

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 50 (1975)

Artikel: La fonction zeta d'une monodromie.
Autor: A'Campo, Norbert
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-38807>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.05.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

La fonction zêta d'une monodromie

NORBERT A'CAMPO

Soit $P: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme et soit w un point de l'hypersurface

$$H = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid P(z) = 0\}.$$

L'application

$$p: z \in S_{w,\varepsilon}^{2n+1} - H \mapsto \arg(P(z)) \in S^1,$$

où $S_{w,\varepsilon}^{2n+1}$ est la sphère dans \mathbb{C}^{n+1} de centre w et de rayon ε ($\varepsilon > 0$ et petit), est la fibration de Milnor de l'hypersurface H au point w . La fibre $F_\theta = p^{-1}(\theta)$, $\theta \in S^1$, est une variété différentiable de dimension $2n$; un homéomorphisme caractéristique de cette fibration

$$f: F_\theta \rightarrow F_\theta$$

est la monodromie géométrique de H au point w . Dans ce papier nous voulons expliquer une méthode pour calculer la fonction zêta de f ,

$$Z(t) = \prod_{q \geq 0} \{\det(\text{Id}^* - t f^*; H^q(F_\theta, \mathbb{C}))\}^{(-1)^{q+1}}$$

à partir d'une résolution locale de la singularité du couple (\mathbb{C}^{n+1}, H) au point w .

Lorsque $w \in H$ est un point singulier isolé de H on a

$$\tilde{H}^q(F_\theta, \mathbb{C}) = 0 \quad \text{pour } q \neq n,$$

et donc le polynôme caractéristique $\Delta(t)$ de la monodromie en degré n se déduit de la fonction $Z(t)$ par la formule

$$\Delta(t) = t^\mu \left[\frac{t-1}{t} Z(1/t) \right]^{(-1)^{n+1}}$$

où μ est l'entier tel que l'expression précédente soit un polynôme en t de terme constant non nul. On a

$$\mu = \dim H^n(F_\theta, \mathbb{C}).$$

Pour des singularités isolées particulières d'hypersurfaces il y a des méthodes de calcul du polynôme $\Delta(t)$ plus efficaces (Pham [12], Milnor et Orlik [10], ...). La méthode de Brieskorn [3] et celle exposée ici sont générales et, pour cette raison, pas toujours faciles à exécuter.

Par la résolution des singularités on peut ramener l'étude d'une monodromie géométrique d'un point d'une hypersurface à l'étude d'une monodromie géométrique globale d'une hypersurface à croisements normaux. La topologie de cette dernière situation a été étudiée par Clemens [4]. Au §2 nous refaisons cette étude en apportant un modèle plus précis et canonique de la monodromie géométrique globale d'une hypersurface à croisements normaux.

§1. Les résultats

Pour un entier $k \geq 1$, soit le nombre entier

$$\Lambda(f^k) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \text{Trace}[(f^*)^k; H^q(F_\theta, \mathbf{C})]$$

le nombre de Lefschetz de la k -ième itérée de f . La fonction zêta de f est reliée aux entiers $\Lambda(f^k)$ par la formule bien connue d'inversion suivante [14, 10]: soient s_1, s_2, \dots les entiers définis par récurrence par les relations

$$\Lambda(f^k) = \sum_{i|k} s_i, \quad k \geq 1;$$

alors la fonction zêta de f est donnée par

$$Z(t) = \prod_{i \geq 1} (1 - t^i)^{-s_i/i}.$$

Cette formule s'obtient en écrivant pour un endomorphisme A d'un espace vectoriel V l'identité

$$\det(\text{Id}_V - tA) = \exp(\text{Trace}(\log(\text{Id}_V - tA))) = \exp\left(-\sum_{i \geq 1} \frac{t^i}{i} \text{Trace}(A^i)\right).$$

Donc pour calculer $Z(t)$ il suffit de connaître, pour tout $k \geq 1$, l'entier $\Lambda(f^k)$. Dans [1] nous avons calculé que

$$\Lambda(f) = \begin{cases} 0, & \text{si } DP(w) = 0, \\ 1, & \text{si } DP(w) \neq 0. \end{cases}$$

Dans une lettre $P. Deligne$ nous a expliqué que plus généralement

$$\Lambda(f^k) = 0, \quad \text{si } 0 < k < \text{multiplicité de } H \text{ au point } w.$$

Cette explication a été le départ de ce travail.

Soit $\pi: X \rightarrow \mathbf{C}^{n+1}$ une modification propre telle que en tout point de $S = \pi^{-1}(w)$ le diviseur $X_0 = \pi^{-1}(H)$ soit à croisements normaux. Une telle résolution locale de (\mathbf{C}^{n+1}, H) au point w existe d'après le théorème de résolution des singularités de Hironaka [7]. Pour $m \in \mathbf{N}$ et $m \geq 1$, on pose

$$S_m = \{s \in S \mid \text{l'équation de } X_0 \text{ en } s \text{ est de la forme } z^m = 0 \\ \text{pour une coordonnée locale } z \text{ de } X \text{ en } s\},$$

et on désigne par $\chi(S_m)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de S_m .

THÉORÈME 1. *On a*

$$1) \Lambda(f^k) = \sum_{m \mid k} m \chi(S_m), \quad k \geq 1,$$

$$2) \Lambda(f^0) = \chi(F_\theta) = \sum_{m \geq 1} m \chi(S_m).$$

Les nombres $\Lambda(f^k)$ sont des invariants topologiques de la singularité w de H . Donc le théorème 1 implique le

THÉORÈME 2. *Les nombres $\chi(S_m)$, $m \geq 1$, ne dépendent pas de la résolution choisie et sont des invariants topologiques de la singularité w de H .*

Avec les formules d'inversion le théorème 1 donne le

THÉORÈME 3. *La fonction zêta de f est*

$$Z(t) = \prod_{m \geq 1} (1 - t^m)^{-\chi(S_m)}.$$

Pour le cas d'une singularité isolée de H au point w on a

THÉORÈME 4. *Le polynôme caractéristique de f est*

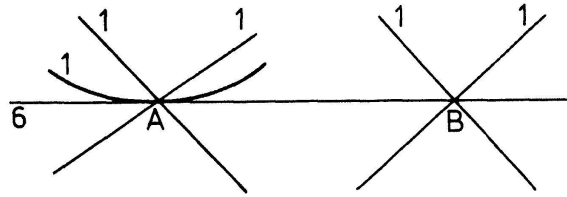
$$\Delta(t) = \left[\frac{1}{t-1} \prod_{m \geq 1} (t^m - 1)^{\chi(S_m)} \right]^{(-1)^n};$$

et

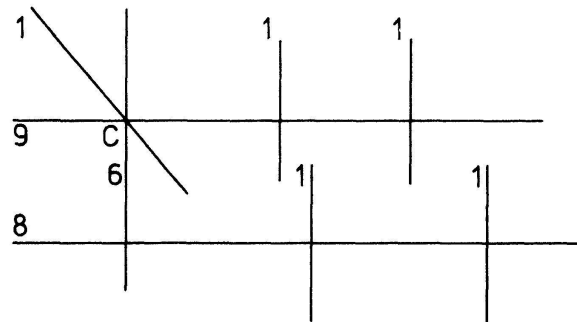
$$\mu = \dim H^n(F_\theta, \mathbf{C}) = (-1)^n \left[-1 + \sum_{m \geq 1} m \chi(S_m) \right].$$

EXEMPLE 1. Soit $P(x, y) = (x^2 + y^3)(x^2 y^2 + x^6 + y^6)$ et soit w la singularité de $H = \{P \equiv 0\} \subset \mathbf{C}^2$ au point 0.

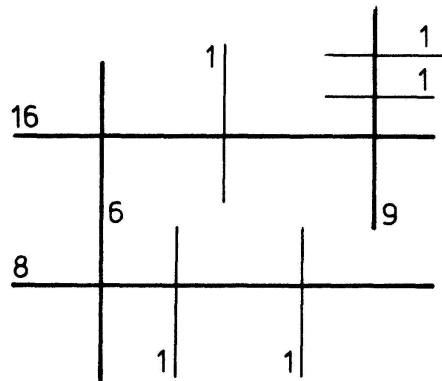
Par éclatement de $0 \in \mathbb{C}^2$ on obtient



Puis par éclatement des points A et B vient le diagramme



et après éclatement du point C ,



La modification obtenue en composant ces éclatements convient pour appliquer les théorèmes. L'ensemble S est dessiné en traits gras. Donc S_6 est homéomorphe à $\mathbb{P}^1 - 2$ pts, $\chi(S_6)=0$; S_8, S_9 et S_{16} sont homéomorphes à $\mathbb{P}^1 - 3$ pts, $\chi(S_8)=\chi(S_9)=\chi(S_{16})=-1$, et d'après les théorèmes les invariants de la singularité de H au point 0 sont

$$\begin{aligned} \mu &= 1 + 8 + 9 + 16 = 34, \\ Z(t) &= (1-t^8)(1-t^9)(1-t^{16}), \\ \Delta(t) &= (t-1)(t^8-1)(t^9-1)(t^{16}-1). \end{aligned}$$

Le polynôme $\Delta(t)$ n'est autre que le polynôme d'Alexander de l'entrelacement orienté $H \cap S^3 \subset S^3 = S^3$ [9, 15] et peut donc le calculer (moins rapidement) par la théorie des noeuds.

EXEMPLE 2. Soit \sum_d^{n-1} l'hypersurface régulière de degré d dans \mathbf{P}^n d'équation homogène

$$z_0^d + z_1^d + \dots + z_n^d = 0. \tag{1}$$

Soit H l'hypersurface de \mathbf{C}^{n+1} d'équation (1). Soit F_θ la fibre de la fibration de Milnor de H au point 0. On a [12]

$$\mu = \dim H^n(F_\theta, \mathbf{C}) = (d-1)^{n+1}. \tag{2}$$

En éclatant $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ on obtient une résolution de (\mathbf{C}^{n+1}, H) , qui permet d'appliquer les théorèmes. On a

$$S = \mathbf{P}^n \quad \text{et} \quad S_m = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } m \neq d, \\ \mathbf{P}^n - \sum_d^{n-1}, & \text{si } m = d. \end{cases}$$

Donc

$$\Delta(t) = [(t-1)^{-1} (t^d - 1)^{\chi(S_d)}]^{(-1)^n}, \tag{3}$$

$$\mu = \deg \Delta(t) = (-1)^n [-1 + d\chi(S_d)]. \tag{4}$$

Les nombres $\chi(S_d)$ et $\chi(\sum_d^{n-1})$ sont liés par

$$\chi(S_d) + \chi(\sum_d^{n-1}) = \chi(\mathbf{P}^n) = n + 1. \tag{5}$$

Donc avec (2), (4) et (5) on obtient la formule bien connue

$$\chi(\sum_d^{n-1}) = n + 1 - \frac{1 - (1-d)^{n+1}}{d}.$$

§2. La monodromie géométrique globale d'une hypersurface à croisements normaux

1) Soit $P: X \rightarrow D$ une application analytique propre de X , espace analytique lisse, sur le disque unité D de \mathbf{C} . On suppose que $X_0 = P^{-1}(0) \subset X$ est une hypersurface à croisements normaux dans X , union de composantes lisses (donc pas de self intersections), et que $X_t = P^{-1}(t)$ est lisse pour tout $t \in D - \{0\}$. La restriction de P , $p: X - X_0 \rightarrow D - \{0\}$ est une application fibrée localement triviale. La monodromie géométrique globale est un difféomorphisme caractéristique $f: X_1 \rightarrow X_1$ de la fibration p .

Nous voulons décrire une construction d'une telle monodromie géométrique, ne dépendant que du plongement de X_0 dans X et de P . Nous nous sommes largement inspirés du travail de Clemens [4].

Les constructions vont donner un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{N} & \xrightarrow{\tilde{r}} & N & \xrightarrow{nP} & S^1 \\
 \tilde{q} \downarrow & & \downarrow e & & \\
 \tilde{X}_0 & \xrightarrow{r} & X_0 & &
 \end{array}$$

et un flot $\tilde{g}_\lambda, \lambda \in \mathbf{R}$, sur la variété \tilde{N} . Ce diagramme dépend canoniquement du plongement $X_0 \hookrightarrow X$ et de P , mais seulement la construction de \tilde{g}_λ et de nP fait intervenir P . Les propriétés principales sont

1) \tilde{N} et N sont des variétés différentiables à coins homéomorphes à

$$N_\delta = \{x \in X \mid |P(x)| = \delta\}, \quad 0 < \delta \leq 1,$$

donc au bord d'un voisinage régulier de X_0 dans X .

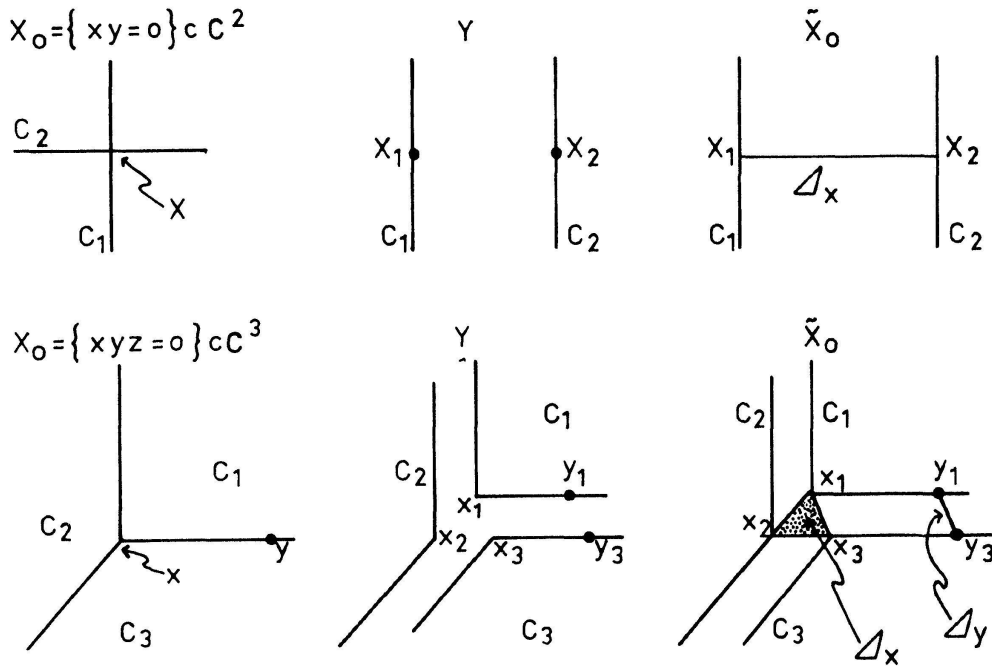
2) nP et $nP \circ \tilde{r}$ sont des fibrations équivalentes à la fibration P restreinte au-dessus de ∂D .

3) $\tilde{g}_0 = \text{Id}_{\tilde{N}}$, et $nP \circ \tilde{r} \circ \tilde{g}_\lambda = (\lambda \bmod 2\pi) + nP \circ \tilde{r}, \lambda \in \mathbf{R}$;

donc $\tilde{g}_{2\pi}$ induit un difféomorphisme de $F = (nP \circ \tilde{r})^{-1}(1)$. L'homéomorphisme $f = \tilde{g}_{2\pi} \mid F$ est la monodromie géométrique cherchée.

Construction de \tilde{X}_0 et de r . Soient C_1, \dots, C_n les composantes lisses de X_0 . Soient Y l'union disjointe des composantes C_i , et $r' : Y \rightarrow X_0$ la surjection canonique. Pour un point $x \in X_0, x \in C_{i_0} \cap \dots \cap C_{i_k}$ et $x \notin C_j, j \neq i_0, \dots, i_k$, la pré-image $(r')^{-1}(x)$ est formée de $k+1$ points x_{i_0}, \dots, x_{i_k} de Y . On convertit r' en une équivalence d'homotopie en ajoutant pour tout $x \in X_0$ à Y un k -simplexe $\Delta_x = [x_{i_0}, \dots, x_{i_k}]$. L'espace ainsi obtenu à partir de Y est l'espace \tilde{X}_0 et l'application r prolonge r' en posant $r(\Delta_x) = x$. Donc la restriction de r au-dessus de $\{x \in X_0 \mid \#(r')^{-1}(x) = k+1\}$ est une application fibrée de fibre type le k -simplexe standard Δ^k . La figure aide à voir ce qui se passe en basse dimension.

Construction de N, \tilde{N}, ϱ et \tilde{q} . Pour $j=1, \dots, n$ soit $\pi_j = Z_j \rightarrow X$ l'éclatement réel orienté de centre C_j . Donc au dessus de $x \in C_j$ sont les directions normales réelles orientées à C_j en x et π_j est un difféomorphisme hors de C_j . Donc Z_j est une variété différentiable à bord et son bord $\partial Z_j = \pi_j^{-1}(C_j)$ est difféomorphe au bord d'un voisinage tubulaire de C_j dans X . Soit $\pi : Z \rightarrow X$ le produit fibré des π_j au-dessus de X . Alors Z est une variété différentiable à coins et π est un difféomorphisme hors de X_0 . Le bord $\partial Z = \pi^{-1}(X_0) = N$ est une variété différentiable à coins. La restriction de π à ∂Z est l'application $\varrho : N \rightarrow X_0$. La variété N est homéomorphe au bord de tout voisinage régulier de X_0 dans X et ϱ est une rétraction.



La variété \tilde{N} s'obtient par produit fibré de ϱ et r au-dessus de X_0

$$\begin{array}{ccc} \tilde{N} & \xrightarrow{\tilde{r}} & N \\ \tilde{e} \downarrow & & \downarrow e \\ \tilde{X}_0 & \xrightarrow{r} & X_0 \end{array}$$

et $\tilde{\varrho}$ est la projection induit par ϱ .

Construction de nP : Soit $\pi_D: \bar{D} \rightarrow D$ l'éclatement réel orienté de D de centre 0. On a $\bar{D} = [0, 1] \times S^1$ et $\pi_D(r, \theta) = r\theta \in D$. Donc les coordonnées (r, θ) sur \bar{D} , $r \in [0, 1]$ et $\theta \in S^1$, deviennent les coordonnées polaires de D via π_D .

L'application P induit par restriction

$$P: X - X_0 \rightarrow D - \{0\},$$

et donne aussi une application $\pi_D^{-1} \circ P \circ \pi$, qui est encore notée

$$P: Z - N \rightarrow \bar{D} - \pi_D^{-1}(0)$$

et qui se prolonge par continuité en une application

$$\bar{P}: Z \rightarrow \bar{D}.$$

Nous notons nP la restriction de \bar{P} à N . Donc

$$nP: N \rightarrow \pi_D^{-1}(0) \approx S^1.$$

Construction de \tilde{g}_λ : Soit $\text{cr}(X_0)$ le lieu des croisements de X_0 . Au-dessus de $X - \text{cr}(X_0)$ la projection ϱ est un S^1 -fibré principal. On peut définir un flot g_λ sur $\varrho^{-1}(\text{cr}(X - X_0))$ par

$$g_\lambda(x, \theta) = \left(x, \theta + \frac{\lambda}{m_x} \right)$$

où $(x, \theta) \in \varrho^{-1}(X_0 - \text{cr}(X_0))$, $x \in X_0 - \text{cr}(X_0)$, $\theta \in \varrho^{-1}(x) \approx S^1$ et où m_x désigne la multiplicité de l'équation $P=0$ en x .

Le flot g_λ ne possède pas un prolongement à N tout entier. En effet soit $x \in X_0$; on suppose que $x \in C^{i_0} \cap \dots \cap C^{i_k}$ et que $x \notin C_j$, si $j = i_0, \dots, i_k$; la fibre $\varrho^{-1}(x)$ est le produit d'espaces homogènes sous S^1

$$\varrho^{-1}(x) = \pi_{i_0}^{-1}(x) \times \dots \times \pi_{i_k}^{-1}(x)$$

et si l'on veut prolonger par continuité à $\varrho^{-1}(x)$ la restriction de g_λ à $\varrho^{-1} \times (C_{i_l} - \text{cr}(X_0))$, $l=0, 1, \dots, k$ on doit poser

$$g_\lambda^{(l)}(x; \theta_0, \dots, \theta_k) = \left(x; \theta_0, \dots, \theta_l + \frac{\lambda}{m_{i_l}}, \dots, \theta_k \right)$$

où m_{i_l} désigne la multiplicité de C_{i_l} , c'est-à-dire, la multiplicité de l'équation $P=0$ aux points de $C_{i_l} - \text{cr}(X_0)$. Donc on voit que $g_\lambda^{(l)} \neq g_\lambda^{(l')}$ si $l \neq l'$. Cette difficulté nous oblige à considérer \tilde{N} .

Par \tilde{r} le flot g_λ se transporte sur $(r \tilde{\varrho})^{-1}(X_0 - \text{cr}(X_0))$ car \tilde{r} est un homéomorphisme au-dessus de $\varrho^{-1}(X_0 - \text{cr}(X_0))$. Ce flot doit être prolongé à \tilde{N} tout entier. La formule suivante fait l'affaire: «pour $x \in X_0$, $a \in \Delta_x = [x_{i_0}, \dots, x_{i_k}] \subset \tilde{X}_0$; pour $(a; \theta_{i_0}, \dots, \theta_{i_k}) \in \tilde{\varrho}^{-1}(a)$, on pose

$$\tilde{g}_\lambda(a; \theta) = \left(a; \theta_{i_0} + \frac{\lambda a_{i_0}}{m_{i_0}}, \dots, \theta_{i_k} + \frac{\lambda a_{i_k}}{m_{i_k}} \right)$$

où a_{i_0}, \dots, a_{i_k} désignent les coordonnées barycentriques de a dans Δ_x ».

Le flot \tilde{g}_λ sur \tilde{N} est le flot cherché. Il satisfait à

$$\tilde{\varrho} \circ \tilde{g}_\lambda = \tilde{\varrho}, \quad nP \circ \tilde{r} \circ \tilde{g}_\lambda = (\lambda \bmod 2\pi) + nP \circ \tilde{r}.$$

Les formules montrent que $\tilde{n}P = nP \circ \tilde{r}: \tilde{N} \rightarrow S^1$ est une submersion, donc une fibration de \tilde{N} sur S^1 et que $\tilde{g}_{2\pi}$ réalise la monodromie géométrique de la fibration $\tilde{n}P$. Soit $(\tilde{n}P)^{-1}(1) = F$ la fibre. On pose $f = \tilde{g}_{2\pi} | F: F \rightarrow F$, c'est la monodromie géométrique cherchée.

2) LEMME: $\bar{P}: Z \rightarrow \bar{D}$ est une fibration localement triviale.

Preuve. Etant donné que l'application \bar{P} est propre, il suffit de vérifier que \bar{P} est localement sur Z une projection d'après un théorème de L. Siebenmann [17]: tout $z \in Z$ admet un voisinage V pour lequel il existe un diagramme commutatif d'applications continues

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\text{homéomorphisme}} & \bar{P}(V) \times A \\
 \downarrow P|_V & & \downarrow \text{projection} \\
 \bar{P}(V) & \xlongequal{\quad\quad\quad} & \bar{P}(V)
 \end{array}$$

Ceci est vrai pour $z \in Z - N$, car $\bar{P}|_{Z - N}$ est une submersion. Pour $z \in N$ on utilise l'expression explicite de \bar{P} dans des coordonnées convenables: soit $\varrho(z) \in X_0$ tel que $\varrho(z) \in X_{i_0} \cap \dots \cap X_{i_k}$ et que $\varrho(z) \notin X_j$ si $j = i_0, \dots, i_k$; soient (x_1, \dots, x_n) des coordonnées locales de X au point $\varrho(z)$ telles que P s'écrive

$$P(x) = x_{i_0}^{\alpha_0} \dots x_{i_k}^{\alpha_k}.$$

Près de $z \in N$ on a les coordonnées

$$\begin{aligned}
 &(x_j), 1 \leq j \leq n \text{ et } j \neq i_0, \dots, i_k, x_j \in \mathbb{C}, \\
 &(r_{i_l}, \theta_{i_l}), 0 \leq l \leq k, (r_{i_l}, \theta_{i_l}) \in [0, 1] \times S^1.
 \end{aligned}$$

L'expression de \bar{P} dans ces coordonnées est

$$\bar{P}(z) = (r_{i_0}^{\alpha_0}, \dots, r_{i_k}^{\alpha_k}, \alpha_{i_0} \theta_{i_0} + \dots + \alpha_{i_k} \theta_{i_k}) \in \bar{D}.$$

On vérifie directement que \bar{P} est localement une projection au point $z \in N$.

Rappelons que $nP = \bar{P}|_N$ et que $p = \bar{P}|_{Z - N}$. Donc le lemme prouve que les fibrations nP et p sont isomorphes.

L'application $\tilde{r}: \tilde{N} \rightarrow N$ est telle que pour tout $x \in N$ la pré-image $(\tilde{r})^{-1}(x) \subset \tilde{N}$ est un simplexe de dimension inférieure à la dimension de la fibre de nP . Ceci entraîne que $\tilde{n}P = nP \circ \tilde{r}$ est encore une fibration et qu'elle est isomorphe à la fibration nP .

De ce qui précède il résulte que la monodromie f , construite ci-dessus, est un bon modèle de monodromie pour la fibration $p: X - X_0 \rightarrow D - \{0\}$.

3) Pour un point $a \in \tilde{X}_0$, $a \in A_x = [x_{i_0}, \dots, x_{i_k}]$ on définit sa multiplicité par

$$m(a) = a_{i_0} m_{i_0} + \dots + a_{i_k} m_{i_k}$$

La fonction m est continue. Observons que

$$m(a) \geq \min [m_{i_0}, \dots, m_{i_k}] \geq 1.$$

On pose

$$F_{\{m>1\}} = \{z \in F \mid m(\tilde{q}(z)) > 1\}, \quad F_{\{m=1\}} = F - F_{\{m>1\}}.$$

Le résultat suivant a été obtenu indépendamment par D. Sullivan [Tokyo 1973].

PROPOSITION. $f \mid F_{\{m>1\}}$ n'a pas de points fixes et $f \mid F_{\{m=1\}} = \text{Id}$.

Preuve. $f = \tilde{g}_{2\pi} \mid F$ et $\tilde{g}_{2\pi}$ est une translation dans l'espace homogène $\tilde{q}^{-1}(a)$ pour tout $a \in \tilde{X}_0$. Si $m(a) = 1$ cette translation est l'identité et si $m(a) > 1$ elle n'a pas de points fixes.

Pour une singularité d'hypersurface complexe $0 \in H \subset \mathbb{C}^{n+1}$, $H = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid P(z) = 0\}$, équipée d'une résolution

$$\pi: (X, X_0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, H)$$

on dispose de

a) la fibration de Milnor de H au point 0, notons F_θ sa fibre et $\bar{F}_\theta = F_\theta \cup K$ où K est la frontière du point singulier 0 dans H ,

b) la fibration $\tilde{n}(P \circ \pi): \tilde{N} \rightarrow S^1$ avec la fibre F qui se projette par $\tilde{q} \mid F = \tilde{q}_F$ sur \tilde{X}_0 . Posons $F_{\{m>1\}, 0} = \{z \in F_{\{m>1\}} \mid \pi \circ r \circ \varrho_F(z) = 0\}$.

THÉORÈME 5. Les variétés ouvertes $F_{\{m>1\}, 0}$ et F_θ sont homéomorphes par un homéomorphisme qui conjugue la restriction $f \mid F_{\{m>1\}, 0}$ à une monodromie géométrique $f: F_\theta \rightarrow F_\theta$ de la fibration de Milnor de H au point 0. Cette monodromie géométrique f a les propriétés suivantes:

i) f n'a pas de points fixes,¹⁾
 ii) f se prolonge par continuité en un homéomorphisme \tilde{f} de \bar{F}_θ . Si la singularité de H en 0 est isolée \tilde{f} est l'identité sur $\partial(\bar{F}_\theta) = \bar{F}_\theta - F_\theta$,

iii) \tilde{f} est une application distale, donc son entropie est nulle [11].

4) Rappels (Clemens [4], SGA7(1) et SGA7(2) [6]): Le faisceau Ψ^\bullet des cycles évanescents sur X_0 est le faisceau de Leray de la rétraction

$$\varrho_F: F \xrightarrow{\tilde{q}} \tilde{X}_0 \xrightarrow{\tilde{r}} X_0$$

Donc pour un ouvert $U \subset X_0$ il vaut

$$\Psi^\bullet(U) = H^\bullet(\varrho_F^{-1}(U), \mathbb{C}).$$

¹⁾ Par induction sur la dimension et sans utiliser la résolution des singularités, Lê Dũng Tráng démontre que la monodromie géométrique d'un point singulier peut être choisie sans point fixe. Sa méthode utilise la monodromie relative par rapport à une section hyperplane générique. Son travail apparaîtra dans le Journal des Mathématiques de l'Université de Tokyo.

La suite spectrale dont le terme E_2^{\bullet} est

$$E_2^{p,q} = H^p(X_0, \Psi^q)$$

aboutit sur $E_\infty^{p,q} = H^{p+q}(F, \mathbb{C})$. L'action de f induit une action de monodromie T sur le faisceau Ψ^\bullet par

$$T(U) = (f|_{\varrho_F^{-1}(U)})^\bullet : H^\bullet(\varrho_F^{-1}(U), \mathbb{C}) \rightarrow H^\bullet(\varrho_F^{-1}(U), \mathbb{C})$$

et les actions $T_2^{p,q}$ sur les termes $E_2^{p,q}$ aboutissent sur

$$T_\infty^{p+q} = f^\bullet : H^{p+q}(F, \mathbb{C}) \rightarrow H^{p+q}(F, \mathbb{C}).$$

Lorsque l'on désire étudier une hypersurface complexe à l'aide d'une résolution locale

$$\pi : (X, X_0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, H)$$

au point $0 \in H$, on doit restreindre la suite spectrale au-dessus de $S = \pi^{-1}(0) \subset X_0$. La suite spectrale, amorcée par $E_2^{p,q} = H^p(S, \Psi^q)$, aboutit sur $H^{p+q}(F_\theta, \mathbb{C})$ où F_θ est la fibre de Milnor de H au point 0.

§3. Démonstration du théorème 1

Soit $\pi : (X, X_0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, H)$ une résolution locale de la singularité $0 \in H$ de H . Donc $\pi(X_0) = H$, $\pi : X - X_0 \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} - H$ est un isomorphisme et au voisinage de $S = \pi^{-1}(0)$ le diviseur X_0 de X est à croisements normaux. Soit S_* le lieu $\text{cr}(X_0) \cap S$. Pour l'action de T sur la fibre Ψ_s^\bullet , $s \in S$, du faisceau Ψ^\bullet , les nombres de Lefschetz de ses itérées sont

$$A(T^k, \Psi_s^\bullet) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \text{Trace}(T^k, \Psi_s^q)$$

et sont donnés pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, par

$$A(T^k, \Psi_s^\bullet) = \begin{cases} 0, & \text{si } s \in S_*, \\ 0, & \text{si } s \in S_m \text{ et } m \nmid k, \\ m, & \text{si } s \in S_m \text{ et } m \mid k. \end{cases} \quad (1)$$

En effet, la fibre Ψ_s^\bullet du système de faisceaux Ψ^\bullet en s s'identifie à la cohomologie de la fibre de la fibration de Milnor de X_0 en s , et cette identification est compatible avec l'action de la monodromie. Donc les formules (1) résulteront de l'étude géométrique des singularités d'hypersurfaces à croisements normaux. (Voir §2 et [1], §2.)

La suite spectrale dont le terme E_2^{\bullet} est $E_2^{p,q} = H^p(S, \Psi^q)$ aboutit sur $H^\bullet(F_\theta, \mathbb{C})$,

la cohomologie de la fibre de la fibration de Milnor de H en 0 et les actions de T sur les termes E_2^{\bullet} aboutissent sur f^{\bullet} , la monodromie de H en 0, voir §2, no. 4.

Soit N un voisinage régulier fermé de S_* dans S . Posons

$$\partial_m N = S_m \cap \partial N, \quad \tilde{S}_m = S_m - (N - \partial N).$$

Donc $\chi(\tilde{S}_m) = \chi(S_m)$ et $\chi(\partial_m N) = 0$ car $\partial_m N$ est une variété orientable, sans bord, compacte et de dimension impaire. En utilisant la suite de Mayer-Vietoris en cohomologie associée à la décomposition

$$S = N \cup \left(\bigcup_m \tilde{S}_m \right)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \Lambda(T^k, E_2^{\bullet}) &= \sum_{p, q \geq 0} (-1)^{p+q} \text{Trace} [T^k; H^p(S, \Psi^q)] \\ &= \sum_{p, q \geq 0} (-1)^{p+q} \text{Trace} [T^k; H^p(N, \Psi^q)] \end{aligned} \tag{1}$$

$$- \sum_{p, q \geq 0} (-1)^{p+q} \text{Trace} [T^k; H^p(\bigcup_m \partial_m N, \Psi^q)] \tag{2}$$

$$+ \sum_{p, q \geq 0} (-1)^{p+q} \text{Trace} [T^k; H^p(\bigcup_m \tilde{S}_m, \Psi^q)]. \tag{3}$$

Le premier terme (1) est nul, en vue de l'isomorphisme $H^p(N, \Psi^q) \rightarrow H^p(S_*, \Psi^q)$ induit par l'inclusion et de $\Lambda(T^k, \Psi_s^{\bullet}) = 0, s \in S_*$.

Le second terme (2) est nul car il vaut

$$\sum_{m \geq 1} \sum_{p, q \geq 0} (-1)^{p+q} \text{Trace} [T^k; H^p(\partial_m N, \Psi^q)] = \sum_{m \geq 1} \chi(\partial_m N) \Lambda(T^k, \Psi_{s_m}^{\bullet}) = 0$$

où s_m est un point de $\partial_m N, m \geq 1$, puisque la restriction de Ψ^{\bullet} à $\partial_m N$ est localement constante.

Le troisième terme (3) vaut

$$\sum_{m | k} m \chi(S_m),$$

car pour $s \in \tilde{S}_m$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{p, q \geq 0} (-1)^{p+q} \text{Trace} [T^k; H^p(\tilde{S}_m, \Psi^q)] &= \chi(\tilde{S}_m) \Lambda(T^k, \Psi_s^{\bullet}) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } m \nmid k, \\ m \chi(S_m), & \text{si } m | k, \end{cases} \end{aligned}$$

puisque la restriction de Ψ^{\bullet} à \tilde{S}_m est localement constante. Donc le théorème 1

découle de

$$\begin{aligned} \sum_{m \mid k} m\chi(S_m) &= \Lambda(T^k, E_2^{\bullet\bullet}) = \Lambda(T^k, E_3^{\bullet\bullet}) = \dots \\ &\dots = \Lambda(T^k, E_\infty^{\bullet\bullet}) = \Lambda(f^k). \end{aligned}$$

et de

$$\chi(F_\theta) = \Lambda(f^0) = \sum_{m \mid 0} m\chi(S_m) = \sum_{m \geq 1} m\chi(S_m).$$

Remarque. Soit $H \subset \mathbf{C}^{n+1}$ une hypersurface, $w \in H$. Soit m_0 la multiplicité de H en w . Alors on a

$$\begin{aligned} \Lambda(f^{m_0}) &= m_0\chi(S_{m_0}), \\ m_0 &\leq \text{Min} \{m \geq 1 \mid \chi(S_m) \neq 0\} = \text{Min} \{a \geq 1 \mid \Lambda(f^a) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Dans le cas $n=1$, on peut interpréter cette formule par: après éclatement de $w \in \mathbf{C}^2$ on obtient que $2 - \chi(S_{m_0}) = \tau$ est le nombre τ de tangentes à H en w comptées *sans* multiplicités. Donc la formule

$$\Lambda(f^{m_0}) = m_0(2 - \tau) \tag{1}$$

relie la monodromie, la multiplicité, et le nombre de tangentes à H en w . Il résulte de (1) que la multiplicité est un invariant topologique pour les singularités de courbes planes irréductibles car dans ce cas $\tau=1$. Donc dans le cas de courbes planes non irréductibles la multiplicité est aussi un invariant topologique, car on peut raisonner branche par branche. Ainsi on a retrouvé un résultat de Zariski, qui est un début de réponse à sa question [16]: la multiplicité d'une singularité isolée d'hypersurface est-elle un invariant topologique?

Il serait possible d'espérer que la monodromie rationnelle

$$f: H^n(F_\theta, \mathbf{C}) \rightarrow H^n(F_\theta, \mathbf{C})$$

détermine la multiplicité m_0 ou le type topologique: les exemples de Marie-Claire Grima [5] enlèvent un tel espoir. En effet les hypersurfaces

$$\begin{aligned} H_1 &= \{(x^{14} - y^{11})(x^{21} - y^{44}) = 0\} \subset \mathbf{C}^2 \\ H_2 &= \{(x^{22} - y^7)(x^{33} - y^{28}) = 0\} \subset \mathbf{C}^2 \end{aligned}$$

sont en 0 de multiplicités différentes et de types topologiques différents, mais les monodromies rationnelles sont équivalentes.

§4. Deux exemples plus compliqués

Le polynôme

$$P(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \cdot \dots \cdot x_n)^2 + x_1^{2n+2} + \dots + x_n^{2n+2}$$

définit par $\{P \equiv 0\}$ une hypersurface $H \subset \mathbf{C}^n$ qui présente au point 0 une singularité isolée. B. Malgrange [8] a démontré que la monodromie h de H au point 0 n'est pas quasi-unipotente d'échelon $n-1$. Cela signifie que

$$(h^i - \text{Id})^{n-1} \neq 0 \quad \text{pour tout } i \geq 1.$$

Donc les exemples de Malgrange prouvent que le théorème de la monodromie donne dans le cas des singularités isolées la meilleure borne possible pour l'échelon de quasi-unipotence. Cela est prouvé dans [2] pour les hypersurfaces dans \mathbf{C}^2 .

Nous allons calculer le polynôme caractéristique de la monodromie au point 0 de

$$H = \{(xyz)^2 + x^8 + y^8 + z^8 = 0\} \subset \mathbf{C}^3.$$

Soit $\pi_0: X_0 \rightarrow \mathbf{C}^3$ l'éclatement de centre $0 \in \mathbf{C}^3$. La transformée stricte sous π_0 de H rencontre $\pi_0^{-1}(0) \simeq P^2$ en trois droites L_1, L_2 et L_3 en position générale. Soient $\pi_1: X_1 \rightarrow X_0$ l'éclatement de centre L_1 , $\pi_2: X_2 \rightarrow X_1$ l'éclatement de centre la transformée stricte sous π_1 de L_2 , et enfin $\pi_3: X_3 \rightarrow X_2$ l'éclatement de centre la transformée stricte sous $\pi_1 \circ \pi_2$ de L_3 . Alors $\pi_0 \circ \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3$ est une résolution locale de H en 0. On a $S_m = \emptyset$, si $m \neq 6, 8$; $S_6 = (P^2 - 3 \text{ droites en position générale})$, donc $\chi(S_6) = 0$; S_8 est plus compliqué, la projection

$$\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3 \mid S_8: S_8 \rightarrow \bigcup_i L_i = L$$

admet génériquement la fibre ($P^1 - 3$ pts), sauf pour 24 points non doubles de L la fibre est ($P^1 - 2$ pts) et pour les 3 points doubles de L la fibre est $(P^1 - 1 \text{ pt}) \cup (P^1 - 3 \text{ pts})$. Donc la caractéristique d'Euler-Poincaré de la fibre est génériquement -1 , et elle est 0 aux 27 points non génériques. Donc $\chi(S_8) = -27$. $-1 = 27$, car $-27 = \chi(L - \text{les 27 points non génériques})$ et $-1 = \chi(\text{fibre générique})$. D'où

$$\Delta(t) = (t-1)^{-1} (t^8 - 1)^{27}, \quad \mu = 215.$$

La singularité isolée non quasi-homogène au point 0 de

$$H = \{x^3 + x^2z + y^2z + y^3 + z^4 = 0\} \subset \mathbf{C}^3$$

a été étudiée par Siersma [13].

Ici nous calculons le polynôme caractéristique de la monodromie de H au point 0. Soit $\pi_0: X_0 \rightarrow \mathbf{C}^3$ l'éclatement de centre $0 \in \mathbf{C}$. La transformée stricte de H rencontre $\pi_0^{-1}(0) \simeq \mathbf{P}^2$ en une courbe unicursale à un point double ordinaire C . Soit $a \in C$ ce point double, qui dans les coordonnées homogènes $[x, y, z]$ sur $\pi_0^{-1}(0)$ s'écrit $a = [0, 0, 1]$. On peut trouver en a des coordonnées locales (u, v, λ) de X_0 de sorte que localement en a l'on ait

$$\pi_0^{-1}(0) = \{\lambda^3 = 0\}, \quad C = \{\lambda^3 uv = 0\}, \quad \pi_0^{-1}(H) = \{\lambda^3(\lambda + uv) = 0\}.$$

Aux points $s \in \pi_0^{-1}(0)$, $s \neq a$, le diviseur $\pi_0^{-1}(H)$ de X_0 est à croisements normaux.

Soit $\pi_1: X_1 \rightarrow X_0$ l'éclatement de centre C . Le centre C n'est pas lisse, donc on éclate d'abord une branche de C localement au point a et de proche en proche, suivant la courbe C on finit par éclater la transformée stricte de l'autre branche de C au point a . La modification composée $\pi_0 \circ \pi_1$ est une résolution locale de H au point 0. On a $S_m = \emptyset$, si $m \neq 3, 4$; $S_3 = \mathbf{P}^2 - C$, donc $\chi(S_3) = \chi(\mathbf{P}^2) - \chi(C) = 2$; la projection $\pi_1|_{S_4}: S_4 \rightarrow C$ admet au dessus de $s \in C$, $s \neq a$, la fibre $(\mathbf{P}^1 - 2 \text{ pts})$, et au dessus de a la fibre $(\mathbf{P}^1 - 1 \text{ pt}) \cup (\mathbf{P}^1 - 2 \text{ pts})$; donc $\chi(S_4) = 1$. On trouve que le polynôme caractéristique de la monodromie de H au point 0 est $\Delta(t) = (t-1)^{-1}(t^3-1)^2(t^4-1)$.

Dans le déploiement de la singularité de H au point 0 se trouve le type topologique de la singularité isolée homogène $0 \in \{x^3 + y^3 + z^3 = 0\} \subset \mathbf{C}^3$ dont le polynôme caractéristique de la monodromie est $\Delta(t) = (t-1)^{-1}(t^3-1)^3$. Donc on voit que par petite déformation de la singularité de H au point 0 on peut échanger dans le polynôme caractéristique de la monodromie le facteur (t^4-1) contre le facteur (t^3-1) .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A'CAMPO, N., *Le nombre de Lefschetz d'une monodromie*, Indag. Math. 35 (1973), 113–118.
- [2] ———, *Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes*, Inventiones Math. 20 (1973), 147–169.
- [3] BRIESKORN, E., *Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen*, Manuscripta Mathematicae 2 (1970), 103–160.
- [4] CLEMENS, C. H., *Picard Lefschetz theorem for families of non singular algebraic varieties acquiring ordinary singularities*, Trans. Amer. Math. Soc. 136 (1969), 93–108.
- [5] GRIMA, M.-CL., *Thèse 3 cycle*, Université Paris VII, 1973.
- [6] GROTHENDIECK, A., *Séminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie (1967/69)*; SGA 7(1) Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique, Springer Lecture Notes No. 288 (1972).
DELIGNE, P. et KATZ, N., *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (1967/69)*; SGA 7(2) Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique, Springer Lecture Notes No. 340 (1973).
- [7] HIRONAKA, H., *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Ann. of Math. 79 (1964), 109–326.
- [8] MALGRANGE, B., *Lettre à l'éditeur*, Inventiones Math. 20 (1973), 170.
- [9] MILNOR, J., *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies 61 (1968).
- [10] MILNOR, J. et ORLIK, P., *Isolated singularities defined by weighted homogenous polynomials*, Topology 9 (1970), 385–393.

- [11] PARRY, W., *Entropy and generators in ergodic theory*, Benjamin 1969.
- [12] PHAM, F., *Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramifications des intégrales*, Bull. Soc. Math. de France 93 (1965), 333–367.
- [13] SIERSMA, D., *The singularities of C^∞ -functions of right-codimension smaller or equal than eight*, Indag. Math. 35 (1973), 31–37.
- [14] WEIL, A., *Numbers of solutions of equations in finite fields*, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 497–508.
- [15] LÊ DŨNG TRÁNG, *Sur les noeuds algébriques*, Compositio Mathematica 25 (1972), 281–321.
- [16] ZARISKI, O., *Some open questions in the theory of singularities*, Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 481–491.
- [17] SIEBENMANN, L., *Deformation of homeomorphisms on stratified sets*, Comment. Math. Helv. 47 (1972), 123–163.

I.H.E.S.

35, Route de Chartres
91440 Bures sur Yvette

Reçu le 26 septembre 1974.