

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 50 (1975)

**Artikel:** Konforme Verheftung von Gebieten mit beschränkter Randdrehung.  
**Autor:** Huber, Alfred  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-38803>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Konforme Verheftung von Gebieten mit beschränkter Randdrehung

ALFRED HUBER (Zürich)

Das Problem, wann eine vorgegebene Verheftungsvorschrift für die Ränder zweier ebener Jordanbereiche im Sinne von A. Pfluger [9] zulässig ist, d.h. wann sie eine Verheftung der beiden konformen Strukturen zur Folge hat, ist wohl heute noch als ungelöst zu betrachten. Immerhin ist man im Rahmen der Theorie der quasikonformen Abbildungen – im Anschluss an eine Entdeckung von Ahlfors und Beurling [3] über das Randverhalten – zu einem nützlichen hinreichenden Kriterium gelangt (O. Lehto und K. I. Virtanen [4], A. Pfluger [9]).

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir einen Fall von *isometrischer Verheftung*: Zwei von rektifizierbaren Jordankurven berandete Bereiche sollen derart miteinander verheftet werden, dass zugeordnete Randbogen stets dieselbe Länge aufweisen. Wir beschränken uns auf eine Teilklasse der rektifizierbaren Kurven, nämlich die Kurven von beschränkter Drehung (V. Paatero [7, 8]). Durch Anwendung eines Darstellungsatzes von Paatero und des oben erwähnten hinreichenden Kriteriums erhalten wir folgendes Resultat:

**SATZ.** *Längs Bogen, welche keine Nullwinkel enthalten, ist die isometrische Verheftung von Kurven beschränkter Drehung zulässig.*

Dieses Ergebnis steht in enger Beziehung zum Alexandrowschen Verheftungssatz für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung [1, 2]. Einerseits wird es durch diesen und Resultate von I. G. Reschetnjak [10] impliziert. (Es ist also bereits bewiesen, und zwar sogar ohne Annahme über die Abwesenheit von Nullwinkeln, allerdings – vom funktionentheoretischen Standpunkt aus gesehen – auf kolossalem Umweg). Anderseits aber bildet der obige Satz eine der Grundlagen für einen funktionentheoretischen Zugang zum Alexandrowschen Verheftungssatz. (Die interessanten Probleme eines solchen Zugangs sind von H. Leutwiler [6] eingehend diskutiert worden.)

*Beweis des Satzes.* Sei  $\Omega$  ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet in der komplexen Ebene, dessen Rand  $\Gamma$  von beschränkter Drehung ist (Definition siehe V. Paatero [7, p. 6]). Sei  $f$  eine konforme Abbildung des Einheitskreises  $\{\zeta \mid |\zeta| < 1\}$  auf  $\Omega$ . Nach Paatero [7, p. 45] existiert eine Funktion  $\psi$ , definiert und

von beschränkter Schwankung auf  $[0, 2\pi]$ , derart dass

$$\log |f'(\zeta)| = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |e^{i\vartheta} - \zeta| d\psi(\vartheta). \quad (1)$$

Wir übertragen diese Darstellung vom Einheitskreis auf die obere Halbebene  $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ . Die Funktion

$$g = f \circ h, \quad \text{wobei} \quad h(z) = \frac{z - i}{z + i},$$

bildet diese Halbebene konform auf  $\Omega$  ab. Dabei ist

$$\log |g'(z)| = \log \left| f' \left( \frac{z - i}{z + i} \right) \right| + \log 2 - 2 \log |z + i|. \quad (2)$$

Es bezeichne  $\mu'$  die durch  $h^{-1}$  auf die reelle Achse verpflanzte Funktion  $\psi$ ,  $\mu'(t) = \psi[h(t)]$ . Wir nehmen an, dass  $f(1) = g(\infty)$  innerer Punkt eines geradlinigen Randstücks ist. (Diese Annahme ist für das Folgende ohne Belang, da die zu beweisende Zulässigkeit einer Verheftung eine lokale Eigenschaft ist). Dann besitzt das durch  $\mu'$  erzeugte Mass kompakten Träger, und es ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\mu'(t) = 2\pi.$$

Aus (1) und (2) erhält man nach kurzer Rechnung die Darstellung

$$\log |g'(z)| = -\log 2 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \log \frac{|z - t|}{\sqrt{1 + t^2}} d\mu'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \log |z - t| d\mu(t) + \text{const.}, \quad (3)$$

wobei

$$\mu = -\frac{\mu'}{\pi}.$$

Kurven von beschränkter Drehung sind rektifizierbar (V. Paatero [8, p. 6]). Es bezeichne  $\gamma$  denjenigen Teilbogen von  $\Gamma$ , welchem bei der Abbildung  $f^{-1}$  das zwischen  $e^{i\alpha}$  und  $e^{i\beta}$  ( $\alpha < \beta$ ) liegende Kreisbogenstück entspricht. Nach bekannten Resultaten über das Randverhalten bei konformer Abbildung (F. Riesz [11], W. Seidel [12])

besitzt  $\gamma$  die Länge

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(e^{i\theta}) d\theta, \quad (4)$$

wobei

$$\varphi(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1} |f'(re^{i\theta})|.$$

(Dieser Limes existiert für fast alle  $\theta$ , da die Randkurve  $\Gamma$  rektifizierbar ist). Durch Anwendung des Lebesgueschen Konvergenzsatzes erhält man in unserm speziellen Fall

$$\varphi(e^{i\theta}) = \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log |e^{i\vartheta} - e^{i\theta}| d\psi(\vartheta) \right\}.$$

Aus (4) folgt damit

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log |e^{i\vartheta} - e^{i\theta}| d\psi(\vartheta) \right\} d\theta.$$

Die Verpflanzung auf die Halbebene ergibt

$$L = C \int_a^b \exp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \log |\xi - \eta| d\mu(\eta) \right\} d\xi. \quad (5)$$

Dabei ist  $[a, b]$  das dem Bogen  $\gamma$  bei der Abbildung  $g^{-1}$  entsprechende Intervall auf der reellen Achse.

Seien nun  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  einfach zusammenhängende, beschränkte Gebiete von beschränkter Randdrehung mit (gleich langen) Rändern  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$ , welche isometrisch verheftet werden sollen. Zur Beurteilung der Zulässigkeit der Verheftung führen wir das Problem auf die Verheftung von Halbebenen zurück: Sei  $g_1$  eine konforme Abbildung der oberen Halbebene auf  $\Omega_1$ , und sei  $g_2$  eine konforme Abbildung der unteren Halbebene auf  $\Omega_2$ ; diese Abbildungen können stetig auf die Gebietsränder ausgedehnt werden. Dabei seien  $g_1(0)$  und  $g_2(0)$  Punkte, welche bei der Verheftung miteinander identifiziert werden. Da die Zulässigkeit einer Verheftung eine lokale Eigenschaft ist, dürfen wir ohne Verlust an Allgemeinheit annehmen, dass  $g_1(\infty)$  und

$g_2(\infty)$  innere Punkte eines geradlinigen Randstückes sind. Wir definieren

$$\begin{aligned}\alpha(x) &:= \text{Länge des Bogens } g_1([0, x]), \\ \beta(x) &:= \text{Länge des Bogens } g_2([0, x]).\end{aligned}$$

Die isometrische Verheftungsvorschrift für  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  induziert auf der reellen Achse die Verheftung  $x \mapsto \beta^{-1}[\alpha(x)]$ . Zum Beweis von Satz 1 ist nun noch nachzuweisen, dass die Funktion  $\beta^{-1} \circ \alpha$  auf jedem endlichen Intervall quasisymmetrisch ist. (Für die hier verwendeten Begriffe und Resultate siehe Lehto und Virtanen [5], insbesondere p. 91/92). Hiefür genügt es zu verifizieren, dass  $\alpha$  (und somit auch  $\beta$  auf jedem endlichen Intervall quasisymmetrisch ist.

**BEHAUPTUNG.** Es gibt positive Zahlen  $M$  und  $t_0$  mit der Eigenschaft, dass

$$\frac{1}{M} \leq \frac{\alpha(x+t) - \alpha(x)}{\alpha(x) - \alpha(x-t)} \leq M \quad (6)$$

für alle reellen  $x$  und alle  $t \in (0, t_0)$ .

*Beweis.* Da

$$\alpha(x) = C \int_0^x \exp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \log |\xi - \eta| d\mu(\eta) \right\} d\xi,$$

ist (6) äquivalent mit

$$\frac{1}{M} \leq \frac{\int_x^{x+t} \exp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \log |\xi - \eta| d\mu(\eta) \right\} d\xi}{\int_{x-t}^{x} \exp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \log |\xi - \eta| d\mu(\eta) \right\} d\xi} \leq M. \quad (7)$$

Das Mass  $\mu$  besitzt folgende Eigenschaften:

- (a)  $\mu$  hat kompakten Träger,
- (b)  $\mu(\mathbf{R}) = -2$ ,
- (c) Für alle  $\eta \in \mathbf{R}$  ist  $\mu^+(\{\eta\}) < 1$  und  $\mu^-(\{\eta\}) < 1$ , wobei  $\mu = \mu^+ - \mu^-$  die Jordansche Zerlegung des Masses  $\mu$  bezeichnet. (Diese Eigenschaft ist eine Folge des Ausschlusses von Nullwinkeln).

Sei nun  $t_0$  eine positive Zahl mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine Zahl  $\lambda < 1$  so, dass

$$\mu^+(I) \leq \lambda \quad \text{und} \quad \mu^-(I) \leq \lambda$$

für jedes abgeschlossene Intervall  $I$ , dessen Länge  $4t_0$  nicht übersteigt.

Seien nun  $x \in \mathbb{R}$  und  $t \in (0, t_0)$  vorgegeben. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} p_0 &= \mu^+([x-2t, x+2t]), \\ p_1 &= \mu^+((-\infty, x-2t)), \\ p_2 &= \mu^+((x+2t, +\infty)), \\ q_0 &= \mu^-([x-2t, x+2t]), \\ q_1 &= \mu^-((-\infty, x-2t)), \\ q_2 &= \mu^-((x+2t, +\infty)). \end{aligned}$$

*Abschätzung des Zählers im mittleren Term von Ungleichung (7) nach oben: Für  $\xi \in [x, x+t]$  und  $\eta \in (-\infty, x-2t)$  gilt*

$$|x-\eta| \leq |\xi-\eta| \leq |x+t-\eta|.$$

Für  $\xi \in [x, x+t]$  und  $\eta \in (x+2t, +\infty)$  gilt

$$|x+t-\eta| \leq |\xi-\eta| \leq |x-\eta|.$$

Daraus schliessen wir, dass für  $\xi \in [x, x+t]$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \log |\xi-\eta| d\mu(\eta) \leq I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + p_0 \log(3t) - \int_{[x-2t, x+2t]} \log |\xi-\eta| d\mu^-(\eta), \quad (8)$$

wobei

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{(-\infty, x-2t)} \log |x+t-\eta| d\mu^+(\eta), \\ I_2 &= \int_{(-\infty, x-2t)} \log |x-\eta| d\mu^-(\eta), \\ I_3 &= \int_{(x+2t, +\infty)} \log |x-\eta| d\mu^+(\eta), \\ I_4 &= \int_{(x+2t, +\infty)} \log |x+t-\eta| d\mu^-(\eta). \end{aligned}$$

Aus (8) folgt

$$\begin{aligned} & \int_x^{x+t} \exp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \log |\xi-\eta| d\mu(\eta) \right\} d\xi \\ & \leq \exp \{I_1 - I_2 + I_3 - I_4\} \cdot (3t)^{p_0} \cdot \int_x^{x+t} \exp \left\{ - \int_{[x-2t, x+2t]} \log |\xi-\eta| d\mu^-(\eta) \right\} d\xi. \end{aligned}$$

Zur Abschätzung des letzten Integrals nehmen wir zunächst an, auf  $[x-2t, x+2t]$  bestehe das Mass  $\mu^-$  aus einer einzigen Punktmasse  $q_0$ . Das in Frage stehende Integral nimmt in diesem Falle dann seinen grössten Wert an, wenn sich die Masse  $q_0$  im Punkt  $x+(t/2)$  befindet:

$$\begin{aligned} & \int_x^{x+t} \exp \left\{ - \int_{[x-2t, x+2t]} \log |\xi - \eta| d\mu^-(\eta) \right\} d\xi \\ & \leq \int_x^{x+t} \exp \left\{ - q_0 \log \left| \xi - \left( x + \frac{t}{2} \right) \right| \right\} d\xi = 2 \int_0^{t/2} s^{-q_0} ds \leq \frac{2}{1-\lambda} \cdot t^{1-q_0}. \end{aligned}$$

Besteht das Mass  $\mu^-$  auf  $[x-2t, x+2t]$  aus endlich vielen Punktmassen, nämlich  $\alpha_1 q_0$  in  $\eta_1$ ,  $\alpha_2 q_0$  in  $\eta_2, \dots, \alpha_m q_0$  in  $\eta_m$  ( $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 1$ , alle  $\alpha_j > 0$ ), so führt uns eine Anwendung der Hölderschen Ungleichung auf den eben behandelten Spezialfall zurück:

$$\begin{aligned} & \int_x^{x+t} \exp \left\{ - \int_{[x-2t, x+2t]} \log |\xi - \eta| d\mu^-(\eta) \right\} d\xi \\ & = \int_x^{x+t} \left( \prod_{j=1}^m |\xi - \eta_j|^{-\alpha_j q_0} \right) d\xi \leq \prod_{j=1}^m \left( \int_x^{x+t} |\xi - \eta_j|^{-q_0} d\xi \right)^{\alpha_j} \leq \frac{2}{1-\lambda} \cdot t^{1-q_0}. \end{aligned}$$

Durch Verschmieren der Punktmassen ergibt sich die Gültigkeit derselben Abschätzung für ein beliebiges Mass  $\mu^-$ . Damit ist gezeigt, dass

$$\int_x^{x+t} \exp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \log |\xi - \eta| d\mu(\eta) \right\} d\xi \leq \exp \{I_1 - I_2 + I_3 - I_4\} \cdot \frac{6}{1-\lambda} \cdot t^{1+p_0-q_0}. \quad (9)$$

*Abschätzung des Nenners im mittleren Glied von Ungleichung (7) nach unten:* Durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} t^2 &= \left( \int_{x-t}^x 1 \cdot d\xi \right)^2 \\ &= \left( \int_{x-t}^x \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \log |\xi - \eta| d\mu(\eta) \right\} d\xi \right)^2 \\ &\leq \int_{x-t}^x \exp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \log |\xi - \eta| d\mu(\eta) \right\} d\xi \cdot \int_{x-t}^x \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{+\infty} \log |\xi - \eta| d\mu(\eta) \right\} d\xi. \end{aligned}$$

Unser Ziel ist eine Abschätzung des zweitletzten Integrals nach unten. Zu diesem Zweck suchen wir zunächst eine obere Schranke für das letzte Integral. Dies geschieht nach der beim Beweis von (9) benützten Methode. Wir stützen uns dabei auf folgende Ungleichungen:

Für  $\xi \in [x-t, x]$  und  $\eta \in (-\infty, x-2t)$  gilt

$$|x-t-\eta| \leq |\xi-\eta| \leq |x-\eta|.$$

Für  $\xi \in [x-t, x]$  und  $\eta \in (x+2t, +\infty)$  gilt

$$|x-\eta| \leq |\xi-\eta| \leq |x-t-\eta|.$$

Daraus schliessen wir, dass für  $\xi \in [x-t, x]$

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^{+\infty} \log |\xi-\eta| d\mu(\eta) &\leq K_2 - K_1 + K_4 - K_3 \\ &+ q_0 \log(3t) - \int_{[x-2t, x+2t]} \log |\xi-\eta| d\mu^+(\eta), \end{aligned} \quad (10)$$

wobei

$$\begin{aligned} K_2 &= \int_{(-\infty, x-2t)} \log |x-\eta| d\mu^-(\eta) = I_2, & K_1 &= \int_{(-\infty, x-2t)} \log |x-t-\eta| d\mu^+(\eta), \\ K_4 &= \int_{(x+2t, +\infty)} \log |x-t-\eta| d\mu^-(\eta), & K_3 &= \int_{(x+2t, +\infty)} \log |x-\eta| d\mu^+(\eta) = I_3. \end{aligned}$$

Indem wir das rechte Integral in (10) nach derselben Methode abschätzen wie das rechte Integral in (8), erhalten wir

$$\int_{x-t}^x \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{+\infty} \log |\xi-\eta| d\mu(\eta) \right\} d\xi \leq \exp \{K_2 - K_1 + K_4 - K_3\} \cdot \frac{6}{1-\lambda} t^{1+q_0-p_0}.$$

Daraus folgt

$$\int_{x-t}^x \exp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \log |\xi-\eta| d\mu(\eta) \right\} d\xi \geq \exp \{K_1 - K_2 + K_3 - K_4\} \cdot \frac{1-\lambda}{6} \cdot t^{1+p_0-q_0}. \quad (11)$$

*Beweis der rechten Hälfte von Ungleichung (7):* Aus (9) und (11) erhalten wir für das mittlere Glied von Ungleichung (7) die obere Schranke

$$\exp \{(I_1 - K_1) - (I_4 - K_4)\} \cdot \frac{36}{(1-\lambda)^2}. \quad (12)$$

Dabei ist

$$I_1 - K_1 = \int_{(-\infty, x-2t)} \log \left| \frac{x+t-\eta}{x-t-\eta} \right| d\mu^+(\eta) \leq p_1 \log 3. \quad (13)$$

(Die obere Grenze des Integranden ist  $\log 3$ ).

Analog gilt

$$I_4 - K_4 = \int_{(x+2t, +\infty)} \log \left| \frac{x+t-\eta}{x-t-\eta} \right| d\mu^-(\eta) \geq -q_2 \log 3. \quad (14)$$

(Die untere Grenze des Integranden ist  $-\log 3$ ). Da  $p_1 + p_2 \leq \mu^+(\mathbf{R}) + \mu^-(\mathbf{R}) = \|\mu\|$ , schliessen wir aus (12), (13) und (14), dass die rechte Hälfte von Ungleichung (7) gültig ist, falls wir

$$M = \frac{36}{(1-\lambda)^2} \cdot 3^{\|\mu\|}$$

setzen. Mit derselben Zahl  $M$  gilt auch die *linke Hälfte von Ungleichung (7)*. Der Beweis verläuft ganz analog.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] ALEXANDROW, A. D., *Die innere Geometrie der konvexen Flächen*, Akademie-Verlag, Berlin 1955.
- [2] ALEKSANDROV, A. D. und ZALGALLER, V. A., *Zweidimensionale Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung* (Russisch), Trudy Mat. Inst. Steklov 63 (1962). Englische Übersetzung: *Intrinsic geometry of surfaces*, Trans. Math. Monographs 15, Amer. Math. Soc., Providence R.I. 1967.
- [3] BEURLING, A. and AHLFORS, L., *The boundary correspondence under quasiconformal mapping*, Acta. Math. 96 (1956), 125–142.
- [4] LEHTO, O. and VIRTANEN, K. I., *On the existence of quasi-conformal mappings with prescribed complex dilatation*, Ann. Acad. Sci. Fenn. A I 274 (1960).
- [5] ——, *Quasikonforme Abbildungen*, Springer-Verlag 1965.
- [6] LEUTWILER, H., *Beiträge zum potentialtheoretischen Aspekt des Verheftungssatzes von A. D. Alexandrow*, Comment. Math. Helv. 45 (1970), 83–109.
- [7] PAATERO, V., *Ueber die konforme Abbildung von Gebieten deren Ränder von beschränkter Drehung sind*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Serie A, 33, Nr. 9, Helsinki 1931.
- [8] ——, *Ueber Gebiete von beschränkter Randdrehung*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Serie A, 37, Nr. 9, Helsinki 1933.
- [9] PFLUGER, A., *Ueber die Konstruktion Riemannscher Flächen durch Verheftung*, J. Indian Math. Soc. 24 (Golden Jubilee Commemoration Volume 1960), 401–412.
- [10] RESCHETNIJAK, I. G., *Die Schwenkung einer Kurve auf einer Mannigfaltigkeit beschränkter Krümmung mit isothermem Linienelement* (Russisch), Sibirskii Mat. J. 4 (1963), 879–910.
- [11] RIESZ, F., *Ueber die Randwerte der analytischen Funktionen*, Math. Z. 18 (1923), 87–95.
- [12] SEIDEL, W., *Ueber die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung*, Math. Ann. 104 (1931), 182–243.

Eingegangen den 31. Oktober 1974