

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 49 (1974)

Artikel: Sur le type principal d'orbites d'un module rationnel
Autor: Vust, Th.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-38001>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur le type principal d'orbites d'un module rationnel

par TH. VUST

Soit G un groupe algébrique réductif opérant linéairement et rationnellement dans un espace vectoriel M de dimension finie, le corps de base étant algébriquement clos et de caractéristique nulle. On note m_M le maximum des dimensions des orbites de G dans M . Il n'est pas difficile de vérifier que l'ensemble des points de M dont l'orbite est de dimension m_M est ouvert. On sait d'autre part (cf. [7], [4]) qu'il existe un type principal pour les orbites de G dans M , c'est-à-dire qu'il existe un ouvert de M , stable par G , formé d'orbites G -isomorphes. En particulier, les orbites de type principal sont de dimension m_M .

Dans le cas où G est simple, A. G. Élashvili a donné dans [3] la liste complète des représentations rationnelles $G \rightarrow GL(M)$ pour lesquelles m_M est strictement inférieure à la dimension de G . De plus, pour chacune de ces représentations, il décrit l'algèbre de Lie \mathfrak{h} du sous-groupe d'isotropie d'un point d'une orbite de type principal. L'examen des tables de [3] fait apparaître certaines propriétés de la structure des algèbres \mathfrak{h} . En particulier, notant \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G , on a le résultat que voici, relatif au radical de \mathfrak{h} :

THÉORÈME 3. *On suppose G simple. Soit \mathfrak{h} l'algèbre de Lie du sous-groupe d'isotropie d'un point d'une orbite de type principal.*

- (i) *Si \mathfrak{h} est réductive dans \mathfrak{g} , alors \mathfrak{h} est soit semi-simple, soit commutative.*
- (ii) *Si \mathfrak{h} n'est pas réductive dans \mathfrak{g} , alors \mathfrak{h} est produit semi-direct d'une sous-algèbre semi-simple par son radical nilpotent.*

Le but de ce travail est de donner une démonstration «à priori» du théorème 3. L'auteur tient enfin à préciser qu'une démonstration due à J. L. Koszul du point (i) a été utilisée à la proposition 2, §2.

§1. Résultats préliminaires

Le corps de base k est algébriquement clos et de caractéristique nulle.

Soit H un groupe algébrique affine qui opère (morphiquement) dans une variété affine X . On note H_x le sous-groupe d'isotropie et $H(x)$ l'orbite du point $x \in X$; $T_x H(x) \subset T_x X$ est alors l'espace tangent à $H(x)$ en x . On désigne par $k[X]$ l'algèbre des fonctions régulières sur X , par $s \cdot f$ l'image de $f \in k[X]$ par l'automorphisme de $k[X]$ associé à $s \in H$ et par $k[X]^H$ la sous-algèbre des invariants de $k[X]$.

Soit K un sous-groupe réductif de H ; on suppose que K opère dans une variété affine Y . On considère alors l'opération de K dans $H \times Y$ définie par $t(s, y) =$

$(st^{-1}, t \cdot y)$. On définit la variété affine $H \times_K Y$ par $k[H \times_K Y] = k[H \times Y]^K$ (qui est une algèbre de type fini puisque K est réductif). L'opération à gauche de H sur le premier facteur de $H \times Y$ commute à l'opération de K et induit donc une opération de H dans $H \times_K Y$. Ecrivant $\overline{(s, y)}$ l'image de $(s, y) \in H \times Y$ dans $H \times_K Y$, il n'est pas difficile de vérifier que $H_{\overline{(s, y)}} = sK_y s^{-1}$.

De manière générale, on note H^0 la composante connexe de l'élément neutre e de H et DH le sous-groupe dérivé de H .

Dans la suite de ce paragraphe, G désigne un groupe algébrique réductif opérant linéairement et rationnellement dans un espace vectoriel M de dimension finie. Soit $x \in M$; en vertu d'un théorème de Matsushima (cf. [4]), pour que $G(x)$ soit affine, il faut et il suffit G_x soit réductif. On note enfin m_M (resp. a_M) le maximum des dimensions des orbites (resp. des orbites affines) de G dans M . Si $m_M = \dim M$, c'est-à-dire si G a une orbite ouverte dans M , on dit que G opère presque transitivement dans M ou que M est un G -module presque homogène.

LEMME 1. *Soit $x \in M$ tel que G_x est réductif de dimension $\dim G - a_M$. Le G_x^0 -module $T_x M \simeq M$ se décompose alors en*

$$M = T_x G(x) \oplus T \oplus P$$

où l'opération de G_x^0 dans T est triviale et l'opération induite de DG_x^0 dans P est presque transitive.

Preuve. Le sous-groupe G_x étant réductif, on peut trouver un supplémentaire G_x -stable N de $T_x G(x)$ dans $T_x M \simeq M$. On considère alors la variété affine $G \times_{G_x} N = M'$ et le morphisme $\varphi: M' \rightarrow M$ défini par $\varphi(s, y) = s(x + y)$. Ce morphisme commute aux opérations de G dans M' et M , et est étale au voisinage de $(e, 0)$ (cf. [7], [5]). Il en résulte que, pour tout y dans un voisinage de l'origine dans N , on a

$$G_{x+y}^0 = G_{(e, y)}^0 = (G_x)_y^0.$$

L'hypothèse faite sur x et le fait que $(G_x)_{\lambda y} = (G_x)_y$ pour tout $\lambda \in k - (0)$ et $y \in N$, impliquent que, pour tout $y \in N$, $(G_x)_y$ est réductif si et seulement si $(G_x)_y^0 = G_x^0$. Cela signifie que l'origine est la seule orbite affine de G_x^0 dans le supplémentaire G_x^0 -stable P de $(N)^{G_x^0} = T$; l'origine est donc aussi la seule orbite affine de DG_x^0 dans P . Il résulte alors du corollaire 2 de [5] que DG_x^0 opère presque transitivement dans P .

Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G et $\varrho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathrm{gl}(M)$ la représentation de \mathfrak{g} correspondant à l'opération de G dans M . Pour tout $x \in M$, on note \mathfrak{g}_x (resp. $D\mathfrak{g}_x$) l'algèbre de Lie du groupe G_x (resp. DG_x). Enfin, pour tout endomorphisme a d'un espace vectoriel N de dimension finie, on note $\mathrm{Tr}_N(a)$ la trace de a .

LEMME 2. *On suppose que G est semi-simple de dimension >0 et que G opère*

presque transitivement dans M . Il existe alors un élément $a \in g$ vérifiant les deux conditions suivantes:

- (i) *a est semi-simple non nul et les valeurs propres de $ad(a)$ sont rationnelles,*
- (ii) $\text{Tr}_M(\varrho(a)^2) < \text{Tr}_{g_x}(ad(a)^2)$.

Preuve. a) Soit $x \in M$ tel que $G(x)$ est ouvert dans M . L'ensemble E des éléments $b \in g$ vérifiant $\varrho(b)x = x$ est non vide et contient la composante semi-simple de ses éléments. Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de g telle que $\mathfrak{h} \cap E \neq \emptyset$, Λ l'ensemble des poids de ϱ relatifs à \mathfrak{h} et $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$ la décomposition de x suivant les sous-espaces de poids de M . La condition $b \in \mathfrak{h} \cap E$ est alors équivalente à $\lambda(b) = 1$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ tel que $x_\lambda \neq 0$. Il est maintenant clair qu'il existe un élément $a \in \mathfrak{h} \cap E$ tel que les valeurs propres de $\varrho(a)$, et par suite celles de $ad(a)$, sont rationnelles; autrement dit, l'ensemble E' des éléments de E vérifiant (i) est non vide.

b) Soit $a \in E'$ et N un supplémentaire stable par $ad(a)$ de g_x dans g . L'application linéaire $\psi: N \rightarrow M$ définie par $\psi(b) = \varrho(b)x$ est bijective et on a

$$\varrho[a, b]x = \varrho(a)\varrho(b)x - \varrho(b)\varrho(a)x = \varrho(a)\varrho(b)x - \varrho(b)x$$

pour tout $b \in N$. Ainsi, si t_1, \dots, t_n sont les valeurs propres (comptées avec leur multiplicité) de l'endomorphisme $ad(a)$ de N , les valeurs propres (comptées avec leur multiplicité) de $\varrho(a)$ sont $1 + t_1, \dots, 1 + t_n$. Il en résulte que

$$\text{Tr}_M(\varrho(a)^2) = \dim M + 2\text{Tr}_N(ad(a)) + \text{Tr}_N(ad(a)^2)$$

d'où

$$\text{Tr}_M(\varrho(a)^2) = -\dim M + \text{Tr}_N(ad(a)^2)$$

puisque, g étant semi-simple, $\text{Tr}_M(\varrho(a)) = \dim M + \text{Tr}_N(ad(a)) = 0$. Comme d'autre part, $\text{Tr}_{g_x}(ad(a)^2) = \text{Tr}_{g_x}(ad(a)^2) + \text{Tr}_N(ad(a)^2)$, l'élément a vérifie aussi (ii).

PROPOSITION 1. (cf. [1]) *On suppose que $m_M < \dim G$. Il existe alors un élément $a \in g$ vérifiant les deux conditions suivantes:*

- (i) *a est semi-simple non nul et les valeurs propres de $ad(a)$ sont rationnelles,*
- (ii) $\text{Tr}_M(\varrho(a)^2) \leq \text{Tr}_{g_x}(ad(a)^2)$.

Preuve. Soit $x \in M$ tel que G_x est réductif de dimension $\dim G - a_M$. Le g_x -module M se décompose en

$$M = g/g_x \oplus T \oplus P$$

comme au lemme 1, et l'hypothèse implique que $g_x \neq (0)$. Il convient alors de distinguer deux cas :

1) $Dg_x = (0)$. Dans ce cas G_x^0 est un tore et par suite g_x contient des éléments vérifiant la condition (i).

Pour tout élément $a \in \mathfrak{g}_x$ vérifiant (i), on a

$$\mathrm{Tr}_M(\varrho(a)^2) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2)$$

puisque le fait que $D\mathfrak{g}_x = (0)$ implique que $P = (0)$; par conséquent,

$$\mathrm{Tr}_M(\varrho(a)^2) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(ad(a)^2).$$

2) $D\mathfrak{g}_x \neq (0)$. On prend dans ce cas un élément $a \in D\mathfrak{g}_x$ vérifiant les conditions du lemme 2 appliquée à la représentation de $D\mathfrak{g}_x$ dans P ; cet élément a vérifie (i). De plus, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_M(\varrho(a)^2) &= \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2) + \mathrm{Tr}_P(\varrho(a)^2) \\ &< \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2) + \mathrm{Tr}_{D\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2) \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(ad(a)^2), \end{aligned}$$

et a vérifie (ii).

§ 2. Le cas des groupes simples

Dans ce paragraphe, G désigne un groupe algébrique simple opérant linéairement et rationnellement dans un espace vectoriel M de dimension finie. Soit $\varrho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathrm{gl}(M)$ la représentation correspondante de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G . Du fait que \mathfrak{g} est simple, résulte que les deux formes bilinéaires symétriques invariantes

$$(a, b) \mapsto \mathrm{Tr}_M(\varrho(a)\varrho(b))$$

et

$$(a, b) \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(ad(a)ad(b))$$

sont proportionnelles. Le facteur de proportionnalité $I(\varrho)$ défini par

$$\mathrm{Tr}_M(\varrho(a)\varrho(b)) = I(\varrho)\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(ad(a)ad(b))$$

est en fait un nombre rationnel et s'appelle l'indice de ϱ (cf. [1]).

PROPOSITION 2. *Soit $x \in M$ tel que G_x est réductif de dimension $\dim G - a_M$. Deux cas sont alors possibles:*

- 1) $I(\varrho) \neq 1$ et \mathfrak{g}_x est semi-simple.
- 2) $I(\varrho) = 1$ et \mathfrak{g}_x est commutative.

La preuve de la proposition se fait en plusieurs temps.

- a) On considère la décomposition du \mathfrak{g}_x -module M donnée au lemme 1

$$M = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x \oplus T \oplus P.$$

On a alors, pour tout $a \in \mathfrak{g}_x$,

$$\mathrm{Tr}_M(\varrho(a)^2) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2) + \mathrm{Tr}_P(\varrho(a)^2)$$

et

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(ad(a)^2) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2) + \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2),$$

d'où, par définition de $I(\varrho)$,

$$(1 - I(\varrho)) \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2) = I(\varrho) \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2) - \mathrm{Tr}_P(\varrho(a)^2). \quad (1)$$

b) Si $I(\varrho) = 1$, alors $P = (0)$ et \mathfrak{g}_x est commutative. En effet (1) donne dans ce cas

$$\mathrm{Tr}_P(\varrho(a)^2) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2) \quad (2)$$

pour tout $a \in \mathfrak{g}_x$. Si P n'est pas réduit à (0) , alors $D_{\mathfrak{g}_x}$ n'est pas réduit à (0) (lemme 1); le lemme 2 appliqué à la représentation de $D\mathfrak{g}_x$ dans P affirme alors l'existence dans $D\mathfrak{g}_x$ d'un élément a tel que

$$\mathrm{Tr}_P(\varrho(a)^2) < \mathrm{Tr}_{D\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}_x}(ad(a)^2),$$

ce qui contredit (2). On a donc $P = (0)$ et (2) signifie cette fois que \mathfrak{g}_x est commutative.

c) Si \mathfrak{g}_x possède un centre non trivial, alors $I(\varrho) = 1$.

En effet, la composante neutre du centre de G_x étant un tore, \mathfrak{g}_x contient un élément central non nul b tel que les valeurs propres de $\varrho(b)$ sont rationnelles; pour un tel élément, on a en vertu de (1)

$$(1 - I(\varrho)) \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x}(ad(b)^2) = -\mathrm{Tr}_P(\varrho(b)^2) \leqslant 0. \quad (3)$$

Etant donné que \mathfrak{g}_x n'est pas réduit à (0) , m_M est strictement inférieure à la dimension de G^1 , et par conséquent $(1 - I(\varrho))$ est positif (proposition 1). Il résulte donc de (3) que $I(\varrho) = 1$.

Il sera commode pour la fin de ce paragraphe d'introduire la notation que voici.

On suppose que G opère dans une variété affine lisse et irréductible X . On sait qu'il existe alors un type principal pour les orbites de G dans X (cf. [7], [4]); cela signifie qu'il existe un ouvert de X , stable par G et formé d'orbites G -isomorphes. Soit $x \in M$ un point d'une orbite de type principal; on note $\mathfrak{h}(G, X)$ (ou $\mathfrak{h}(X)$ si aucune confusion n'en résulte) la classe de conjugaison dans \mathfrak{g} de l'algèbre de Lie \mathfrak{g}_x .

THÉORÈME 1. Soit $\mathfrak{h} \in \mathfrak{h}(M)$.

- 1) Si $I(\varrho) \neq 1$, alors il existe $x \in M$ et un sous G_x^0 -module P du G_x^0 -module M tels que:
 - a) G_x^0 est semi-simple et opère presque transitivement dans P ;

¹⁾ Sinon le sous-groupe d'isotropie d'un point en position générale dans M serait fini, donc réductif; on aurait ainsi $m_M = a_M = \dim G$, d'où $\mathfrak{g}_x = (0)$.

- b) \mathfrak{h} est conjuguée dans \mathfrak{g} d'un élément de $\mathfrak{h}(P)$.
 2) Si $I(\varrho)=1$, alors \mathfrak{h} est commutative et réductive dans \mathfrak{g} .

Preuve. Soit $x \in M$ tel que G_x est réductif de dimension $\dim G - a_M$. Soit $N \subset T_x M \simeq M$ un supplémentaire G_x -stable de $T_x G(x)$. Le G -morphisme $\varphi: G \times_{G_x} N \rightarrow M$ défini par $\varphi((\overline{s}, \overline{y})) = s(x+y)$ étant étale au voisinage de $(\overline{e}, \overline{o})$, $\mathfrak{h}(G \times_{G_x} N)$ et $\mathfrak{h}(M)$ coïncident. Comme $G_{\overline{(s, y)}} = s(G_x)_y s^{-1}$ pour tout $(\overline{s}, \overline{y}) \in G \times_{G_x} N$, $\mathfrak{h}(M)$ admet un représentant dans $\mathfrak{h}(G_x, N) = \mathfrak{h}(G_x^0, N)$. On considère la décomposition du G_x^0 -module N en $N = T \oplus P$ comme au lemme 1. On a $\mathfrak{h}(G_x^0, N) = \mathfrak{h}(G_x^0, P)$ puisque G_x^0 opère trivialement dans T . Sachant que P est un DG_x^0 -module presque homogène, les affirmations du théorème sont alors des conséquences faciles de ces remarques et de la proposition 2.

Remarques. 1) Dans le cas 1) du théorème 1, \mathfrak{h} n'est réductive dans \mathfrak{g} que si $P=(0)$ (cf. proposition 3 ci-dessous). On voit donc que, pour l'ensemble des G -modules M tels que $\mathfrak{h}(M) \neq \{(0)\}$, la condition $I(\varrho)=1$ est nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{h}(M)$ soit formée de sous-algèbres commutatives réductives dans \mathfrak{g} ; ce résultat est démontré dans [3].

2) Dans le cas 2) du théorème 1, \mathfrak{h} n'est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} que si ϱ est la représentation adjointe de \mathfrak{g} . Soit en effet $x \in M$ tel que \mathfrak{g}_x est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} et appartient à $\mathfrak{h}(M)$. On a alors $a_M = m_M = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_x$. Le \mathfrak{g}_x -module M se décomposant donc en $M = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x \oplus T$ suivant le lemme 1, on voit que les poids relatifs à \mathfrak{g}_x de la représentation ϱ sont 0 et les racines de \mathfrak{g} relatives à \mathfrak{g}_x , c'est-à-dire que ϱ est en fait la représentation adjointe de \mathfrak{g} .

3) Il résulte immédiatement de la proposition 1 que si $I(\varrho) > 1$, alors $\mathfrak{h}(M) = \{(0)\}$. Il peut arriver que $I(\varrho) \leq 1$ et que $\mathfrak{h}(M) = \{(0)\}$: par exemple, si $M_p = \bigoplus_1^p M_1$ où M_1 est le $SL(n)$ -module usuel de dimension n et si ϱ_p est la représentation correspondante, on a $I(\varrho_p) = p/2n$ et $\mathfrak{h}(M_p) = \{(0)\}$ pour $n \leq p$. Cependant, si M est un G -module irréductible, pour que $\mathfrak{h}(M) = \{(0)\}$, il faut et il suffit que $I(\varrho) > 1$ (cf. [1]).

§3. Le cas des modules presque homogènes

Dans ce paragraphe, G désigne un groupe algébrique semi-simple connexe et M un G -module rationnel de dimension finie presque homogène et non réduit à (0) . On note x un point de M dont l'orbite $G(x)$ est ouverte dans M .

Soit X une variété affine; par dimension de X , on entend le maximum des dimensions des composantes irréductibles de X . Si X est irréductible et F est un fermé de X , on dit que F est de codimension p dans X si $\dim F = \dim X - p$.

- PROPOSITION 3.** (i) $M - G(x)$ est un fermé de codimension > 1 dans M .
 (ii) $G(x)$ n'est pas affine.
 (iii) G_x n'est pas réductif.

Preuve. Les assertions (ii) et (iii) sont équivalentes en vertu d'un théorème de Matsushima (cf. [4]); (i) implique (ii) puisque le complémentaire d'un ouvert affine de M , s'il n'est pas vide, est toujours de codimension 1 dans M ; enfin (i) résulte de [5] lemme 4.

Remarque. L'affirmation (iii) de la proposition 3 est démontrée dans [6].

PROPOSITION 4. *Le groupe G_x est connexe.*

Preuve. Le morphisme canonique $p: G/G_x^0 \rightarrow G/G_x$ est un revêtement étale connexe de la variété G/G_x qui est isomorphe à la variété $G(x) \subset M$. Le fermé $M - G(x)$ étant de codimension > 1 dans M (proposition 3), on sait (cf. [8] exposé X) qu'il existe une équivalence entre la catégorie des revêtements étals de G/G_x et celle des revêtements étals de M . Le morphisme p est ainsi un isomorphisme et par suite $G_x = G_x^0$.

LEMME 3. *Soit H un groupe algébrique affine opérant dans deux variétés affines irréductibles X et Y . On fait opérer H dans $Y \times X$ par le produit des actions de H dans Y et X . On suppose de plus qu'il existe un point $x \in X$ dont l'orbite $H(x)$ est ouverte dans X . Alors, pour tout fermé G_x -stable Z de Y , on a:*

$$(i) \overline{H(Z \times \{x\})} \cap (Y \times \{x\}) = Z \times \{x\};$$

$$(ii) \text{ si } Z \text{ est de codimension } p \text{ dans } Y, \overline{H(Z \times \{x\})} \text{ est de codimension } p \text{ dans } Y \times X.$$

Preuve. Soit pr_2 la projection de $Y \times X$ sur X ; on vérifie facilement que $pr_2: H(Z \times \{x\}) \rightarrow H(x)$ est un fibré localement trivial (au sens étale) de fibre type Z , c'est-à-dire qu'il existe une variété U et un morphisme $U \rightarrow H(x)$ étale et surjectif tel que $U \times (Z \times \{x\}) \simeq U \times_{H(x)} H(Z \times \{x\})$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & U \times (Z \times \{x\}) & \xrightarrow{\quad} & H(Z \times \{x\}) & \\ \swarrow U & \downarrow & \nearrow H(x) & \downarrow & \\ U \times (Y \times \{x\}) & \xrightarrow{\quad} & H(Y \times \{x\}) & & \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des morphismes étals et surjectifs, et où les variétés $U \times (Z \times \{x\})$ et $U \times (Y \times \{x\})$ s'identifient aux produits fibrés correspondants. Il en résulte que

$$\begin{aligned} \dim H(Z \times \{x\}) &= \dim U + \dim Z = \dim H(x) + \dim Z \\ &= \dim X + \dim Z \end{aligned}$$

et que $H(Z \times \{x\})$ est fermé dans $H(Y \times \{x\})$. Les affirmations du lemme sont dès lors claires.

PROPOSITION 5. *Le groupe des caractères de G_x est trivial.*

Preuve. Soit χ un caractère de G_x ; on sait qu'il existe un G -module rationnel N de dimension finie et une forme linéaire f sur N tels que $s \cdot f = \chi(s)f$ pour tout $s \in G_x$ (cf. [2]). On note Z l'hyperplan de N annulé par f et on fait opérer G dans $N \times M$ par le produit des actions de G dans N et M . On considère alors $\overline{G(Z \times \{x\})} \subset N \times M$; $\overline{G(Z \times \{x\})}$ est un fermé irréductible de codimension 1 dans $N \times M$, stable par G et tel que $\overline{G(Z \times \{x\})} \cap N \times \{x\} = Z \times \{x\}$ (lemme 3). L'idéal de $\overline{G(Z \times \{x\})}$ est principal et est engendré par une fonction polynomiale G -invariante a sur $N \times M$ (puisque G est semi-simple et connexe); de plus, la restriction b de a à $N \times \{x\}$ est G_x -invariante et s'annule exactement sur $Z \times \{x\}$. Il en résulte qu'il existe un entier n et une constante $\lambda \neq 0$ tels que $b = \lambda(f_x)^n$, où f_x est la fonction sur $N \times \{x\}$ correspondant à f . On a alors pour tout $s \in G_x$

$$s \cdot b = \lambda(s \cdot f_x)^n$$

d'où

$$b = \lambda(f_x)^n = \lambda(\chi(s))^n (f_x)^n.$$

Ainsi $(\chi)^n = 1$; sachant que G_x est connexe (proposition 4) on a bien $\chi = 1$.

THÉORÈME 2. *Le sous-groupe d'isotropie G_x d'un point x de l'orbite ouverte de G dans M est un groupe non réductif connexe produit semi-direct d'un sous-groupe semi-simple connexe par son radical unipotent.*

Preuve. Les propositions 3 et 4 affirment que G_x est non réductif et connexe. On considère alors le groupe G_x/R où R est le radical unipotent de G_x ; G_x/R est un groupe réductif connexe dont le groupe des caractères est isomorphe au groupe des caractères de G_x qui est trivial (proposition 5). Il en résulte facilement que G_x/R est semi-simple, ce qui achève la démonstration.

Remarques. 1) Si G opère presque transitivement et non transitivement dans une variété affine X vérifiant les deux conditions

- (i) $k[X]$ est un anneau factoriel,
- (ii) tout revêtement étale connexe de X est trivial,

alors les affirmations du théorème 2 sont encore visiblement vraies.

2) Le radical unipotent de G_x n'est pas nécessairement commutatif, comme le montre l'exemple du $Sp(n)$ -module usuel de dimension $2n$.

§4. Démonstration du Théorème 3

Le théorème 3 est une conséquence des théorèmes 1 et 2: le théorème 1 donne le résultat lorsque l'indice de la représentation est égal à 1, et transforme le problème en le problème analogue pour les modules presque homogènes lorsque l'indice est

différent de 1, le groupe étant cette fois semi-simple; le théorème 2 fournit l'affirmation dans ce dernier cas.

Remarque. Soit M_1 le $SL(n)$ -module usuel de dimension n . L'exemple du $SL(n) \times SL(n)$ -module $(M_1 \otimes k) \oplus (k \otimes \mathfrak{sl}(n))$ (où $SL(n)$ opère dans $\mathfrak{sl}(n)$ par la représentation adjointe) et d'autres exemples du même type, montrent que le théorème 3 ne s'étend pas tel quel au cas des groupes semi-simples.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANDREEV, E. M., VINBERG, E. B., et ÉLASHVILI, A. G., *Orbits of greatest dimension in semi-simple linear Lie groups*, Funkcional. Anal. i Priložen 1 (1967), 3–7; English transl. Functional Anal. Appl. 1 (1967), 257–261.
- [2] BIALYNICKI-BIRULA, A., HOCHSCHILD, G., et MOSTOW, G. D., *Extensions of representations of algebraic linear groups*, Amer. J. Math. 85 (1963), 131–144.
- [3] ÉLASHVILI, A. G., *Canonical form and stationary subalgebras of points of general position for simple linear Lie groups*, Funkcional. Anal. i Priložen 6 (1972), 51–62; English transl. Functional Anal. Appl. 6 (1972), 44–53.
- [4] LUNA, D., *Slices étales*, Bull. Soc. math. France, Mémoire 33 (1973), 81–105.
- [5] LUNA, D. et VUST, TH., *Un théorème sur les orbites affines des groupes algébriques semi-simples*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 27 (1973), 527–535.
- [6] POPOV, V. L., *Stability criteria for the action of a semi-simple group on a factorial manifold*, Izv. Akad. Nauk. S.S.R., Ser. Mat. 34 (1970), 523–531; English transl. Math. U.S.S.R.-Izvestija 4 (1970), 527–535.
- [7] RICHARDSON, R. W. jr., *Principal orbit types for algebraic transformation spaces in characteristic zero*, Inventiones math. 16 (1972), 6–14.
- [8] Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960/61, *Revêtements étales et groupe fondamental* (SGA 1), un séminaire dirigé par A. Grothendieck, Lecture notes in mathematics, vol. 224, Berlin-Heidelberg-New-York, Springer Verlag (1971).

*Université scientifique et médicale de Grenoble
Institut de mathématiques pures associé au CNRS
Boîte postale 116
38402-Saint-Martin-d'Hères*

Reçu le 28 janvier 1974