehenden Ergebnissen folgt unmittelbar

SATZ 2. *Sei R ein kommutativer Dedekind-Ring. Genau dann ist ${}_R M$ ein* MP-*Modul, wenn Teilmengen μ, π, $\sigma \subseteq \mathbf{P}$ mit $\mu \subseteq \pi$, μ endlich und $\pi \cap \sigma = \emptyset$, Abbildungen $n : \pi \to \mathbf{N}$ und $k : \mu \to \mathbf{N}$ und eine ganze Zahl $s \geqslant 0$ existieren, so daß M zu einem der beiden folgenden Moduln isomorph ist:*

(a) $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{s} A_i \oplus \bigoplus_{P \in \mu} [R/P^{n(P)}]^{k(P)}$

mit Idealen A_i von R_σ oder

$$\text{(b)} \bigoplus_{i=1}^{s} e_\tau A_i \oplus \bigoplus_{P \in \mu} [R/P^{n(P)}]^{k(P)}$$

mit π unendlich, $U < A_i$ Ideale von $R_\sigma^{\pi, n}$ und $\tau := \pi \backslash \mu$.

LITERATUR

[1] Bousfield, A. K. and Kan, D. M.: *The core of a ring*, J. pure appl. Algebra *2*, 73–81 (1972).
[2] Cartan, H. and Eilenberg, S.: *Homological algebra*, Princeton: University Press 1956.
[3] Curtis, C. W. and Reiner, I.: *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Interscience, New York, 1962.
[4] Knörr, R.: *Morita-injektive Moduln über kommutativen Dedekind-Ringen*, Erscheint in J. reine angew. Math..
[5] Morita, K.: *Localisations in categories of modules I*, Math. Z. *114*, 121–144 (1970).
[6] Silver, L.: *Noncommutative localisations and applications*, J. Algebra *7*, 44–76 (1967).
[7] Cheatham, T. and Enochs, E.: *The epimorphic images of a Dedekind domain*, Proc. Amer. Math. Soc. *35*, 37–42 (1972).
[8] Storrer, H. H.: *A characterisation of Prüfer domains*, Canad. Math. Bull. *12*, 809–812 (1969).

Math. Inst. Univ. Gießen
63 Gießen, Arndstr. 2

Eingegangen den 25. Juli 1974.