

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 49 (1974)

**Artikel:** Ein Mittelwertsatz für Dirichletreihen, die Modulformen assoziiert sind  
**Autor:** Good, Anton  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-37977>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Ein Mittelwertsatz für Dirichletreihen, die Modulformen assoziiert sind

VON ANTON GOOD

## §1. Einleitung

Bezeichnet  $\zeta(s)$  die Riemannsche Zetafunktion, dann gilt

$$\int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^2 dt \sim T \log T, \quad T \rightarrow \infty.$$

Hardy und Littlewood [3] bewiesen dies mit Hilfe ihrer approximativen Funktionalgleichung für  $\zeta(s)$  [4]. Später benutzte Ingham [8] die approximative Funktionalgleichung für  $\zeta^2(s)$  [4] um

$$\int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^4 dt \sim \frac{1}{2\pi^2} T \log^4 T, \quad T \rightarrow \infty, \quad (1)$$

zu beweisen. Chandrasekharan und Narasimhan [2] gaben eine allgemeine Methode an, um von einer Funktionalgleichung für Dirichletreihen eine approximative Funktionalgleichung herzuleiten. Diese wurde von ihnen dann verwendet, um Mittelwertsätze für die Dedekindsche Zetafunktion im „kritischen Streifen“ zu beweisen. Aber in besonderen Fällen konnten solche Mittelwertsätze auch ohne eine approximative Funktionalgleichung bewiesen werden. Titchmarsh ([12], p. 134–145) verwendete eine angenäherte „Modulrelation“ und den Tauberschen Satz für Integrale von Hardy und Littlewood um (1) zu beweisen. Auf dieselbe Art bewies Motohashi [9] für die Dedekindsche Zetafunktion eines reellquadratischen Zahlkörpers einen Mittelwertsatz auf der „kritischen Linie“.

Gemeinsam an all diesen Dirichletreihen ist, dass sie reelle nichtnegative Koeffizienten haben. Prof. Chandrasekharan stellte mir die Frage, ob Titchmarshs Verfahren auch für Dirichletreihen anwendbar ist, die reelle Koeffizienten mit wechselndem Vorzeichen haben, z.B. für  $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) n^{-s}$ , wo die Funktion  $\tau(n)$  von Ramanujan durch

$$z \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z^k)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) z^n, \quad |z| < 1,$$

definiert ist. Diese Frage wird hier positiv beantwortet:

Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) n^{-s}$  konvergiert für  $\text{Re } s > 6\frac{1}{2}$  absolut und definiert eine analytische Funktion  $F(s)$ , die in die ganze  $s$ -Ebene analytisch fortsetzbar ist. Auf der „kritischen Linie“  $\sigma=6$  gilt dann

$$\int_0^T |F(6+it)|^2 dt \sim CT \log T, \quad T \rightarrow \infty,$$

wobei  $C$  eine positive Konstante ist. Dies ist ein Spezialfall des Satzes in §4. An dieser Stelle möchte ich Prof. Chandrasekharan für die Unterstützung bei dieser Arbeit danken.

## §2. Hilfssätze I

In diesem Paragraphen werden bekannte Sätze, die später gebraucht werden, ohne Beweis zitiert.

Für positive ganze Zahlen  $N$  bezeichne  $\Gamma(N)$  die nichthomogene Hauptkongruenzgruppe zur Stufe  $N$ , d.h.  $\Gamma(N)$  ist die Gruppe der Transformationen  $T: z \mapsto (az+b)/(cz+d)$  der oberen Halbebene  $\text{Im } z > 0$  in sich mit ganzen Zahlen  $a, b, c, d$  und  $ad-bc=1$ ,  $a \equiv d \equiv 1 \pmod{N}$ ,  $b \equiv c \equiv 0 \pmod{N}$ .

Sei  $k$  eine positive ganze Zahl und  $H(z)$  eine ganze Spitzenform der Art  $(-k, N)$  im Sinne von Hecke [7], d.h.  $H(z)$  ist für  $\text{Im } z > 0$  eine analytische Funktion und erfüllt für alle  $T: z \mapsto (az+b)/(cz+d)$  in  $\Gamma(N)$  die Gleichung

$$H\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)(cz+d)^{-k} = H(z).$$

Ferner besitzt dann  $H(z)$  an allen bezüglich  $\Gamma(N)$  inäquivalenten Spitzen eine Fourierreihe mit Periode  $N$ , in der alle nichtpositiven Koeffizienten verschwinden. Also gilt insbesondere

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z / N}, \\ H_0(z) &= (-iz)^{-k} H\left(\frac{-1}{z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{2\pi i n z / N}. \end{aligned} \tag{2}$$

Unter den zu  $H(z)$  assoziierten Dirichletreihen verstehen wir

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \quad \text{und} \quad F_0(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}.$$

LEMMA 1. (Hecke [6]). (a) *Die einer ganzen Spitzenform  $H(z)$  der Art  $(-k, N)$  assoziierten Dirichletreihen  $F(s)$  und  $F_0(s)$  konvergieren für  $\text{Re } s > \frac{1}{2}(k+1)$  absolut.*

(b)  $F(s)$  und  $F_0(s)$  sind ganze Funktionen und genügen der Funktionalgleichung

$$\left(\frac{2\pi}{N}\right)^{-s} \Gamma(s) F(s) = \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{s-k} \Gamma(k-s) F_0(k-s).$$

LEMMA 2. (Rankin [11]). Für die Koeffizienten einer ganzen Spitzenform  $H(z)$  der Art  $(-k, N)$  gilt:

$$\sum_{n \leq x} |a_n|^2 = Ax^k + O(x^{k-2/5})$$

und

$$\sum_{n \leq x} |b_n|^2 = Ax^k + O(x^{k-2/5})$$

mit

$$A = 12 \frac{(4\pi)^{k-1}}{GN^k \Gamma(k+1)} \iint_D |H(x+iy)|^2 y^{k-2} dx dy,$$

wobei  $D$  ein beliebiges Fundamentalgebiet von  $\Gamma(N)$  in der oberen Halbebene  $z=x+iy$ ,  $y>0$  und  $G$  der Index von  $\Gamma(N)$  in  $\Gamma(1)$  ist:

$$G = \frac{N^3}{2\varrho} \prod_{\substack{p|N \\ p \text{ prim}}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right), \quad \varrho = \frac{1}{2} \text{ für } N=1, 2 \text{ und } \varrho = 1 \text{ für } N > 2.$$

LEMMA 3. (Hardy [5], p. 166). Sei  $C>0$ . Ist  $f$  eine nichtnegative messbare Funktion auf dem Intervall  $[1, \infty)$ , sodass für  $\delta > 0$

$$\int_1^\infty f(t) e^{-\delta t} dt < \infty$$

und

$$\int_1^\infty f(t) e^{-\delta t} dt \sim C \frac{\log \frac{1}{\delta}}{\delta}, \quad \delta \downarrow 0,$$

dann ist

$$\int_1^T f(t) dt \sim CT \log T, \quad T \rightarrow \infty.$$



### §3. Hilfssätze II

Für den Beweis des Satzes brauchen wir noch folgende Lemmata:

LEMMA 4. *Sei  $k$  eine positive ganze Zahl und  $C > 0$ . Ist  $f$  eine nichtnegative messbare Funktion auf dem Intervall  $[1, \infty)$ , sodass für  $\delta > 0$*

$$\int_1^{\infty} f(t) t^{k-1} e^{-\delta t} dt < \infty$$

und

$$\int_1^{\infty} f(t) t^{k-1} e^{-\delta t} dt = C \frac{\log \frac{1}{\delta}}{\delta^k} + O(\delta^{-k}), \quad \delta \downarrow 0$$

dann gilt

$$\int_1^{\infty} f(t) e^{-\delta t} dt = \frac{C}{\Gamma(k)} \cdot \frac{\log \frac{1}{\delta}}{\delta} + O(\delta^{-1}), \quad \delta \downarrow 0.$$

*Beweis.* Wir verwenden vollständige Induktion nach  $k$ . Der Fall  $k=1$  ist klar. Sei also

$$\int_1^{\infty} f(t) t^k e^{-\delta t} dt = C \frac{\log \frac{1}{\delta}}{\delta^{k+1}} + O\left(\frac{1}{\delta^{k+1}}\right) \quad \text{für } 0 < \delta \leq \delta_0$$

Dann ist für  $0 < \eta < \delta_0$

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^{\delta_0} d\delta \int_1^{\infty} f(t) t^k e^{-\delta t} dt &= C \int_{\eta}^{\delta_0} \frac{\log \frac{1}{\delta} d\delta}{\delta^{k+1}} + O\left(\int_{\eta}^{\delta_0} \frac{d\delta}{\delta^{k+1}}\right) \\ &= -\frac{C}{k} \left( \frac{\log \frac{1}{\delta}}{\delta^k} - \frac{1}{k\delta^k} \right) \Bigg|_{\eta}^{\delta_0} + O(\delta^{-k} \Big|_{\eta}^{\delta_0}) = \frac{C}{k} \cdot \frac{\log \frac{1}{\eta}}{\eta^k} + O(\eta^{-k}). \end{aligned} \tag{3}$$

Andererseits ist nach der Theorie der Laplacetransformation

$$\int_{\eta}^{\delta_0} d\delta \int_1^{\infty} f(t) t^k e^{-\delta t} dt = \int_1^{\infty} f(t) t^{k-1} e^{-\eta t} dt - \int_1^{\infty} f(t) t^{k-1} e^{-\delta_0 t} dt,$$

also nach (3)

$$\int_1^{\infty} f(t) t^{k-1} e^{-\eta t} dt = \frac{C}{k} \cdot \frac{\log \frac{1}{\eta}}{\eta^k} + O\left(\frac{1}{\eta^k}\right), \quad \eta \downarrow 0.$$

Mit der Induktionsvoraussetzung ergibt sich nun die Behauptung.

LEMMA 5. Sei  $(c_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Folge reeller, nichtnegativer Zahlen. Sei  $C > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ . Wenn

$$\sum_{n \leq x} c_n = Cx^k + O(x^{k-\varepsilon}), \quad x \rightarrow \infty, \quad (4)$$

dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-k} e^{-\beta n} = kC \log \frac{1}{\beta} + O(1), \quad \beta \downarrow 0,$$

und für  $l < k$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-l} e^{-\beta n} = O(\beta^{l-k}), \quad \beta \downarrow 0.$$

Beweis. Durch partielle Integrationen ergibt sich für  $l \leq k$  mit (4)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-l} e^{-\beta n} &= \beta \int_1^{\infty} \left( \sum_{n \leq x} c_n n^{-l} \right) e^{-\beta x} dx \\ &= \beta \int_1^{\infty} \left( x^{-l} \sum_{n \leq x} c_n + l \int_1^x y^{-l-1} \sum_{n \leq y} c_n dy \right) e^{-\beta x} dx \\ &= \beta \int_1^{\infty} \left( O(x^{k-l}) + l \int_1^x \{C y^{k-l-1} + O(y^{k-\varepsilon-l-1})\} dy \right) e^{-\beta x} dx \\ &= \beta \int_1^{\infty} \left( O(x^{k-l}) + lC \int_1^x y^{k-l-1} dy \right) e^{-\beta x} dx \\ &= \begin{cases} \beta \int_1^{\infty} (O(1) + lC \log x) e^{-\beta x} dx, & \text{für } l = k, \\ \beta \int_1^{\infty} O(x^{k-l}) e^{-\beta x} dx, & \text{für } l < k. \end{cases} \end{aligned}$$

Nun ist

$$\beta \int_1^{\infty} x^{k-l} e^{-\beta x} dx = \int_{\beta}^{\infty} \left(\frac{y}{\beta}\right)^{k-l} e^{-y} dy \leq \beta^{l-k} \int_0^{\infty} y^{k-l} e^{-y} dy = O(\beta^{l-k}), \quad \beta \downarrow 0$$

und

$$\beta \int_1^{\infty} \{O(1) + lC \log x\} e^{-\beta x} dx = \int_1^{\infty} \left\{O(1) + lC \log y + lC \log \frac{1}{\beta}\right\} e^{-y} dy.$$

Da

$$\int_0^{\infty} \log y e^{-y} dy = -\gamma,$$

$\gamma$  die Eulersche Konstante und

$$\int_{\beta}^{\infty} e^{-y} dy = 1 + O(\beta), \quad \beta \downarrow 0$$

ist das Lemma bewiesen.

LEMMA 6. Mit den Bezeichnungen von Lemma 1 ist für  $0 < \delta \leq \pi/2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\pi-2\delta)t} \left| \Gamma\left(\frac{k}{2} + it\right) \right|^2 \cdot \left| F\left(\frac{k}{2} + it\right) \right|^2 dt \\ = \left(\frac{2\pi}{N}\right)^k \int_1^{\infty} \{|H(-ve^{-i\delta})|^2 + |H_0(ve^{i\delta})|^2\} v^{k-1} dv. \end{aligned}$$

*Beweis.* Nach [6] hat  $F(s)$  für  $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}(k+1)$  folgende Darstellung

$$\left(\frac{2\pi}{N}\right)^{-s} \Gamma(s) F(s) = \int_0^{\infty} H(iy) y^{s-1} dy = e^{-i(\pi/2)s} \int_0^{\infty} H(iy) (iy)^{s-1} d(iy). \quad (5)$$

Für ein festes  $\delta$ ,  $0 < \delta \leq \pi/2$ , für  $v > 0$  und  $z = -ve^{-i\delta}$  gilt wegen den Reihenentwicklungen (2)

$$\begin{aligned} H(z) &= O(e^{-2\pi v \sin \delta/N}), & v \rightarrow \infty \\ H(z) &= O(v^{-k} e^{-2\pi/N v \sin \delta}), & v \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Deshalb ändert sich nach dem Satz von Cauchy das Integral (5) nicht, wenn wir in der komplexen  $z$ -Ebene anstatt längs der positiven imaginären Achse, längs einer Halbgeraden  $z = -ve^{-i\delta}$ ,  $v > 0$ ,  $\delta$  fest,  $0 < \delta \leq \pi/2$ , integrieren, und alle diese Integrale konvergieren für jede komplexe Zahl  $s = \sigma + it$  absolut. Also ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{-s} \Gamma(s) F(s) &= e^{-i(\pi/2)s} \int_0^\infty H(-ve^{-i\delta}) \cdot (-ve^{-i\delta})^{s-1} (-e^{-i\delta}) dv \\ &= e^{i(\pi/2-\delta)s} \int_0^\infty H(-ve^{-i\delta}) v^{s-1} dv. \end{aligned}$$

$G(s) = (2\pi/N)^{-s} e^{i(\delta-(\pi/2))s} \Gamma(s) F(s)$  ist also die Mellintransformierte von  $H(-ve^{-i\delta})$ . Mit der Stirling'schen Formel

$$|\Gamma(\sigma + it)| = (2\pi)^{1/2} e^{-(\pi/2)|t|} |t|^{\sigma-1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{|t|}\right)\right), \quad |t| \rightarrow \infty, \quad (7)$$

gleichmässig für  $-\infty < \sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1 < \infty$ , folgt aus Lemma 1 (b) und dem Phragmén-Lindelöf Prinzip, dass

$$F\left(\frac{k}{2} + it\right) = O(|t|^{1/2+\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0, \quad |t| \rightarrow \infty, \quad (8)$$

Da nach (6) für festes  $\delta$   $H(-e^{u-i\delta}) e^{uk/2}$  als Funktion von  $u = \log v$ , und nach (7), (8)  $G(k/2 + it)$  als Funktion von  $t$   $L_2$ -summierbar sind, liefert der Satz von Plancherel

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{-k} e^{(\pi-2\delta)t} \left|\Gamma\left(\frac{k}{2} + it\right)\right|^2 \left|F\left(\frac{k}{2} + it\right)\right|^2 dt = \int_0^\infty |H(-ve^{-i\delta})|^2 v^{k-1} dv. \quad (9)$$

Mit  $u = 1/v$  und der Funktionalgleichung (2) erhalten wir

$$\int_0^1 |H(-ve^{-i\delta})|^2 v^{k-1} dv = \int_1^\infty \left|H\left(\frac{-1}{ue^{i\delta}}\right)\right|^2 u^{-k-1} du = \int_1^\infty |H_0(ue^{i\delta})|^2 u^{k-1} du.$$

Dies ergibt mit (9) die Behauptung.

**LEMMA 7.** Sei  $H(z)$  eine Spitzenform der Art  $(-k, N)$  mit Koeffizienten  $(a_n)_{n=1}^\infty$   $(b_n)_{n=1}^\infty$  in (2) und  $A$  die Konstante von Lemma 2, dann ist für  $k > 1$

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \{ |H(-ve^{-i\delta})|^2 + |H_0(ve^{i\delta})|^2 \} v^{k-1} dv \\ = 2\Gamma(k+1) \left( \frac{N}{2\pi} \right)^k A (2\delta)^{-k} \left( \log \frac{1}{2\delta} + O(1) \right), \quad \delta \downarrow 0. \end{aligned}$$

*Beweis.* Für den Beweis brauchen wir von  $H(z)$ , respektive  $H_0(z)$  nur das asymptotische Verhalten von  $\sum_{n \leq x} |a_n|^2$ , respektive  $\sum_{n \leq x} |b_n|^2$ , das nach Lemma 2 für  $(a_n)_{n=1}^\infty$  und  $(b_n)_{n=1}^\infty$  dasselbe ist. Es genügt also zu zeigen, dass

$$\int_1^\infty |H(-ve^{-i\delta})|^2 v^{k-1} dv = \Gamma(k+1) A \left( \frac{N}{4\pi\delta} \right)^k \left( \log \frac{1}{2\delta} + O(1) \right), \quad \delta \downarrow 0.$$

Da die Doppelreihenentwicklung von  $|H(-ve^{-i\delta})|^2$  absolut konvergiert, dürfen wir die Summation und Integration vertauschen. Wenn wir dann noch  $k$ -mal partiell integrieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_1^\infty |H(-ve^{-i\delta})|^2 v^{k-1} dv &= \sum_{n,m=1}^\infty a_n \bar{a}_m \int_1^\infty v^{k-1} \exp \left( -\frac{2\pi}{N} v [in e^{-i\delta} - im e^{i\delta}] \right) dv \\ &= \sum_{n,m=1}^\infty a_n \bar{a}_m |\exp| \left( -\frac{2\pi}{N} [(n+m) \sin \delta + i(n-m) \cos \delta] \right) \\ &\quad \times \sum_{l=1}^k \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-l+1)}{\left( \frac{2\pi}{N} [(n+m) \sin \delta + i(n-m) \cos \delta] \right)^l}. \end{aligned} \tag{10}$$

Der Hauptterm auf der rechten Seite von (10) ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty |a_n^2| \exp \left( -\frac{4\pi}{N} n \sin \delta \right) \frac{\Gamma(k)}{\left( \frac{4\pi}{N} n \sin \delta \right)^k} \\ = \Gamma(k) \left( \frac{N}{4\pi \sin \delta} \right)^k \sum_{n=1}^\infty |a_n^2| n^{-k} \exp \left( -\frac{4\pi}{N} n \sin \delta \right) \\ = \Gamma(k) \left( \frac{N}{4\pi\delta} \right)^k \left( kA \log \left( \frac{N}{4\pi \sin \delta} \right) + O(1) \right) \\ = \Gamma(k+1) A \left( \frac{N}{4\pi\delta} \right)^k \left( \log \frac{1}{2\delta} + O(1) \right), \quad \delta \downarrow 0, \end{aligned}$$

nach Lemma 2 und 5. Das Lemma ist bewiesen, wenn wir zeigen, dass alle übrigen Terme auf der rechten Seite von (10) von der Ordnung  $O(\delta^{-k})$  sind:

Nach Lemma 2 und 5 ist für  $1 < l < k$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^2| \exp\left(-\frac{4\pi}{N} n \sin \delta\right) \left(\frac{4\pi}{N} n \sin \delta\right)^{-l} &= O(\delta^{-l}) \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^2| n^{-l} \exp\left(-\frac{4\pi}{N} n \sin \delta\right) \\ &= O(\delta^{-l} \cdot \delta^{l-k}) = O(\delta^{-k}), \quad \delta \downarrow 0, \end{aligned}$$

und für  $1 < l \leq k$

$$\begin{aligned} \Sigma_l &= \sum_{\substack{n, m=1 \\ n \neq m}}^{\infty} a_n \bar{a}_m \frac{\exp\left(-\frac{2\pi}{N} [\dots]\right)}{\left(\frac{2\pi}{N} [\dots]\right)^l} \\ &= O\left(\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{m-1} |a_n a_m| \frac{\exp\left(-\frac{2\pi}{N} (m+n) \sin \delta\right)}{|(n+m) \sin \delta + i(n-m) \cos \delta|^l}\right) = \\ &= O\left(\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{r=1}^{m-1} |a_m a_{m-r}| \frac{\exp\left(-\frac{2\pi}{N} (2m-r) \sin \delta\right)}{(r \cos \delta)^l}\right) = \\ &= O\left(\sum_{r=1}^{\infty} r^{-l} \sum_{m=r+1}^{\infty} |a_m a_{m-r}| \exp\left(-\frac{2\pi}{N} (2m-r) \sin \delta\right)\right), \quad \delta \downarrow 0. \end{aligned}$$

Nun gilt für die innere Summe

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m=r+1}^{\infty} |a_m a_{m-r}| \exp\left(-\frac{2\pi}{N} (2m-r) \sin \delta\right)\right)^2 &\leq \sum_{m=r+1}^{\infty} |a_m|^2 \\ &\times \exp\left(-\frac{4\pi}{N} m \sin \delta\right) \sum_{m=r+1}^{\infty} |a_{m-r}|^2 \exp\left(-\frac{4\pi}{N} (m-r) \sin \delta\right) = \\ &= O(\delta^{-k}) \sum_{m=r+1}^{\infty} |a_m|^2 \exp\left(-\frac{4\pi}{N} m \sin \delta\right) = O(\delta^{-2k}), \quad \text{wenn } \delta \downarrow 0. \end{aligned}$$

Damit ist  $\Sigma_l = O(\delta^{-k})$ , für  $1 < l \leq k$ . Sodann gilt

$$\sum_{m, n=1}^{\infty} a_n \bar{a}_m \frac{\exp\left(-\frac{2\pi}{N} [\dots]\right)}{\left(\frac{2\pi}{N} [\dots]\right)} = \int_1^{\infty} |H(-ve^{-i\delta})|^2 dv.$$

Nach Hecke [7] Satz 5 gilt für Spitzenformen

$$|H(-ve^{-i\delta})|^2 = O\left(\frac{1}{(v \sin \delta)^k}\right), \quad \text{für } v \sin \delta \leq 1$$

und nach (6)

$$|H(-ve^{-i\delta})|^2 = O\left(\exp\left(-\frac{4\pi}{N} v \sin \delta\right)\right), \quad \text{für } v \sin \delta \geq 1.$$

Diese Abschätzungen ergeben für  $k > 1$

$$\begin{aligned} \int_1^\infty |H(-ve^{-i\delta})|^2 dv &= \int_1^{1/\sin \delta} |H(-ve^{-i\delta})|^2 dv + \int_{1/\sin \delta}^\infty |H(-ve^{-i\delta})|^2 dv \\ &= O\left(\frac{1}{\delta^k}\right) \int_1^\infty \frac{dv}{v^k} + O\left(\int_{1/\sin \delta}^\infty \exp\left(-\frac{4\pi}{N} v \sin \delta\right) dv\right) \\ &= O\left(\frac{1}{\delta^k}\right) + O\left(\frac{1}{\delta}\right) = O\left(\frac{1}{\delta^k}\right), \quad \delta \downarrow 0, \end{aligned}$$

womit das Lemma bewiesen ist.

#### §4. Ein Mittelwertsatz

**SATZ.** Seien  $k$  und  $N$  positive ganze Zahlen. Sind  $(a_n)_{n=1}^\infty$  die Fourierkoeffizienten einer Spitzenform  $H(z)$  der Art  $(-k, N)$ , so gilt für die ganze Funktion  $F(s)$ , die für  $\text{Res} > \frac{1}{2}(k+1)$  durch  $F(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$  definiert ist wenn  $k > 1$ .

$$\int_0^T \left| F\left(\frac{k}{2} + it\right) \right|^2 dt \sim CT \log T, \quad T \rightarrow \infty,$$

wobei  $C = 2kA$  und  $A$  die Konstante von Lemma 2 ist:

$$A = 12 \frac{(4\pi)^{k-1}}{GN^k \Gamma(k+1)} \iint_D |H(x+iy)|^2 y^{k-2} dx dy,$$

$G = \text{Ordnung von } \Gamma(1)/\Gamma(N)$  und  $D$  ein Fundamentalgebiet von  $\Gamma(N)$  ist.

*Beweis.* Nach Lemma 6 und 7 ist

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\pi-2\delta)t} \left| \Gamma\left(\frac{k}{2} + it\right) F\left(\frac{k}{2} + it\right) \right|^2 dt \\ &= 2A \left(\frac{2\pi}{N}\right)^k \left(\frac{N}{2\pi}\right)^k \Gamma(k+1) \frac{\log\left(\frac{1}{2\delta}\right)}{(2\delta)^k} + O(\delta^{-k}), \quad \delta \downarrow 0. \end{aligned}$$

Nach Stirlings Formel (7) und (8) ist

$$\int_{-\infty}^1 e^{(\pi-2\delta)t} \left| \Gamma\left(\frac{k}{2} + it\right) F\left(\frac{k}{2} + it\right) \right|^2 dt = O(1), \quad \text{für } \delta \downarrow 0,$$

also nach Lemma 4

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_1^{\infty} t^{-k+1} e^{(\pi-2\delta)t} \left| \Gamma\left(\frac{k}{2} + it\right) \right|^2 \cdot \left| F\left(\frac{k}{2} + it\right) \right|^2 dt \\ &= 2A \frac{\Gamma(k+1) \log \frac{1}{2\delta}}{\Gamma(k) 2\delta} + O\left(\frac{1}{\delta}\right) = C(2\delta)^{-1} \left( \log \frac{1}{2\delta} + O(1) \right), \quad \delta \downarrow 0. \end{aligned}$$

Wieder mit (7) erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_1^{\infty} \left| F\left(\frac{k}{2} + it\right) \right|^2 e^{-2\delta t} dt - C(2\delta)^{-1} \log \frac{1}{2\delta} \\ &= O(\delta^{-1}) + O\left(\int_1^{\infty} \left| F\left(\frac{k}{2} + it\right) \right|^2 e^{-2\delta t} \frac{dt}{t}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Nach (8) ist voerst für jedes  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \int_1^{\infty} \left| F\left(\frac{k}{2} + it\right) \right|^2 e^{-2\delta t} \frac{dt}{t} = O\left(\int_1^{\infty} t^{\varepsilon} e^{-2\delta t} dt\right) \\ &= O\left(\delta^{-1-\varepsilon} \int_{2\delta}^{\infty} t^{\varepsilon} e^{-t} dt\right) = O(\delta^{-1-\varepsilon}), \quad \delta \downarrow 0, \end{aligned}$$



womit (11)

$$\int_1^{\infty} \left| F\left(\frac{k}{2} + it\right) \right|^2 e^{-2\delta t} dt = O(\delta^{-1-\varepsilon})$$

liefert. Mit der Ungleichung von Schwarz ergibt sich nun für den zweiten  $O$ -Term in (11) die verbesserte Abschätzung

$$\begin{aligned} \left( \int_1^{\infty} \left| F\left(\frac{k}{2} + it\right) \right|^2 e^{-2\delta t} \frac{dt}{t} \right)^2 &\leq \int_1^{\infty} \left| F\left(\frac{k}{2} + it\right) \right|^2 e^{-2\delta t} dt \int_1^{\infty} \left| F\left(\frac{k}{2} + it\right) \right|^2 e^{-2\delta t} \frac{dt}{t^2} \\ &= O(\delta^{-1-\varepsilon}) O\left( \int_1^{\infty} t^{-1+\varepsilon} e^{-2\delta t} dt \right) = O(\delta^{-1-2\varepsilon}), \quad \delta \downarrow 0. \end{aligned}$$

Wählen wir  $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ , erhalten wir

$$\int_1^{\infty} \left| F\left(\frac{k}{2} + it\right) \right|^2 e^{-2\delta t} dt = C \frac{\log \frac{1}{2\delta}}{2\delta} + O(\delta^{-1}), \quad \delta \downarrow 0,$$

nach Lemma 3 also die Behauptung des Satzes:

$$\int_0^T \left| F\left(\frac{k}{2} + it\right) \right|^2 dt = \int_1^T \left| F\left(\frac{k}{2} + it\right) \right|^2 dt + O(1) \sim CT \log T, \quad T \rightarrow \infty.$$

**KOROLLAR 1.** *Nach einem allgemeinen Mittelwertsatz von F. Carlson [1] über Dirichletreihen folgt nun sofort (siehe auch Potter [10]), dass für  $\sigma > k/2$*

$$\int_0^T |F(\sigma + it)|^2 dt \sim T \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{-2\sigma} \right), \quad T \rightarrow \infty.$$

**KOROLLAR 2.**  $\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi i n z}$  ist eine Spitzenform der Art  $(-12, 1)$  mit ganzzahligen Koeffizienten. Also gilt für die in der Einleitung erwähnte Funktion  $F(s)$

$$\begin{aligned} \int_0^T |F(6 + it)|^2 dt &\sim CT \log T, \quad T \rightarrow \infty, \\ C &= \frac{24(4\pi)^{11}}{\Gamma(12)} \iint_D |\Delta(x + iy)|^2 y^{10} dx dy. \end{aligned}$$

## LITERATUR

- [1] CARLSON, F., *Contributions à la théorie des séries de Dirichlet*, Archiv för Mat. Astr. och Fysik 19, No. 25 (1926).
- [2] CHANDRASEKHARAN, K. and NARASIMHAN, R., *The approximate functional equation for a class of zeta-functions*, Math. Ann. 152 (1963), 30–64.
- [3] HARDY, G. H. and LITTLEWOOD, J. E., *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distributions of primes*, Acta Math. 41 (1918), 119–196.
- [4] ———, *The approximate functional equation for  $\zeta(s)$  and  $\zeta^2(s)$* , Proc. London Math. Soc. (2) 29 (1929), 81–97.
- [5] HARDY, G. H., *Divergent series*, Oxford University Press, New York (1949).
- [6] HECKE, E., *Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung*, Math. Ann. 112 (1936), 644–699.
- [7] ———, *Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung I*, Math. Ann. 114 (1937), 1–28.
- [8] INGHAM, A. E., *Mean value theorems in the theory of the Riemann zeta-function*, Proc. London Math. Soc. (2) 27 (1926), 273–300.
- [9] MOTOHASHI, Y., *A note on the mean value of the Dedekind zeta-function of the quadratic field*, Math. Ann. 188 (1970), 123–127.
- [10] POTTER, H., *The mean value of certain Dirichlet series I*, Proc. London Math. Soc. 46, (1940), 467–478.
- [11] RANKIN, R. A., *Contributions to the theory of Ramanujan's function  $\tau(n)$  and similar arithmetical functions II*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 35 (1939), 357–372.
- [12] TITCHMARSH, E. C., *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford at the Clarendon Press (1951).

ETH Zürich, Hg. G 15.1  
 Leonhardstr. 33,  
 8006 Zürich

Eingegangen den 3. August 1973