

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 49 (1974)

**Artikel:** Sur la variation de la mesure de l'image d'un ensemble compact  
**Autor:** Holy, Jean-Claude  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-37998>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sur la variation de la mesure de l'image d'un ensemble compact

JEAN-CLAUDE HOLY

## 1. Introduction

Soit  $f$  une application de  $R^m$  dans  $R^p$ ,  $m \geq 1, p \geq 1$ , de classe  $C^j$ ,  $j \geq 1$ , et  $K$  un compact contenu dans  $R^m$ .

Nous nous proposons d'étudier la variation de la mesure  $|f(K)|$  de l'image  $f(K)$  du compact  $K \subset R^m$ , en fonction de  $f$  pour la  $C^1$ -topologie uniforme, l'ensemble  $K$  étant supposé fixe.

Dans cette note, nous établissons des conditions suffisantes relativement à  $f$  et au compact  $K$  pour que  $|f(K)|$  varie continûment en fonction de  $f$ . Des problèmes analogues ont déjà été abordés dans le cas où  $f$  est une projection parallèle de  $R^2$  sur  $R^1$ .

En particulier, S. Mazurkiewicz et S. Saks [5] ont construit un exemple d'un ensemble compact  $F \subset R^2$ , jouissant de la propriété suivante: la projection de  $F$  sur l'axe des abscisses constitue un segment et sur toute autre droite passant par l'origine est un ensemble de mesure nulle. Désignons alors par  $p_0$  la projection orthogonale de  $R^2$  sur  $R^1$  et par  $p_\theta$  la projection parallèle de  $R^2$  sur  $R^1$  dont la direction fait un angle  $\theta$  avec celle de  $p_0$ . Dans l'exemple ci-dessus  $p_\theta$  converge vers  $p_0$  pour la  $C^\infty$ -topologie uniforme sur tout ouvert borné  $G \supset F$  lorsque  $\theta \rightarrow 0$ , mais la fonction  $p_\theta(F)$  est discontinue au point  $\theta=0$ .

W. Sierpinski, d'autre part, a démontré le résultat suivant [9]: Soit  $P$  un ensemble compact dans  $R^2$ . Désignons par  $m(P; \varphi)$  la mesure de la projection de  $P$  sur la droite faisant l'angle  $\varphi$  avec l'axe des abscisses. La fonction  $m(P; \varphi)$  est *semi-continue supérieurement par rapport à  $\varphi$* .

L'exemple de Saks-Mazurkiewicz et le théorème de Sierpinski admettent des généralisations à l'espace  $R^m$ ,  $m > 2$ .

L'application  $f$  est alors de classe  $C^\infty$  et se réduit à une projection parallèle qui applique  $R^m$  sur  $R^p$  avec  $p = m - 1$ . Les ensembles considérés sont seulement supposés compacts.

*Nous distinguerons les trois cas suivants:*

1)  $m = p \geq 1$ . Nous montrons qu'il suffit de supposer  $f$  de classe  $C^1$  pour que  $|f(K)|$  soit fonction continue de  $f$ . On ne fait aucune hypothèse supplémentaire sur le compact  $K$  (Th. 1).

2)  $m < p$ . Les hypothèses sur  $f$  et  $K$  sont les mêmes qu'au No. 1 et on obtient un résultat semblable au théorème (1) en faisant usage de la  $m$ -mesure de Hausdorff [1].

3)  $m > p \geq 1$ . Lorsque la dimension de la source est supérieure à celle du but, il est nécessaire de poser des hypothèses relatives à la structure de  $K$  et à la classe de  $f$ , plus fortes que celles du No. 1. pour que  $|f(K)|$  soit fonction continue de  $f$ .

Nous traitons le cas  $m=p$ , Th. (1) et démontrerons dans une note ultérieure les résultats correspondants pour  $m > p$  et  $m < p$ .

## 2. Énonces des résultats

Nous démontrerons le théorème suivant:

**THÉORÈME (1).** *Soit  $f$  une application d'un ouvert  $G$  de  $R^m$  dans  $R^m$ . Supposons  $f$  de classe  $C^1$ . Soit  $K$  un ensemble compact contenu dans  $G$ . Alors si  $\{f_n\}$ , ( $n=1, 2, \dots$ ), est une suite d'applications de  $G$  dans  $R^m$ , de classe  $C^1$ , qui convergent vers  $f$  pour la  $C^1$ -topologie uniforme sur  $G$ , on a l'égalité:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(K)| = |f(K)|. \quad (1)$$

Cela signifie que la fonction  $|f(K)|$  est continue pour la  $C^1$ -topologie uniforme en tout point  $f$  de classe  $C^j$ ,  $j \geq 1$ , de l'espace fonctionnel des applications de classe  $C^1$  de  $R^m$  dans  $R^m$ .

Rappelons qu'une suite d'applications  $\{f_n\}$ , ( $n=1, 2, \dots$ ), de classe  $C^j$ ,  $j \geq 1$ , converge vers  $f$  pour la  $C^j$ -topologie uniforme sur  $G \subset R^m$  si  $f_n$  ainsi que toutes ses dérivées partielles d'ordre  $\leq j$  convergent uniformément respectivement vers  $f$  et les dérivées partielles correspondantes de  $f$  sur  $G$ .

### *Idée de la démonstration*

On démontre le théorème (1) en établissant les deux inégalités suivantes:

$$\text{a) } \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} |f_n(K)| \leq |f(K)|, \quad \text{b) } \underline{\lim_{n \rightarrow \infty}} |f_n(K)| \geq |f(K)| \quad (2)$$

Pour obtenir la première on se base sur le fait que  $f(K)$  est compact. Il suffit de supposer que  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $G$ .

(3) Pour démontrer le seconde, on considère les trois ensembles  $E_1, E_2, E_3$  suivants contenus dans  $K$ :

- 1)  $E_1$  = l'ensemble des points de  $K$ , critiques pour l'application  $f$ . [6], [7].
- 2)  $E_2$  = l'ensemble  $K - E_1$ .
- 3)  $E_3$  = l'ensemble des points de densité de  $E_2$ .

En faisant essentiellement usage de la classe des applications, du paramètre de régularité de  $K$ , ainsi que du théorème de recouvrement de Vitali, on montre que:

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} |f_n(E_3)| \geq |f(K)| \quad (4)$$

ce qui implique:

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} |f_n(K)| \geq |f(K)|. \quad (5)$$

### 3. Démonstration du théorème (1)

LEMME (1.1). *Soit  $f(x)$  une application continue d'un ouvert  $G$  de  $R^m$  dans  $R^p$ ,  $m \geq p \geq 1$  et  $\{f_n\}$ , ( $n=1, 2, \dots$ ) une suite d'applications continues de  $G$  dans  $R^p$ , qui convergent uniformément vers  $f$  sur  $G$ . Pour tout compact  $K \subset G$  on a:*

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} |f_n(K)| \leq |f(K)|. \quad (6)$$

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ , arbitrairement petit; il existe un recouvrement ouvert  $R'$  de  $f(K)$  par des  $p$ -cubes  $E'_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) tel que:

$$\left| |f(K)| - \sum_{i=1}^{\infty} |E'_i| \right| < \varepsilon.$$

L'ensemble  $f(K)$  est compact, car  $K$  est compact et  $f$  continue. On peut alors extraire de  $R'$  un recouvrement ouvert fini  $\{E'_{k_1}, \dots, E'_{k_M}\}$ . Les ensembles  $E_{k_i} = f^{-1}(E'_{k_i})$ , ( $i=1, 2, \dots, M$ ) constituent un recouvrement ouvert fini de  $K$ . Soit alors  $R''$  le recouvrement ouvert fini que l'on déduit de  $R'$  en faisant correspondre à chaque cube  $E'_{k_i}$  le cube  $E''_{k_i}$  homothétique à  $E'_{k_i}$ , le centre de cette homothétie étant le centre de  $E'_{k_i}$ . La constante  $k > 1$ , d'homothétie peut être choisie de telle manière que:  $E''_{k_i} \supset E'_{k_i}$  et  $|E''_{k_i}| \leq (1 + \varepsilon) |E'_{k_i}|$ .

On a par suite:

$$\sum_{i=1}^M |E''_{k_i}| \leq (1 + \varepsilon) (|f(K)| + \varepsilon).$$

Comme  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $G$ , il en résulte que pour  $n$  assez grand,  $n > N(\varepsilon)$ , l'image de chaque  $E_{k_i}$  ( $i=1, \dots, M$ ), par  $f_n$  sera contenue entièrement dans l'ensemble  $E''_{k_i}$ . Puisque les  $E_{k_i}$  recouvrent  $K$  il vient:

$$f_n(K) \subset \bigcup_{i=1}^M E''_{k_i} \quad \text{pour tout } n > N(\varepsilon).$$

Cela entraîne que:

$$|f_n(K)| \leq \left| \bigcup_{i=1}^M E''_{k_i} \right| \leq \sum_{i=1}^M |E''_{k_i}| \leq (1 + \varepsilon) (|f(K)| + \varepsilon)$$

pour tout  $n > N(\varepsilon)$ . Par suite:

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} |f_n(K)| \leq (1 + \varepsilon) (|f(K)| + \varepsilon)$$

et comme  $\varepsilon$  est arbitraire on a:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n(K)| \leq |f(K)|. \quad (6)$$

Si

$$|f(K)| = 0$$

on a:

$$0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n(K)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(K)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(K)| = |f(K)|. \quad (7)$$

On montre maintenant que:

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n(K)| \geq |f(K)|. \quad (8)$$

*Démonstration.* Nous supposerons  $|f(K)| \neq 0$ . Considérons les trois ensembles  $E_1, E_2, E_3$  définis plus haut (3).

Alors pour tout  $x \in E_3$ , il existe une boule  $B(x, \varrho)$  ouverte, centrée en  $x$  et de rayon  $\varrho > 0$ , telle que la restriction de  $f$  à cette boule soit un difféomorphisme de classe  $C^1$ . Cela résulte directement du théorème des fonctions implicites.

Soit  $\overline{f(E_3)}$  l'ensemble des points de densité de  $f(E_3)$  et  $\varepsilon > 0$ , arbitrairement petit.

Si  $y = f(x)$  et si  $y \in \overline{f(E_3)}$ , il existe une suite de cubes fermés  $K'_{y,i}$ , centrés en  $y$  et tels que l'on ait:

$$1) \frac{|K'_{y,i} \cap f(E_3 \cap B(x, \varrho))|}{|K'_{y,i}|} > 1 - \varepsilon, \quad \forall i. \quad (9)$$

$$2) K'_{y,i} \subset f(B(x, \varrho)),$$

$$3) \delta(K'_{y,i}) \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty.$$

**DÉFINITION.** Le paramètre de régularité  $r(E)$  d'un ensemble  $E \subset R^m$  est la borne supérieure des nombres  $|E|/|J|$  où  $J$  désigne un cube quelconque contenant  $E$ . Nous dirons qu'une suite  $\{E_n\}$  d'ensembles est régulière s'il existe un  $\alpha > 0$  tel que l'on ait  $r(E_n) > \alpha$  pour  $n = 1, 2, \dots$ .

**DÉFINITION.** Nous dirons qu'une famille  $F$  d'ensembles recouvre un ensemble  $E$  au sens de Vitali, si pour tout  $x \in E$  il existe une suite régulière d'ensembles de  $F$  contenant tous  $x$ , qui converge vers  $x$ .

Rappelons encore le théorème de recouvrement de Vitali [4]:

**THÉORÈME.** Soit  $E \subset R^m$  et  $F$  une famille d'ensembles fermés qui recouvre  $E$  au sens de Vitali. Alors on peut extraire de  $F$  une suite finie ou dénombrable  $\{E_n\}$  d'en-

semblent deux-à-deux disjoints tels que:

$$\left| E - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right| = 0. \quad (10)$$

Les ensembles  $K'_{y,i}$  recouvrent  $\overline{f(E_3)}$  au sens de Vitali, et d'après le théorème de Vitali, il existe une suite de cubes fermés  $K'_{y,i}$ , deux-à-deux disjoints, tels que:

$$\left| \overline{f(E_3)} - \bigcup_{y,i} K'_{y,i} \right| = 0. \quad (11)$$

On peut alors trouver un nombre fini de cubes  $K'_{y,i}$ , ( $y, i$ ) parcourant un ensemble fini  $I$ , de telle manière que l'on ait:

$$\left| \overline{f(E_3)} - \bigcup_{(y,i) \in I} K'_{y,i} \right| < \varepsilon |\overline{f(E_3)}|. \quad (12)$$

A chaque cube  $K'_{y,i}$  on peut faire correspondre, au moyen d'une homothétie de centre  $y$  et de rapport  $k > 1$ , un cube  $K'^*_{y,i} \supset K'_{y,i}$ .

Le rapport  $k$  peut être choisi de telle sorte que les  $K'^*_{y,i}$  n'empiètent que sur un ensemble dont la mesure ne dépasse pas

$$\varepsilon \left| \bigcup_I K'_{y,i} \right|. \quad (13)$$

Soit

$$K_{x,i} = f^{-1}(K'_{y,i}) \cap B(x, \varrho): \quad (14)$$

désignons par  $W_{x,i}$  l'ensemble  $K_{x,i} \cap E_3$ .

Comme  $f_n$  converge vers  $f$  pour la  $C^1$ -topologie uniforme sur  $G$ , il existe un  $n_0$  tel que si  $n > n_0$  on ait:

$$f_n(K_{x,i}) \subset K'^*_{y,i} \quad \text{et par suite} \quad f_n(W_{x,i}) \subset K'^*_{y,i}. \quad (15)$$

$$|f_n(W_{x,i})| \geq (1 - \varepsilon) |f(W_{x,i})|. \quad (16)$$

La deuxième inégalité résulte du fait que

$$|f_n(W_{x,i})| = \int_{W_{x,i}} \phi_n \, dx_1 \dots dx_n$$

et

$$|f(W_{x,i})| = \int_{W_{x,i}} \phi \, dx_1 \dots dx_n,$$

où  $\phi_n$  et  $\phi$  désignent respectivement la valeur absolue des Jacobiens de  $f_n$  et de  $f$ .

Comme  $\phi_n$  converge uniformément vers  $\phi$  il vient:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(W_{x,i})| = |f(W_{x,i})|$$

et l'inégalité (16) est vérifiée.

De (9), et (14) on déduit:

$$|f(W_{x,i})| \geq (1-\varepsilon) |K'_{y,i}|, \quad (17)$$

ce qui, combiné avec (16) nous donne:

$$|f_n(W_{x,i})| \geq (1-\varepsilon)^2 |K'_{y,i}|, \quad n > n_0. \quad (18)$$

De (13) il découle:

$$\left| f_n \left( \bigcup_I W_{x,i} \right) \right| \geq (1-\varepsilon)^2 \sum_I |K'_{y,i}| - \varepsilon \sum_I |K'_{y,i}| = ((1-\varepsilon)^2 - \varepsilon) \sum_I |K'_{y,i}|,$$

(12) implique:

$$\sum_I |K'_{y,i}| \geq (1-\varepsilon) \overline{|f(E_3)|},$$

d'où l'on déduit:

$$\left| f_n \left( \bigcup_I W_{x,i} \right) \right| \geq ((1-\varepsilon)^2 - \varepsilon) (1-\varepsilon) \overline{|f(E_3)|}; \quad (19)$$

or:

$$\overline{|f(E_3)|} = |f(K)|;$$

en effet:  $K = E_1 \cup (E_2 - E_3) \cup E_3$

d'où

$$|f(K)| \leq |f(E_1)| + |f(E_2 - E_3)| + |f(E_3)|.$$

On a de plus:

$$|f(E_1)| = 0, \quad (20)$$

car  $f$  est  $C^1$  [6].

$$|f(E_2 - E_3)| = 0, \quad (21)$$

car l'ensemble  $E_2 - E_3$  est uniquement constitué de points de raréfaction; donc  $|E_2 - E_3| = 0$  et comme  $f$  est lipschitzienne sur  $G$  cela implique (21). On a donc  $|f(K)| \leq |f(E_3)|$  et puisque  $E_3 \subset K$ , il vient:  $|f(E_3)| \leq |f(K)|$ , d'où  $|f(E_3)| = |f(K)|$ .

Comme  $|f(E_3)| = \overline{|f(E_3)|}$  on a bien:  $|f(K)| = \overline{|f(E_3)|}$ .

On peut donc écrire, pour tout  $n > n_0$ :

$$|f_n(\bigcup_I W_{x,i})| \geq ((1-\varepsilon)^2 - \varepsilon) (1-\varepsilon) |f(K)|,$$

et puisque

$$\bigcup_I W_{x,i} \subset K,$$

on a:

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} |f_n(K)| \geq ((1-\varepsilon)^2 - \varepsilon) (1-\varepsilon) |f(K)|,$$

$\varepsilon$  étant arbitraire on a:

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} |f_n(K)| \geq |f(K)|.$$

En appliquant l'inégalité (6) il vient:

$$|f(K)| \geq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} |f_n(K)| \geq \varliminf_{n \rightarrow \infty} |f_n(K)| \geq |f(K)| \quad (22)$$

d'où

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} |f_n(K)| = \varliminf_{n \rightarrow \infty} |f_n(K)| = \varlimsup_{n \rightarrow \infty} |f_n(K)| = |f(K)|.$$

*Remarques.* a) si  $|K|=0$  on a  $|f(K)|=0$ ,  $f$  étant lipschitzienne sur  $G$ , et par suite, en appliquant (22) on a bien:

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} |f_n(K)| = |f(K)| = 0.$$

b) Si tout  $x \in K$  est critique pour  $f$ , alors d'après le théorème de Sard [6], on a  $|f(K)|=0$  et le théorème (1) reste vrai.

4. En faisant usage de techniques semblables à celles que l'on utilise pour démontrer le théorème (1), on obtient les théorèmes suivants, respectivement pour les cas  $m < p$  et  $m > p$ :

**THÉORÈME (2).** *Soit  $f$  une application d'un ouvert  $G$  de  $R^m$  dans  $R^p$ ,  $p > m \geq 1$ , de classe  $C^j$ ,  $j \geq 1$ , et  $K$  un compact contenu dans  $G$ . Soit  $\{f_n\}$ ,  $(n=1, 2, \dots)$  une suite d'applications qui convergent vers  $f$  pour la  $C^1$ -topologie uniforme sur  $G$ .*

On a:

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} m_m(f_n(K)) = m_m(f(K)).$$

$m_m(A)$  désigne la  $m$ -mesure de  $A$  au sens de Hausdorff [1].

THÉORÈME (3). Soit  $f$  une application d'un ouvert  $G$  de  $R^m$  dans  $R^p$ ,  $m > p \geq 1$ , de classe  $C^j$ ,  $j \geq m-p+1$ . Soit  $K$  un compact contenu dans  $G$ , jouissant de la propriété (H): pour tout  $x \in K$  il existe une suite régulière au sens de Vitali [4], d'ensembles contenus dans  $K$ , et qui converge vers  $x$ .

Alors si  $\{f_n\}$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ) est une suite d'applications de  $G$  dans  $R^p$ , de classe  $C^1$  qui convergent vers  $f$  pour la  $C^1$ -topologie uniforme sur  $G$ , on a l'égalité:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(K)| = |f(K)|.$$

La fonction  $|f(K)|$  est continue pour la  $C^1$ -topologie uniforme en tout point  $f$  de classe  $C^j$ ,  $j \geq m-p+1$ , de l'espace fonctionnel des applications de  $R^m$  dans  $R^p$ .

Dans une note ultérieure, nous montrons, au moyen d'un contre-exemple, [2] que l'hypothèse faite sur la classe de  $f$  est nécessaire et ne peut être améliorée.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] HAUSDORFF, F., *Dimension und ausseres Mass*, Mathematische Annalen 79 (1917-19), 157-179.
- [2] HOLY, J. C., *Sur l'ensemble des valeurs stationnaires d'une application différentiable*, Comment. Math. Helv. 41 (1966-67), 157-169.
- [3] DE RHAM, G., *Celebrazioni archimedee del Secolo XX*, Siracusa 11-16 Aprile 1961 vol. II.
- [4] SAKS, S., *Theory of the integral*, Hafner Publishing Company New York.
- [5] SAKS, S. et MAZURKIEWICZ, S., *Sur les projections d'un ensemble fermé*, Fundamenta Mathematicae VIII (1926), 109-113.
- [6] SARD, A., *The measure of critical values of differential maps*, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), 883-890.
- [7] —, *Images of critical sets*, Ann. of Math. 68 (1958), 247-259.
- [8] —, *The equivalence of  $n$ -measure and Lebesgue measure in  $E^n$* , Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1943), 758-759.
- [9] SIERPINSKI, W., (c.f. S. Mazurkiewicz et S. Saks), *Sur les projections d'un ensemble fermé*, Fund. Math. VIII (1926), 109-113.
- [10] WHITNEY, H., *A function not constant on a connected set of critical points*, Duke. Math. J. 1 (1935), 514-517.

École d'Architecture de l'Université  
1200 Genève

Reçu le 8 juillet 1973.