

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	49 (1974)
<b>Artikel:</b>	Algèbres Graduées Associées et Algèbres Symétriques Plates
<b>Autor:</b>	André, Michel
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-37995">https://doi.org/10.5169/seals-37995</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Algèbres Graduées Associées et Algèbres Symétriques Plates

MICHEL ANDRÉ

Il s'agit d'un travail sur l'homologie et la cohomologie des algèbres commutatives. Pour un anneau  $A$  quelconque et pour un idéal  $I$  quelconque, les résultats suivants seront démontrés.

L'idéal  $I$  est dit *symétriquement quasi-régulier* si le  $A/I$ -module  $I/I^2$  est plat et si l'algèbre symétrique de ce module est canoniquement isomorphe à la  $A/I$ -algèbre graduée commutative  $\bigoplus I^s/I^{s+1}$ .

**PROPOSITION A.** *Les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

- 1) *l'idéal  $I$  est symétriquement quasi-régulier,*
- 2) *pour tout entier  $k \geq 1$  et pour tout  $A/I$ -module  $W$ , il existe un entier  $t$  donnant un homomorphisme canonique nul*

$$H_2(A/I^{k+t}, A/I, W) \rightarrow H_2(A/I^k, A/I, W),$$

- 3) *pour tout entier  $k \geq 1$ , pour tout  $A/I$ -module  $W$  et pour tout entier  $n \geq 2$ , l'homomorphisme canonique suivant est nul*

$$H_n(A/I^{k+n-1}, A/I, W) \rightarrow H_n(A/I^k, A/I, W).$$

**COROLLAIRE A.** *L'idéal  $I$  est symétriquement quasi-régulier si le module  $H_2(A, A/I, W)$  est nul pour tout  $A/I$ -module  $W$ .*

L'idéal  $I$  est dit *extérieurement quasi-régulier* si le  $A/I$ -module  $I/I^2$  est plat et si l'algèbre extérieure de ce module est canoniquement isomorphe à la  $A/I$ -algèbre graduée anticommutative  $\bigoplus \text{Tor}_s^A(A/I, A/I)$ .

**THÉORÈME A.** *Les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

- 1) *l'idéal  $I$  est extérieurement quasi-régulier,*
- 2) *pour tout  $A/I$ -module  $W$  et pour tout entier  $n \geq 2$ , le module  $H_n(A, A/I, W)$  est nul,*
- 3) *l'idéal  $I$  est symétriquement quasi-régulier, de plus il s'agit d'un idéal d'Artin-Rees.*

L'idéal  $I$  est dit d'Artin-Rees si la condition suivante est satisfaite. Pour tout entier  $k \geq 1$  et pour tout entier  $n \geq 1$ , il existe un entier  $t$  donnant un homomorphisme canonique nul

$$\text{Tor}_n^A(A/I^{k+t}, A/I) \rightarrow \text{Tor}_n^A(A/I^k, A/I).$$

Cette condition est toujours satisfaite lorsque l'anneau  $A$  est *noethérien*. On le constate à l'aide du lemme d'Artin-Rees appliqué à une résolution libre du  $A$ -module  $A/I$ , résolution choisie de type fini en chaque degré.

L'idéal  $I$  est dit *symétriquement régulier* s'il est symétriquement quasi-régulier et si le  $A/I$ -module  $I/I^2$  est projectif.

**PROPOSITION B.** *Les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

- 1) *l'idéal  $I$  est symétriquement régulier,*
- 2) *pour tout entier  $k \geq 1$  et pour tout  $A/I$ -module  $W$ , il existe un entier  $t$  donnant un homomorphisme canonique nul*

$$H^2(A/I^k, A/I, W) \rightarrow H^2(A/I^{k+t}, A/I, W),$$

- 3) *pour tout entier  $k \geq 1$ , pour tout  $A/I$ -module  $W$  et pour tout entier  $n \geq 2$ , l'homomorphisme canonique suivant est nul*

$$H^n(A/I^k, A/I, W) \rightarrow H^n(A/I^{k+n-1}, A/I, W).$$

**COROLLAIRE B.** *L'idéal  $I$  est symétriquement régulier si le module  $H^2(A, A/I, W)$  est nul pour tout  $A/I$ -module  $W$ .*

L'idéal  $I$  est dit *extérieurement régulier* s'il est extérieurement quasi-régulier et si le  $A/I$ -module  $I/I^2$  est projectif.

**THÉORÈME B.** *Les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

- 1) *l'idéal  $I$  est extérieurement régulier,*
- 2) *pour tout  $A/I$ -module  $W$  et pour tout entier  $n \geq 2$ , le module  $H^n(A, A/I, W)$  est nul,*
- 3) *l'idéal  $I$  est symétriquement régulier, de plus il s'agit d'un idéal d'Artin-Rees.*

Considérons maintenant une  $B$ -algèbre  $C$  supposée plate et noethérienne. Par définition, le morphisme

$$\mathrm{Spec} C \rightarrow \mathrm{Spec} B$$

est *régulier* si pour tout idéal premier  $Q$  de  $C$ , la  $B$ -algèbre locale  $C_Q$  est formellement lisse pour son idéal maximal.

**PROPOSITION C.** *Les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

- 1) *le morphisme  $\mathrm{Spec} C \rightarrow \mathrm{Spec} B$  est régulier,*
- 2) *pour tout  $C$ -module  $W$  et pour tout entier  $n \geq 1$ , le module  $H_n(B, C, W)$  est nul,*
- 3) *le module des différentielles de Kaehler  $\Omega_{C/B}$  est un  $C$ -module plat et son algèbre extérieure est canoniquement isomorphe à la  $C$ -algèbre graduée anticommutative*

$$\oplus \mathrm{Tor}_s^{C \otimes_B C}(C, C).$$

*En outre les modules de cohomologie ne sont pas nuls en général.*

Dans les théorèmes A et B l'équivalence des deux premières conditions est due à *D. Quillen*. D'ailleurs par la suite on utilisera fortement un théorème de convergence qui lui est dû. Les références simples concernent le présent travail et les références doubles concernent mon livre: Homologie des algèbres commutatives – Springer Verlag. Les résultats de la partie B sont présentés ici comme corollaires des résultats de la partie A. Dans le livre en question les résultats de la partie B sont démontrés de manière directe. Ces démonstrations peuvent servir d'introduction pour le présent travail.

Pour conclure remarquons que la deuxième condition de la première proposition peut s'exprimer de manière plus explicite.

*Remarque D.* Considérons à nouveau un anneau  $A$  et un idéal  $I$  et supposons plat le  $A/I$ -module  $I/I^2$ . Puis considérons le carré symétrique du  $A$ -module  $I$

$$S^2 = I \otimes_A I / t(I \otimes_A I) \quad \text{avec} \quad t(x \otimes y) = x \otimes y - y \otimes x.$$

Enfin considérons l'épimorphisme dû au produit

$$\pi: S^2 \rightarrow I^2.$$

Alors l'idéal  $I$  est symétriquement quasi-régulier si et seulement si le noyau de  $\pi$  est contenu dans tous les sous-modules  $I^n S^2$ .

## Morphismes réguliers

Commençons par démontrer la partie C des résultats et cela partiellement à l'aide de la partie A.

Considérons une  $B$ -algèbre  $C$  plate et noethérienne. Dénotons par  $Q$  un idéal premier quelconque de  $C$ , par  $P$  l'idéal premier correspondant de  $B$ , enfin par  $k(P)$  et  $k(Q)$  les corps résiduels des anneaux locaux  $B_P$  et  $C_Q$ .

Par définition la  $B$ -algèbre locale et noethérienne  $C_Q$  est formellement lisse pour son idéal maximal  $QC_Q$  si et seulement si le module suivant est nul

$$H^1(B, C_Q, k(Q)) \cong \varinjlim H^1(B, C_Q/Q^k C_Q, k(Q))$$

(voir le corollaire 10.15, la proposition 16.12 et la définition 16.14) autrement dit si et seulement si le module suivant est nul

$$H_1(B, C, k(Q)) \cong H_1(B, C_Q, k(Q))$$

(voir le lemme 3.21 et le corollaire 5.27).

*Remarque 1.* Utilisons la platitude de la  $B$ -algèbre  $C_Q$  sous la forme d'un isomorphisme (voir la proposition 4.54)

$$H_n(B, C_Q, k(Q)) \cong H_n(k(P), k(P) \otimes_B C_Q, k(Q)).$$

Lorsque la  $B$ -algèbre  $C_Q$  est formellement lisse, alors la  $k(P)$ -algèbre  $k(P) \otimes_B C_Q$  est formellement lisse. Par conséquent (voir la proposition 7.23) le module ci-dessus est nul pour  $n$  non nul. En résumé, la condition suivante est satisfaite

$$H_n(B, C, k(Q)) \cong 0 \quad \text{avec } n \neq 0 \quad \text{et} \quad Q \in \text{Spec } C$$

dans le cas d'un morphisme régulier.

**LEMME 2.** *Soit un idéal premier  $Q$  d'une  $B$ -algèbre noethérienne  $C$  satisfaisant aux deux conditions suivantes pour un entier  $n$  fixé: d'une part le module  $H_n(B, C, k(Q))$  est nul et d'autre part le module  $H_{n+1}(B, C, C/Q)$  est nul pour tout idéal premier  $\bar{Q}$  contenant strictement  $Q$ . Alors le module  $H_n(B, C, C/Q)$  est nul.*

*Démonstration.* Soit  $f$  un élément de  $C - Q$ . Considérons le module  $W$  égal à  $C/Q + fC$ . L'anneau  $C$  étant noethérien, il existe une suite de décomposition

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{k-1} \subset W_k = W$$

donnant lieu à des isomorphismes  $W_i/W_{i-1} \cong C/Q_i$ , l'idéal premier  $Q_i$  contenant strictement  $Q$ . Par suite (voir le lemme 3.22) la seconde partie de l'hypothèse implique que l'on a un module nul

$$H_{n+1}(B, C, C/Q + fC) \cong 0$$

autrement dit un monomorphisme

$$f: H_n(B, C, C/Q) \rightarrow H_n(B, C, C/Q)$$

qui découle de la suite exacte

$$0 \rightarrow C/Q \xrightarrow{f} C/Q \rightarrow C/Q + fC \rightarrow 0.$$

Cela a lieu pour chaque  $f$  de  $C - Q$ , on obtient donc un monomorphisme

$$H_n(B, C, C/Q) \rightarrow H_n(B, C, C/Q)_Q.$$

Par hypothèse le module suivant est nul

$$H_n(B, C, C/Q)_Q \cong H_n(B, C, (C/Q)_Q) \cong H_n(B, C, k(Q))$$

(voir le corollaire 4.59). Par conséquent le module  $H_n(B, C, C/Q)$  est nul.

**LEMME 3.** *Soit une  $B$ -algèbre  $C$  locale et noethérienne satisfaisant à la condition suivante pour un entier  $n$  fixé:*

$$H_m(B, C, k(Q)) \cong 0 \quad \text{avec } n \leq m \leq n + \dim C \quad \text{et} \quad Q \in \text{Spec } C.$$

*Alors le module  $H_n(B, C, W)$  est nul pour tout  $C$ -module  $W$ .*

*Démonstration.* L'anneau  $C$  est supposé local simplement pour qu'il ait une

dimension finie. Soit  $Q$  un idéal premier de cohauteur  $s$ . Par induction sur  $s$  croissant, le lemme précédent démontre le résultat suivant

$$H_m(B, C, C/Q) \cong 0 \quad n \leq m \leq n-s + \dim C.$$

En particulier le module  $H_n(B, C, C/Q)$  est nul pour tout idéal premier  $Q$ . Par conséquent le module  $H_n(B, C, W)$  est nul pour tout  $W$  de type fini (utiliser le lemme 3.22 pour une bonne suite de décomposition) et même pour tout  $W$  quelconque (utiliser le lemme 3.24 pour les sous-modules de type fini).

Il est possible maintenant de démontrer la proposition C.

*Démonstration 4.* Lorsque le morphisme est régulier, les modules suivants sont nuls d'après la remarque 1

$$H_n(B, C, k(Q)) \cong 0 \quad \text{avec } n \geq 1 \quad \text{et} \quad Q \in \text{Spec } C.$$

Mais alors les modules suivants sont nuls d'après le lemme 3

$$H_n(B, C_Q, W_Q) \cong H_n(B, C, W)_Q.$$

Par conséquent, le module  $H_n(B, C, W)$  est nul pour  $n \neq 0$ . Les deux premières conditions de la proposition sont donc équivalentes.

Appliquons le théorème A dans le cas particulier suivant, pour démontrer que les deux dernières conditions de la proposition sont équivalentes

$$A \cong C \otimes_B C \quad \text{puis} \quad A/I \cong C \quad \text{enfin} \quad I/I^2 \cong \Omega_{C/B}.$$

Comme la première condition du théorème est équivalente à la troisième condition de la proposition, il reste à démontrer que les deux deuxièmes conditions sont équivalentes. Cela est dû aux isomorphismes suivants

$$H_{n+1}(C \otimes_B C, C, W) \cong H_n(C, C \otimes_B C, W) \cong H_n(B, C, W).$$

Le premier isomorphisme provient de la suite exacte de Jacobi-Zariski de la  $C$ -algèbre  $C \otimes_B C$  et de la  $C \otimes_B C$ -algèbre  $C$  (voir le théorème 5.1) et le second isomorphisme est dû à la platitude de la  $B$ -algèbre  $C$  (voir la proposition 4.54).

### Premières remarques

Voici les parties élémentaires des démonstrations des résultats A et B.

*Remarque 5.* Dans les démonstrations des résultats A on peut supposer plat le  $A/I$ -module  $I/I^2$  et cela pour les deux raisons suivantes. Considérons une suite exacte de  $A/I$ -modules

$$0 \rightarrow W' \rightarrow W \rightarrow W'' \rightarrow 0.$$

Pour constater la platitude du module lorsque la condition du corollaire est satisfaite

(ou encore la deuxième condition du théorème) on utilise la suite exacte suivante (voir le lemme 3.22)

$$H_2(A, A/I, W'') \rightarrow H_1(A, A/I, W') \rightarrow H_1(A, A/I, W)$$

et l'isomorphisme général suivant (voir la proposition 6.1)

$$H_1(A, A/I, W) \cong I/I^2 \otimes_{A/I} W.$$

Pour constater la platitude du module lorsque la deuxième condition de la proposition est satisfaite, on utilise le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} H_2(A/I^{2+t}, A/I, W'') & \rightarrow & H_1(A/I^{2+t}, A/I, W') & \rightarrow & H_1(A/I^{2+t}, A/I, W) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_2(A/I^2, A/I, W'') & \rightarrow & H_1(A/I^2, A/I, W') & \rightarrow & H_1(A/I^2, A/I, W) \end{array}$$

et les isomorphismes suivants

$$H_1(A/I^{2+t}, A/I, W) \cong I/I^2 \otimes_{A/I} W \cong H_1(A/I^2, A/I, W).$$

Dans les démonstrations des résultats B on peut supposer projectif le  $A/I$ -module  $I/I^2$  et cela pour les deux raisons duales des précédentes.

*Remarque 6.* Par la proposition 6.1 et par les lemmes 3.20 et 3.21, l'hypothèse du corollaire B est équivalente à l'hypothèse du corollaire A avec  $I/I^2$  projectif. De manière évidente, la conclusion du corollaire B est équivalente à la conclusion du corollaire A avec  $I/I^2$  projectif. Par conséquent le corollaire B est un corollaire du corollaire A. Pour des raisons analogues, le théorème B est un corollaire du théorème A. Il reste à considérer la proposition B par rapport à la proposition A.

La première condition de la proposition B est équivalente à la première condition de la proposition A avec  $I/I^2$  projectif. La deuxième condition de la proposition B est équivalente à la deuxième condition de la proposition A avec  $I/I^2$  projectif, grâce à l'isomorphisme du lemme 3.20

$$H_2(A/I^k, A/I, W) \cong H_2(A/I^k, A/I, A/I) \otimes_{A/I} W$$

et grâce à l'isomorphisme du lemme 3.21

$$H^2(A/I^k, A/I, W) \cong \text{Hom}_{A/I}(H_2(A/I^k, A/I, A/I), W).$$

Par conséquent l'équivalence des deux premières conditions de la proposition B est un corollaire de la proposition A.

Supposons satisfaites les deux premières conditions équivalentes de la proposition B. Il reste à démontrer que la troisième condition est aussi satisfaite. Grâce aux suites spectrales

$$\text{Ext}_{A/I}^p(H_q(A/I^k, A/I, A/I), W) \Rightarrow H^n(A/I^k, A/I, W)$$

la proposition A démontre que l'homomorphisme canonique suivant est nul

$$H^n(A/I^k, A/I, W) \rightarrow H^n(A/I^{k+t}, A/I, W)$$

pour un  $t$  bien choisi en fonction de  $n$ , par exemple

$$t = n(n-1)/2.$$

Pour obtenir  $t = n-1$ , il faut adapter à la cohomologie la démonstration de la proposition A. Comme ce résultat en cohomologie n'est pas nouveau, il ne sera pas redémontré ici (voir la remarque 12.12). La proposition B est démontrée par conséquent.

*Remarque 7.* La suite exacte de Jacobi-Zariski (voir le théorème 5.1)

$$H_2(A, A/I, W) \rightarrow H_2(A/I^k, A/I, W) \rightarrow H_1(A, A/I^k, W)$$

et l'isomorphisme canonique (voir la proposition 6.1)

$$H_1(A, A/I^k, W) \cong I^k/I^{k+1} \otimes_{A/I} W$$

démontrent que l'hypothèse du corollaire A implique la deuxième condition de la proposition A avec  $t=1$ . Par suite ce corollaire est bien un corollaire de cette proposition. Il reste donc à démontrer la proposition A puis le théorème A.

La deuxième condition du théorème A fait de  $I$  un idéal symétriquement quasi-régulier d'après le corollaire A. La première condition en fait autant grâce à un premier isomorphisme (voir le lemme 3.20)

$$H_2(A, A/I, W) \cong H_2(A, A/I, A/I) \otimes_{A/I} W$$

et grâce à un second isomorphisme (voir le théorème 15.8)

$$H_2(A, A/I, A/I) \cong \text{Tor}_2^A(A/I, A/I)/[\text{Tor}_1^A(A/I, A/I)]^2.$$

Par conséquent on peut supposer l'idéal  $I$  symétriquement quasi-régulier dans la démonstration du théorème A.

*Remarque 8.* Utilisons la suite exacte de Jacobi-Zariski du diagramme commutatif suivant avec  $n \neq 1$

$$\begin{array}{ccccc} H_n(A, A/I^{k+t}, W) & \rightarrow & H_n(A, A/I, W) & \rightarrow & H_n(A/I^{k+t}, A/I, W) \\ \alpha \downarrow & \nearrow & & & \downarrow \omega \\ H_n(A, A/I^k, W) & & & & H_n(A/I^{k+t+n-1}, A/I, W). \end{array}$$

Supposons satisfaite la troisième condition du théorème A. Pour un  $t$  bien choisi, l'homomorphisme  $\alpha$  est nul puisque l'idéal  $I$  est d'Artin-Rees (voir le corollaire 10.13); en outre l'homomorphisme  $\omega$  est nul puisque l'idéal  $I$  est symétriquement quasi-régulier (voir la proposition A). Par conséquent, le module  $H_n(A, A/I, W)$  est nul et la deuxième condition du théorème A est satisfaite.

**Résumé 9.** Il reste à démontrer les implications suivantes

$$2 \Rightarrow 1 \Rightarrow 3$$

dans la proposition A, en supposant plat le  $A/I$ -module  $I/I^2$ , et dans le théorème A, en supposant symétriquement quasi-régulier l'idéal  $I$ . Ces démonstrations se font à l'aide du théorème fondamental suivant (D. Lazard).

**THÉORÈME 10.** *Pour qu'un module  $M$  soit plat, il faut et il suffit qu'il soit limite inductive suivant un ensemble filtrant d'un système inductif de modules libres de type fini.*

Voici encore la démonstration de la remarque D à partir de la proposition A.

**Remarque 11.** Le noyau de l'homomorphisme  $\pi$  est isomorphe au module  $H_2(A, A/I, A/I)$  en toute généralité (voir le corollaire 15.10). Mais alors, pour  $t$  égal à 1 et pour  $W$  égal à  $A/I$ , la deuxième condition de la proposition A prend la forme explicite suivante

$$\pi^{-1}(I^{k-1} \cdot I^2) = I^{k-1} \cdot S^2$$

pour tout  $k \geq 1$ . Comme l'homomorphisme  $\pi$  est surjectif, l'égalité précédente peut être remplacée par l'inclusion suivante

$$\text{Ker } \pi \subset I^{k-1} \cdot S^2$$

pour tout  $k \geq 1$ . La remarque D est donc démontrée.

### Algèbres filtrées

Un anneau filtré est un anneau  $A$  donné avec une suite décroissante d'idéaux

$$A = F^0 A \supset F^1 A \supset \cdots \supset F^p A \supset F^{p+1} A \supset \cdots$$

satisfaisant à la condition suivante

$$F^p A \cdot F^q A \subset F^{p+q} A.$$

Les homomorphismes d'anneaux filtrés préservent les filtrations. Une algèbre filtrée est un homomorphisme d'anneaux filtrés. On a la notion d'algèbre filtrée libre. Considérons une  $A$ -algèbre libre

$$B = A [ \dots x_i \dots ] \quad i \in I.$$

Pour pouvoir filtrer cet anneau, on suppose que l'anneau  $A$  est lui-même filtré et que chaque variable  $x_i$  est munie d'un degré  $\delta_i \geq 0$ . Alors par définition les éléments

$$ax_{i_1}^{r_1} x_{i_2}^{r_2} \dots x_{i_k}^{r_k} \quad \text{avec} \quad a \in F^q A \quad \text{et} \quad q + r_1 \delta_{i_1} + \dots + r_k \delta_{i_k} \geq p$$

engendrent l'idéal  $F^p B$  de la filtration.

Un module filtré sur un anneau filtré est un  $B$ -module  $W$  donné avec une suite décroissante de sous-modules

$$W = F^0 W \supset F^1 W \supset \cdots \supset F^p W \supset F^{p+1} W \supset \cdots$$

satisfaisant à la condition suivante

$$F^p B \cdot F^q W \subset F^{p+q} W.$$

Les homomorphismes de modules filtrés préservent les filtrations. Avec un nombre positif ou nul  $d$ , à un module filtré  $W$  correspond un nouveau module filtré  $W^{[d]}$  donné par les égalités

$$F^p W^{[d]} = F^{p-d} W$$

l'idéal  $F^q W$  étant égal à  $W$  lorsque  $q$  est négatif. Considérons une  $A$ -algèbre filtrée libre  $B$  et un  $B$ -module filtré  $W$ . Alors le module correspondant des différentielles de Kaehler est lui aussi filtré de manière naturelle. De manière plus précise, on a l'isomorphisme suivant de modules filtrés

$$\text{Dif}(A, B, W) \cong \bigoplus W_i^{[\delta_i]} \quad \text{avec } i \in I$$

le module filtré  $W_i$  étant égal au module filtré  $W$ .

On connaît la notion de résolution simpliciale d'une algèbre (voir la définition 4.30). Il s'agit de la généraliser.

**DÉFINITION 12.** Une résolution simpliciale filtrée de la  $A$ -algèbre filtrée  $B$  est une  $A$ -algèbre simpliciale filtrée  $B_*$  (les homomorphismes de face et de dégénérescence préservent les filtrations) satisfaisant aux 3 conditions suivantes, l'isomorphisme de la dernière condition étant donné explicitement :

- a) la  $A$ -algèbre filtrée  $B_n$  est libre pour tout  $n \geq 0$ ,
- b) le module  $H_n[F^p B_*]$  est nul pour tout  $n > 0$  et  $p \geq 0$ ,
- c) les  $A$ -algèbres  $B$  et  $H_0[B_*]$  sont isomorphes avec un diagramme commutatif pour tout  $p \geq 0$

$$\begin{array}{ccc} F^p B & \xrightarrow{\cong} & H_0[F^p B_*] \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\cong} & H_0[B_*]. \end{array}$$

Une résolution simpliciale filtrée est en particulier une résolution simpliciale ordinaire.

**LEMME 13.** *Toute algèbre filtrée possède une résolution simpliciale filtrée.*

*Démonstration.* Il suffit de généraliser la démonstration du théorème 9.26. Il s'agit de donner un degré à chacune des variables de chacune des  $A$ -algèbres libres

$B_n$  et il s'agit aussi d'assurer un peu plus d'acyclicité que dans le cas ordinaire. Par dégénérescence, les variables doivent garder leur degré. De plus, au cours du  $n$ -ème pas, il faut introduire suffisamment de variables de degré  $p$  dans  $B_{n+1}$  pour obtenir l'acyclicité de  $F^p B_*$  en degré  $n$ . À part cela, la construction pas-à-pas reste la même que dans le cas ordinaire.

**PROPOSITION 14.** *Soient une  $A$ -algèbre filtrée  $B$  et un  $B$ -module filtré  $W$ . Considérons une résolution simpliciale filtrée  $B_*$ . Alors le  $n$ -ème module d'homologie du complexe naturel*

$$F^p \text{Dif}(A, B_*, W)$$

*ne dépend pas de  $B_*$  et se note  $F_n^p(A, B, W)$ .*

*Démonstration.* Il suffit de généraliser la démonstration du théorème 4.43. Pour cela considérons un ensemble dénombrable de  $A$ -algèbres filtrées libres

$$\Delta = \{\Delta_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

suffisamment grand pour que les algèbres filtrées libres  $B_n$  y appartiennent toutes. Puis considérons le complexe double ayant le module en bidegré  $(r, s)$

$$\bigoplus_{\Delta_{m_r} \rightarrow \dots \rightarrow \Delta_{m_0} \rightarrow B_s} F^p \text{Dif}(A, \Delta_{m_r}, W).$$

Les deux suites spectrales auxquelles il donne lieu dégénèrent, l'une parce que  $B_n$  est un  $\Delta_m$ , l'autre parce que les deux dernières conditions de la définition 12 sont satisfaites. On obtient donc finalement un isomorphisme en chaque degré  $n$ . D'une part il s'agit du  $n$ -ème module d'homologie du complexe de la proposition et d'autre part il s'agit du  $n$ -ème module d'homologie du complexe ayant le module en degré  $n$

$$\bigoplus_{\Delta_{m_n} \rightarrow \dots \rightarrow \Delta_{m_0} \rightarrow B} F^p \text{Dif}(A, \Delta_{m_n}, W).$$

Ci-dessus les flèches dénotent des homomorphismes de  $A$ -algèbres filtrées. En laissant varier l'ensemble  $\Delta$ , cela démontre la proposition.

En général les modules  $F_n^p(A, B, W)$  ne forment pas une filtration du module  $H_n(A, B, W)$ .

*Remarque 15.* Les modules  $F_n^0(A, B, W)$  et  $H_n(A, B, W)$  sont isomorphes. Cela découle du fait que les modules  $F^0 \text{Dif}(A, B_n, W)$  et  $\text{Dif}(A, B_n, W)$  sont toujours isomorphes et du fait qu'une résolution simpliciale filtrée est une résolution simpliciale ordinaire.

**EXEMPLE 16.** Avec un anneau  $A$ , un idéal  $I$  et un module  $W$  défini sur  $A/I$ , on peut considérer les modules  $F_n^p(A, A/I, W)$ , l'anneau  $A$  étant filtré par l'idéal  $I$  et les

filtrations de  $A/I$  et de  $W$  étant triviales :

$$F^p A = I^p \quad \text{puis} \quad F^p(A/I) = 0 \quad \text{enfin} \quad F^p W = 0$$

pour tout  $p$  strictement positif.

**PROPOSITION 17.** *Il existe un entier  $p(k, n)$  avec la propriété*

$$F_n^p(A, A/I, W) \cong 0 \quad p \geq p(k, n)$$

*si l'idéal  $I$  est nilpotent avec  $I^k$  nul.*

*Démonstration.* La démonstration la plus simple serait de construire une résolution simpliciale filtrée avec des variables de degré borné en chaque dimension. Je n'y suis parvenu que pour les dimensions au plus égales à 3. La démonstration générale de la proposition est résumée dans l'appendice de ce travail. Elle est malheureusement un peu longue.

Les objets filtrés considérés ci-dessus ont évidemment des objets gradués associés, notés par la lettre  $G$  avec  $G^p$  égal à  $F^p/F^{p+1}$ . C'est en particulier le cas pour le module des différentielles de Kaehler d'une algèbre filtrée libre.

**PROPOSITION 18.** *Soient une  $A$ -algèbre filtrée  $B$  et un  $B$ -module filtré  $W$ . Considérons une résolution simpliciale filtrée  $B_*$ . Alors le  $n$ -ème module d'homologie du complexe naturel*

$$G^p \text{Dif}(A, B_*, W)$$

*ne dépend pas de  $B_*$  et se note  $G_n^p(A, B, W)$ .*

*Démonstration.* Analogue à celle de la proposition 14.

Ces nouveaux modules d'homologie interviennent dans les démonstrations grâce aux lemmes suivants.

**LEMME 19.** *Soient une  $A$ -algèbre filtrée  $B$  et un  $B$ -module filtré  $W$ . Alors il existe pour tout  $p \geq 0$  une suite exacte naturelle*

$$\dots F_n^{p+1}(A, B, W) \rightarrow F_n^p(A, B, W) \rightarrow G_n^p(A, B, W) \rightarrow F_{n-1}^{p+1}(A, B, W) \dots$$

*Démonstration.* Conséquence de la suite exacte courte de complexes

$$0 \rightarrow F^{p+1} \text{Dif}(A, B_*, W) \rightarrow F^p \text{Dif}(A, B_*, W) \rightarrow G^p \text{Dif}(A, B_*, W) \rightarrow 0.$$

**LEMME 20.** *Soient une  $A$ -algèbre filtrée  $B$  et un  $B$ -module filtré  $W$ . Alors il existe pour tout  $n \geq 0$  un isomorphisme naturel*

$$\bigoplus_{p \geq 0} G_n^p(A, B, W) \cong H_n(GA, GB, GW).$$

*Démonstration.* L'algèbre graduée associée à une algèbre filtrée libre est une algèbre libre. En outre avec une résolution simpliciale filtrée  $B_*$  de la  $A$ -algèbre filtrée  $B$  on a une suite exacte

$$\cdots \rightarrow H_n[F^{p+1}B_*] \rightarrow H_n[F^pB_*] \rightarrow H_n[G^pB_*] \rightarrow \cdots.$$

Il est donc évident que la  $GA$ -algèbre simpliciale  $GB_*$  est une résolution simpliciale de la  $GA$ -algèbre  $GB$ . D'autre part pour les modules des différentielles de Kaehler des algèbres filtrées libres il existe un isomorphisme général qui prend ici la forme suivante

$$\bigoplus_{p \geq 0} G^p \text{Dif}(A, B_*, W) \cong \text{Dif}(GA, GB_*, GW).$$

De cet isomorphisme de complexes découlent alors les isomorphismes du lemme.

*Remarque 21.* Lorsque la  $A$ -algèbre  $B$  et le  $B$ -module  $W$  sont non seulement filtrés mais encore gradués, les modules  $H_n(A, B, W)$  sont eux aussi gradués de manière naturelle, comme le démontre le lemme précédent. On peut le constater de manière directe en utilisant des résolutions simpliciales graduées. En outre rappelons que les suites exactes et les isomorphismes fondamentaux de la théorie générale de l'homologie des algèbres commutatives préservent cette graduation des modules d'homologie dans le cas gradué. Enfin, toujours dans le cas gradué, on a les isomorphismes suivants

$$F_n^p(A, B, W) \cong \bigoplus_{q \geq p} G_n^q(A, B, W)$$

une résolution simpliciale graduée pouvant être utilisée comme résolution simpliciale filtrée.

### Démonstration de la proposition A

Avec un  $A$ -module libre  $L$  on va considérer l'algèbre symétrique  $S_A L$  et l'idéal d'augmentation  $I_A L$  qui donne donc un isomorphisme canonique

$$S_A L / I_A L \cong A.$$

En outre considérons un idéal  $I$  de l'anneau  $A$  et un module  $W$  défini sur  $A/I$ . On va utiliser les notations

$$\bar{A} = A/I \quad \text{et} \quad \bar{L} = L/IL.$$

Un homomorphisme entre deux  $\bar{A}$ -modules libres se relève en un homomorphisme entre deux  $A$ -modules libres, de manière non unique évidemment.

*Remarque 22.* Utilisons maintenant les isomorphismes suivants

$$\begin{aligned} H_n(S_A L / I_A^k L, S_A L / I_A L, W) &\cong H_{n-1}(A, S_A L / I_A^k L, W) \cong \\ &\cong H_{n-1}(\bar{A}, S_{\bar{A}} \bar{L} / I_{\bar{A}}^k \bar{L}, W) \cong H_n(S_{\bar{A}} \bar{L} / I_{\bar{A}}^k \bar{L}, S_{\bar{A}} \bar{L} / I_{\bar{A}} \bar{L}, W). \end{aligned}$$

L'isomorphisme central est dû à la platitude du  $A$ -module  $S_A L/I_A^k L$  (voir la proposition 4.54) et les autres isomorphismes proviennent de suites triviales de Jacobi-Zariski. En résumé, le module suivant dépend fonctoriellement de  $\bar{L}$

$$H_n(S_A L/I_A^k L, S_A L/I_A L, W).$$

Considérons maintenant une situation filtrée dans le sens de l'exemple 16. L'anneau  $S_A L/I_A^k L$  est filtré par l'idéal  $I_A L/I_A^k L$ , il est donc filtré grâce à sa graduation; en outre les autres filtrations sont triviales. Dans ce contexte l'anneau  $A$  n'est donc pas filtré par l'idéal  $I$ .

**LEMME 23.** *Par rapport à  $L$ , les foncteurs suivants de la catégorie des  $A$ -modules libres*

$$G_n^p(S_A L/I_A^k L, S_A L/I_A L, W) \text{ et } F_n^p(S_A L/I_A^k L, S_A L/I_A L, W)$$

*sont en fait des foncteurs de la catégorie des  $\bar{A}$ -modules libres, par l'intermédiaire de  $\bar{L}$ .*

*Démonstration.* Cela découle des remarques 21 et 22. En effet les isomorphismes de cette dernière préservent les graduations.

**CONSTRUCTION 24.** Appliquons le théorème 10 au  $\bar{A}$ -module  $I$  égal à  $I/I^2$  et supposé plat. Il existe donc des  $\bar{A}$ -modules libres de type fini  $\bar{L}_j$  et des homomorphismes de  $\bar{A}$ -modules

$$\lambda_{ij} : \bar{L}_i \rightarrow \bar{L}_j \text{ et } \lambda_j : \bar{L}_j \rightarrow I$$

qui forment un système inductif sur un ensemble filtrant et qui donnent un isomorphisme de  $\bar{A}$ -modules

$$\lambda : \varinjlim \bar{L}_j \rightarrow I.$$

Par relèvement on obtient des  $A$ -modules libres de type fini  $L_j$  et des homomorphismes de  $A$ -modules

$$\lambda_{ij} : L_i \rightarrow L_j \text{ et } \lambda_j : L_j \rightarrow I$$

qui ne sont pas déterminés de manière unique et qui ne forment donc pas en général un système inductif. Avec l'anneau  $A$  et l'idéal  $I$  considérons les anneaux et idéaux suivants

$$A_j = S_A L_j \text{ et } I_j = I_A L_j.$$

A partir des homomorphismes  $\lambda_{ij}$  et  $\lambda_j$ , on obtient des homomorphismes d'anneaux

$$\alpha_{ij} : A_i \rightarrow A_j \text{ et } \alpha_j : A_j \rightarrow A$$

homomorphismes qui ne sont pas déterminés de manière unique. L'anneau  $A_j$  est

à filtrer par l'idéal  $I_j$  et l'anneau  $A$  est à filtrer par l'idéal  $I$ . Les homomorphismes précédents sont compatibles avec ces filtrations. Les homomorphismes suivants qui en découlent

$$A_i/I_i \rightarrow A_j/I_j \quad \text{et} \quad A_j/I_j \rightarrow A/I$$

correspondent aux homomorphismes canoniques

$$A \rightarrow A \quad \text{et} \quad A \rightarrow A/I.$$

A propos d'unicité démontrons le résultat suivant.

*Remarque 25.* Considérons deux relèvements de l'homomorphisme  $\lambda_j$ ,  $\lambda'_j$  et  $\lambda''_j: L_j \rightarrow I$ .

Alors il existe un  $A$ -module libre  $M$  et des homomorphismes de  $A$ -modules

$$\mu' \quad \text{et} \quad \mu'': L_j \rightarrow M \quad \text{et} \quad \mu: M \rightarrow I$$

satisfaisant aux conditions suivantes

$$\lambda'_j = \mu \circ \mu' \quad \text{et} \quad \lambda''_j = \mu \circ \mu'' \quad \text{avec} \quad \bar{\mu}' = \bar{\mu}''.$$

En voici la démonstration. Utilisons une base  $\{x_p\}$  du  $A$ -module libre  $L_j$ . On a alors des égalités

$$\lambda''_j(x_p) = \lambda'_j(x_p) + \sum y_{pq} z_{pq}, \quad y_{pq}, z_{pq} \in I.$$

Par définition le  $A$ -module libre  $M$  a la base  $\{m_p, n_{pq}\}$  et on conclut à l'aide des homomorphismes suivants

$$\begin{aligned} \mu'(x_p) &= m_p, & \mu''(x_p) &= m_p + \sum y_{pq} n_{pq}, \\ \mu(m_p) &= \lambda'_j(x_p), & \mu(n_{pq}) &= z_{pq}. \end{aligned}$$

Cela étant, on peut considérer l'anneau et l'idéal

$$B = S_A M \quad \text{et} \quad J = I_A M$$

avec les homomorphismes d'anneaux

$$\beta' \quad \text{et} \quad \beta'': A_j \rightarrow B \quad \text{et} \quad \beta: B \rightarrow A$$

qui donnent  $\alpha'_j$  et  $\alpha''_j$  par composition.

En utilisant le lemme 23 soit directement, soit par l'intermédiaire de la remarque 25, on démontre facilement les résultats suivants.

**DÉFINITION 26.** Les entiers  $p, n, k$  sont fixés. Alors les homomorphismes suivants sont déterminés de manière unique

$$g_{ij}: G_n^p(A_i/I_i^k, A_i/I_i, W) \rightarrow G_n^p(A_j/I_j^k, A_j/I_j, W)$$

et ils forment un système inductif sur l'ensemble filtrant. De plus les homomorphismes suivants sont déterminés de manière unique

$$g_j : G_n^p(A_j/I_j^k, A_j/I_j, W) \rightarrow G_n^p(A/I^k, A/I, W)$$

et ils donnent un homomorphisme de modules

$$g_n^{p,k} : \varinjlim G_n^p(A_j/I_j^k, A_j/I_j, W) \rightarrow G_n^p(A/I^k, A/I, W).$$

De même les homomorphismes suivants sont déterminés de manière unique

$$f_{ij} : F_n^p(A_i/I_i^k, A_i/I_i, W) \rightarrow F_n^p(A_j/I_j^k, A_j/I_j, W)$$

et ils forment un système inductif sur l'ensemble filtrant. De plus les homomorphismes suivants sont déterminés de manière unique

$$f_j : F_n^p(A_j/I_j^k, A_j/I_j, W) \rightarrow F_n^p(A/I^k, A/I, W)$$

et ils donnent un homomorphisme de modules

$$f_n^{p,k} : \varinjlim F_n^p(A_j/I_j^k, A_j/I_j, W) \rightarrow F_n^p(A/I^k, A/I, W).$$

Pour  $p$  nul, on a un homomorphisme

$$f_n^k : \varinjlim H_n(A_j/I_j^k, A_j/I_j, W) \rightarrow H_n(A/I^k, A/I, W)$$

qui va jouer un rôle important dans la démonstration de la proposition A.

L'idéal  $I$  de l'anneau  $A$  est dit  $k$ -symétrique si le  $A/I$ -module  $I/I^2$  est plat et si l'algèbre graduée symétrique du module est canoniquement isomorphe à l'algèbre graduée associée de l'anneau, jusqu'au degré  $k$  y compris.

**LEMME 27.** *Pour un idéal  $(k-1)$ -symétrique  $I$  on a toujours des isomorphismes canoniques*

$$\varinjlim H_n(A_j/I_j^k, A_j/I_j, W) \cong H_n(A/I^k, A/I, W).$$

*Démonstration.* Partons de l'isomorphisme simple suivant

$$H_n(\varinjlim (S_{\bar{A}}\bar{L}_j/I_{\bar{A}}^k\bar{L}_j), \bar{A}, W) \cong H_n(S_{\bar{A}}(\varinjlim \bar{L}_j)/I_{\bar{A}}^k(\varinjlim \bar{L}_j), \bar{A}, W).$$

D'après la proposition 5.30, il s'agit de l'isomorphisme suivant

$$\varinjlim H_n(S_{\bar{A}}\bar{L}_j/I_{\bar{A}}^k\bar{L}_j, \bar{A}, W) \cong H_n(S_{\bar{A}}I/I_{\bar{A}}^kI, \bar{A}, W).$$

On a un autre isomorphisme d'après la remarque 22

$$\varinjlim H_n(S_{\bar{A}}L_j/I_{\bar{A}}^kL_j, A, W) \cong H_n(S_{\bar{A}}I/I_{\bar{A}}^kI, \bar{A}, W).$$

Mais l'idéal  $I$  est supposé  $(k-1)$ -symétrique et l'isomorphisme précédent s'écrit comme suit

$$\varinjlim H_n(G(A_j/I_j^k), G(A_j/I_j), G(W)) \cong H_n(G(A/I^k), G(A/I), G(W)).$$

On a un nouvel isomorphisme d'après le lemme 20

$$\varinjlim G_n^p(A_j/I_j^k, A_j/I_j, W) \cong G_n^p(A/I^k, A/I, W).$$

Voilà la première partie de la démonstration.

En utilisant la suite exacte du lemme 19, on démontre que l'on a toujours des isomorphismes canoniques

$$\varinjlim F_n^p(A_j/I_j^k, A_j/I_j, W) \cong F_n^p(A/I^k, A/I, W).$$

La démonstration se fait par induction sur  $n$  croissant et par induction sur  $p$  décroissant pour  $n$  fixé. Grâce à la proposition 17, il n'y a pas de problème pour commencer cette seconde induction. D'après la remarque 15, l'isomorphisme établi ci-dessus et pris pour  $p$  nul donne l'isomorphisme du lemme.

*Démonstration 28.* D'après le lemme 12.6 on a des homomorphismes canoniques nuls pour  $n \neq 1$

$$H_n(A_j/I_j^{k+n-1}, A_j/I_j, W) \rightarrow H_n(A_j/I_j^k, A_j/I_j, W).$$

Si l'idéal  $I$  est symétriquement quasi-régulier, on peut passer à la limite, utiliser les isomorphismes du lemme 27 et démontrer que les homomorphismes canoniques suivants sont nuls

$$H_n(A/I^{k+n-1}, A/I, W) \rightarrow H_n(A/I^k, A/I, W).$$

Par conséquent, dans la proposition A, la première condition implique la troisième.

*Démonstration 29.* Supposons satisfaite la deuxième condition de la proposition A. On a donc un homomorphisme nul

$$H_2(A/I^{k+t}, A/I, A/I) \rightarrow H_2(A/I^k, A/I, A/I).$$

D'après la proposition 6.1, on a un homomorphisme nul

$$H_1(A/I^{k+t}, A/I^k, A/I) \rightarrow H_1(A/I^{k+t}, A/I, A/I).$$

Par une suite de Jacobi-Zariski, on a donc un isomorphisme

$$H_2(A/I^k, A/I, A/I) \cong H_1(A/I^{k+t}, A/I^k, A/I).$$

En résumé pour  $k \geq 2$ , on a un isomorphisme canonique

$$H_2(A/I^k, A/I, A/I) \cong I^k/I^{k+1}$$

toujours d'après la proposition 6.1. La même démonstration où le lemme 12.6 remplace l'hypothèse donne des isomorphismes canoniques pour  $k \geq 2$

$$H_2(A_j/I_j^k, A_j/I_j, A/I) \cong I_j^k/I_j^{k+1} \otimes_{A_j/I_j} A/I.$$

Utilisons maintenant l'isomorphisme du lemme 27 pour  $n$  égal à 2. Si l'idéal  $I$  est  $(k-1)$ -symétrique, on a donc un isomorphisme canonique

$$\varinjlim (I_A^k \bar{L}_j / I_A^{k+1} \bar{L}_j) \cong I^k / I^{k+1}.$$

Cela suffit pour démontrer que l'idéal  $I$  est  $k$ -symétrique. Finalement l'idéal  $I$  est symétriquement quasi-régulier et la proposition A est démontrée.

### Démonstration du théorème A

Commençons par utiliser le complexe de Koszul (voir en particulier le lemme 12.16).

*Remarque 30.* Pour un  $A$ -module libre  $L$  et pour un  $A$ -module quelconque  $W$ , il existe des isomorphismes naturels

$$\mathrm{Tor}_n^{S_A L}(I_A^k L / I_A^{k+1} L, W) \cong I_A^k L / I_A^{k+1} L \otimes_A A_n^A L \otimes_A W.$$

De plus il existe une suite exacte naturelle pour tout  $n \neq 0$

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^{S_A L}(S_A L / I_A^{k-1} L, W) &\rightarrow \mathrm{Tor}_n^{S_A L}(I_A^{k-1} L / I_A^k L, W) \\ &\rightarrow \mathrm{Tor}_n^{S_A L}(S_A L / I_A^k L, W) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**LEMME 31.** *Par rapport à  $L$ , les foncteurs suivants de la catégorie des  $A$ -modules libres*

$$\mathrm{Tor}_n^{S_A L}(I_A^k L / I_A^{k+1} L, \bar{A}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Tor}_n^{S_A L}(S_A L / I_A^k L, \bar{A})$$

*sont en fait des foncteurs de la catégorie des  $\bar{A}$ -modules libres, par l'intermédiaire de  $\bar{L}$ .*

*Démonstration.* L'isomorphisme (respectivement l'épimorphisme) de la remarque précédente le démontre dans le premier cas (respectivement dans le second cas).

Appliquons le lemme 31 à la construction 24, soit directement, soit par l'intermédiaire de la remarque 25.

**DÉFINITION 32.** Les entiers  $n$  et  $k$  sont fixés. Alors les homomorphismes suivants sont déterminés de manière unique

$$\tau_{ij}: \mathrm{Tor}_n^{A_i}(I_i^k / I_i^{k+1}, \bar{A}) \rightarrow \mathrm{Tor}_n^{A_j}(I_j^k / I_j^{k+1}, \bar{A})$$

et ils forment un système inductif sur l'ensemble filtrant. De plus les homomorphismes suivants sont déterminés de manière unique

$$\tau_j : \mathrm{Tor}_n^{A_j}(I_j^k/I_j^{k+1}, A) \rightarrow \mathrm{Tor}_n^A(I^k/I^{k+1}, A)$$

et ils donnent un homomorphisme de modules

$$\tau_n^k : \varinjlim \mathrm{Tor}_n^{A_j}(I_j^k/I_j^{k+1}, A) \rightarrow \mathrm{Tor}_n^A(I^k/I^{k+1}, A).$$

De même les homomorphismes suivants sont déterminés de manière unique

$$t_{ij} : \mathrm{Tor}_n^{A_i}(A_i/I_i^k, A) \rightarrow \mathrm{Tor}_n^{A_j}(A_j/I_j^k, A)$$

et ils forment un système inductif sur l'ensemble filtrant. De plus les homomorphismes suivants sont déterminés de manière unique

$$t_j : \mathrm{Tor}_n^{A_j}(A_j/I_j^k, A) \rightarrow \mathrm{Tor}_n^A(A/I^k, A)$$

et ils donnent un homomorphisme de modules

$$t_n^k : \varinjlim \mathrm{Tor}_n^{A_j}(A_j/I_j^k, A) \rightarrow \mathrm{Tor}_n^A(A/I^k, A).$$

*Démonstration 33.* Supposons l'idéal  $I$  extérieurement quasi-régulier, par conséquent symétriquement quasi-régulier. On a alors non seulement les isomorphismes canoniques de la remarque 30

$$\mathrm{Tor}_n^{A_j}(I_j^k/I_j^{k+1}, A) \cong I_A^k L_j / I_A^{k+1} L_j \otimes_A A_n^A L_j$$

mais encore des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Tor}_n^A(I^k/I^{k+1}, A) \cong I_A^k I / I_A^{k+1} I \otimes_A A_n^A I.$$

En passant à la limite, on démontre que  $\tau_n^k$  est toujours un isomorphisme. Considérons maintenant le diagramme commutatif suivant formé de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \varinjlim & \mathrm{Tor}_n^{A_j}(I_j^{k-1}/I_j^k, A) & \rightarrow & \varinjlim & \mathrm{Tor}_n^{A_j}(A_j/I_j^k, A) & \rightarrow \varinjlim \mathrm{Tor}_n^{A_j}(A_j/I_j^{k-1}, A) \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \mathrm{Tor}_n^A(I^{k-1}/I^k, A) & \rightarrow & \mathrm{Tor}_n^A(A/I^k, A) & \rightarrow & \mathrm{Tor}_n^A(A/I^{k-1}, A) \dots & \end{array}$$

En procédant par induction sur  $k$  pour tous les  $n$  à la fois, on démontre alors que  $t_n^k$  est toujours un isomorphisme. Par conséquent non seulement les homomorphismes suivants sont nuls

$$\mathrm{Tor}_n^{A_j}(A_j/I_j^{k+1}, A) \rightarrow \mathrm{Tor}_n^{A_j}(A_j/I_j^k, A)$$

mais encore les homomorphismes suivants sont nuls

$$\mathrm{Tor}_n^A(A/I^{k+1}, A) \rightarrow \mathrm{Tor}_n^A(A/I^k, A)$$

pour tout  $n \neq 0$ . On a donc la condition d'Artin-Rees. Par conséquent, dans le théorème A, la première condition implique la troisième.

Pour terminer la démonstration, il sera fait usage du résultat classique suivant de la théorie simpliciale.

**PROPOSITION 34.** *Soit un  $A$ -module simplicial  $M_*$  supposé libre en chaque degré. Si le module d'homologie  $H_m[M_*]$  est nul pour  $m \neq 1$  et égal à  $M$  pour  $m=1$ , alors il existe un isomorphisme canonique*

$$\Lambda_n^A M \cong H_n[S_A M_*]$$

pour tout entier  $n$ .

Il nous faut utiliser maintenant la troisième partie du chapitre 13 dont voici les points essentiels.

**DÉFINITION 35.** Considérons une  $A$ -algèbre  $B$  et une  $B$ -algèbre  $C$ . Alors il existe une  $C$ -algèbre simpliciale avec un idéal simplicial  $J_*$  jouissant de propriétés remarquables à voir ci-dessous. On pose

$$P_n^k(A, B, C) \cong H_n[J_*^k / J_*^{k+1}] \quad \text{et} \quad Q_n^k(A, B, C) \cong H_n[J_*^k].$$

En fait l'idéal simplicial  $J_*$  est le noyau de l'homomorphisme

$$B_* \otimes_A C \rightarrow C_*$$

où  $B_*$  est une résolution simpliciale de la  $A$ -algèbre  $B$  et où  $C_*$  est la résolution simpliciale triviale de la  $C$ -algèbre  $C$ .

**LEMME 36.** *Soient une  $A$ -algèbre  $B$  et une  $B$ -algèbre  $C$ . Alors il existe une suite exacte naturelle*

$$\dots Q_n^{k+1}(A, B, C) \rightarrow Q_n^k(A, B, C) \rightarrow P_n^k(A, B, C) \rightarrow Q_{n-1}^{k+1}(A, B, C) \dots$$

pour tout entier  $k$ .

**LEMME 37.** *Soient une  $A$ -algèbre  $B$  et une  $B$ -algèbre  $C$ . Alors il existe des isomorphismes naturels*

$$P_n^1(A, B, C) \cong H_n(A, B, C) \quad \text{et} \quad Q_n^0(A, B, C) \cong \text{Tor}_n^A(B, C)$$

pour tout entier  $n$ .

*Démonstration.* Il s'agit des égalités 13.13 et 13.14.

Voici maintenant le résultat de convergence de D. Quillen.

**LEMME 38.** *Soient une  $A$ -algèbre  $B$  et une  $B$ -algèbre  $C$ . Alors pour toute paire  $k > n$ , le module  $Q_n^k(A, B, C)$  est nul, si l'anneau  $B$  est un quotient de l'anneau  $A$ .*

*Démonstration.* Voir la proposition 13.3 et l'égalité 13.12.

Enfin on utilisera le corollaire suivant de la proposition ci-dessus.

**LEMME 39.** *Soient une A-algèbre B et une B-algèbre C. Si le module  $H_m(A, B, C)$  est nul pour  $m \neq 1$  et égal à M pour  $m=1$ , alors il existe un isomorphisme naturel*

$$\Lambda_n^C M \cong \bigoplus_{k \geq 0} P_n^k(A, B, C)$$

*pour tout entier n.*

*Démonstration.* Il existe un isomorphisme naturel (voir l'égalité 13.16)

$$S_C(J_*/J_*^2) \cong \bigoplus_{k \geq 0} (J_*^k/J_*^{k+1})$$

qui permet de conclure par la proposition 34 et le lemme 37.

Utilisons à nouveau les notations utilisées précédemment et liées à l'anneau A et à l'idéal I.

**LEMME 40.** *Par rapport à L, les foncteurs suivants de la catégorie des A-modules libres*

$$P_n^k(S_A L, A, \bar{A}) \quad \text{et} \quad Q_n^k(S_A L, A, \bar{A})$$

*sont en fait des foncteurs de la catégorie des  $\bar{A}$ -modules libres, par l'intermédiaire de  $\bar{L}$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme 39, l'homomorphisme canonique

$$P_n^k(S_A L, A, \bar{A}) \rightarrow P_n^k(S_{\bar{A}} \bar{L}, \bar{A}, \bar{A})$$

est toujours un isomorphisme. La suite exacte du lemme 36 et l'isomorphisme établi ci-dessus démontrent alors que l'homomorphisme canonique

$$Q_n^k(S_A L, A, \bar{A}) \rightarrow Q_n^k(S_{\bar{A}} \bar{L}, \bar{A}, \bar{A})$$

est toujours un isomorphisme. On procède par induction sur  $n$  croissant et par induction sur  $k$  décroissant pour  $n$  fixé, en tenant compte du lemme 38.

Appliquons le lemme 40 à la construction 24, soit directement, soit par l'intermédiaire de la remarque 25.

**DÉFINITION 41.** Les entiers  $n$  et  $k$  sont fixés. Alors les homomorphismes suivants sont déterminés de manière unique

$$p_{ij}: P_n^k(A_i, A_i/I_i, \bar{A}) \rightarrow P_n^k(A_j, A_j/I_j, \bar{A})$$

et ils forment un système inductif sur l'ensemble filtrant. De plus les homomorphismes suivants sont déterminés de manière unique

$$p_j: P_n^k(A_j, A_j/I_j, \bar{A}) \rightarrow P_n^k(A, A/I, \bar{A})$$

et ils donnent un homomorphisme de modules

$$p_n^k: \varinjlim P_n^k(A_j, A_j/I_j, \bar{A}) \rightarrow P_n^k(A, A/I, \bar{A}).$$

De même les homomorphismes suivants sont déterminés de manière unique

$$q_{ij}: Q_n^k(A_i, A_i/I_i, \bar{A}) \rightarrow Q_n^k(A_j, A_j/I_j, \bar{A})$$

et ils forment un système inductif sur l'ensemble filtrant. De plus les homomorphismes suivants sont déterminés de manière unique

$$q_j: Q_n^k(A_j, A_j/I_j, \bar{A}) \rightarrow Q_n^k(A, A/I, \bar{A})$$

et ils donnent un homomorphisme de modules

$$q_n^k: \varinjlim Q_n^k(A_j, A_j/I_j, \bar{A}) \rightarrow Q_n^k(A, A/I, \bar{A}).$$

*Démonstration 42.* Supposons satisfaite la deuxième condition du théorème A. Les seuls modules d'homologie à ne pas être nuls pour les algèbres en question sont les suivants

$$H_1(A_j, A_j/I_j, \bar{A}) \cong \bar{L}_j \quad \text{et} \quad H_1(A, A/I, \bar{A}) \cong I.$$

En utilisant le lemme 39 et en passant à la limite, on démontre que  $p_n^k$  est toujours un isomorphisme. La suite exacte du lemme 36 et l'isomorphisme établi ci-dessus démontrent alors que l'homomorphisme  $q_n^k$  est toujours un isomorphisme. On procède par induction sur  $n$  croissant et par induction sur  $k$  décroissant pour  $n$  fixé, en tenant compte du lemme 38. Pour  $k$  nul on a donc un isomorphisme naturel (voir le lemme 37)

$$\varinjlim \mathrm{Tor}_n^{A_j}(A_j/I_j, \bar{A}) \cong \mathrm{Tor}_n^A(A/I, \bar{A})$$

autrement dit un isomorphisme naturel

$$\varinjlim A_n^{\bar{A}} \bar{L}_j \cong \mathrm{Tor}_n^A(A/I, \bar{A})$$

ou encore un isomorphisme naturel

$$A_n^{\bar{A}} I \cong \mathrm{Tor}_n^A(\bar{A}, \bar{A})$$

qui indique que l'idéal  $I$  est extérieurement quasi-régulier. Le théorème A est démontré maintenant.

## Appendice

Il s'agit de démontrer la proposition 17. À propos des algèbres filtrées et de leur homologie, on a les deux résultats suivants (suite de Jacobi-Zariski et changement de base).

**PROPOSITION 43.** *Soient une  $A$ -algèbre filtrée  $B$ , une  $B$ -algèbre filtrée  $C$  et un  $C$ -module filtré  $W$ . Alors il existe une suite exacte naturelle*

$$\cdots \rightarrow F_n^k(A, B, W) \rightarrow F_n^k(A, C, W) \rightarrow F_n^k(B, C, W) \rightarrow \cdots$$

*pour tout entier  $k$ .*

*Démonstration.* Transcription filtrée de la démonstration du cas ordinaire (voir le théorème 5.1).

**PROPOSITION 44.** *Soient une  $A$ -algèbre graduée plate  $B$ , une  $A$ -algèbre filtrée quelconque  $C$  et un  $B \otimes_A C$ -module filtré  $W$ . L'anneau  $A$  est supposé muni de la filtration triviale. Alors il existe un isomorphisme naturel*

$$F_n^k(A, B, W) \cong F_n^k(C, B \otimes_A C, W)$$

*pour tout entier  $k$  et tout entier  $n$ .*

*Démonstration.* En utilisant une résolution simpliciale graduée de l'algèbre graduée, on peut répéter la démonstration du cas ordinaire (voir la proposition 4.54).

**DÉFINITION 45.** Une  $A$ -algèbre tronquée  $B$  est une  $A$ -algèbre filtrée  $B$  avec  $F^k B$  nul pour  $k$  grand. On supposera toujours que l'anneau filtré  $A$  est aussi tronqué et que l'on a un isomorphisme canonique

$$A/F^1 A \cong B/F^1 B .$$

Un  $B$ -module tronqué  $W$  est un  $B$ -module filtré  $W$  avec  $F^k W$  nul pour  $k$  grand. Son ordre est l'entier

$$dW = \max \{k \mid F^k W \neq 0\} .$$

Ces définitions généralisent les hypothèses de la proposition 17.

**DÉFINITION 46.** Considérons un anneau tronqué  $A$  et un entier  $m$  positif ou nul. Puis considérons un ensemble  $X$  de  $m$  ensembles  $X_i$  non vides. Enfin considérons deux ensembles  $s$  et  $t$  de  $m$  entiers  $s_i$  et  $t_i$  strictement positifs. On peut alors considérer une algèbre tronquée, dite algèbre tronquée modèle

$$A[X]_t^s = A[X_1, \dots, X_m]_{t_1, \dots, t_m}^{s_1, \dots, s_m} .$$

On commence par considérer la  $A$ -algèbre filtrée libre engendrée par tous les éléments de tous les ensembles  $X_i$ , les éléments de l'ensemble  $X_i$  recevant le degré  $s_i$ . Puis on quotientie cette algèbre par un idéal bien choisi, engendré par les  $m$  idéaux suivants. Pour chaque  $i$ , on considère la puissance  $t_i + 1$  de l'idéal engendré par les éléments de  $X_i$ . On a bien une  $A$ -algèbre tronquée avec l'ordre suivant

$$dA[X]_t^s = dA + \sum s_i t_i .$$

Les triples  $(X_i, s_i, t_i)$  sont appelés les composantes de l'algèbre tronquée modèle.

**DÉFINITION 47.** Une résolution simpliciale tronquée de la  $A$ -algèbre tronquée  $B$  est une  $A$ -algèbre simpliciale filtrée  $B_*$  formée de  $A$ -algèbres tronquées modèles  $B_n$ , les conditions d'acyclicité restant celles du cas filtré (voir la définition 12). Toute algèbre tronquée possède une résolution simpliciale tronquée (voir le lemme 49 ci-dessous).

**LEMME 48.** Soit une  $A$ -algèbre tronquée  $B$  avec une résolution simpliciale tronquée  $B_*$  et un  $B$ -module tronqué  $W$ . Alors il existe une suite spectrale

$$H_p[F_q^k(A, B_*, W)] \Rightarrow F_n^k(A, B, W)$$

pour tout entier  $k$ .

*Démonstration.* On utilise un complexe double comme dans la démonstration de la proposition 14, mais cette fois seule une des deux suites spectrales est dégénérée.

**LEMME 49.** Soit une  $A$ -algèbre tronquée  $B$ . Considérons l'ordre  $\alpha$  de  $A$ , l'ordre  $\beta$  de  $B$  et les nombres

$$d_n = \alpha + (n+1) d_{n-1}^3 \quad \text{avec} \quad d_{-1} = \beta.$$

Alors il existe une résolution simpliciale tronquée  $B_*$  avec l'ordre de  $B_n$  au plus égal à  $d_n$ .

*Démonstration.* On commence la construction pas-à-pas avec une  $A$ -algèbre tronquée modèle  $B_0$  du type suivant (voir le lemme 13)

$$B_0 = A [X_1, \dots, X_\beta]_{\beta, \beta, \dots, \beta}^{1, 2, \dots, \beta}$$

algèbre tronquée dont l'ordre est le suivant

$$dB_0 = \alpha + \beta(\beta+1)/2 \leq \alpha + \beta^3 = d_0.$$

Supposons maintenant avoir fait la construction pas-à-pas jusqu'à  $B_{n-1}$  dont l'ordre est au plus égal à  $d_{n-1}$ . Cette algèbre tronquée modèle a au plus  $d_{n-1}$  composantes

$$(X_i, s_i, t_i) \quad \text{avec} \quad s_i \leq d_{n-1} \quad \text{et} \quad t_i \leq d_{n-1}.$$

Les composantes de  $B_n$  sont obtenues soit pour des raisons de dégénérescence, soit pour des raisons d'acyclicité.

Par dégénérescence, les composantes de  $B_{n-1}$  se retrouvent comme composantes de  $B_n$  et cela au plus de  $n$  manières différentes dans chaque cas. Cela fait introduire un premier lot d'au plus  $nd_{n-1}$  composantes de  $B_n$  avec  $s_i$  et  $t_i$  toujours bornés par  $d_{n-1}$ . Il reste à obtenir l'acyclicité en degré  $n-1$  de  $F^k B_*$  pour  $1 \leq k \leq d_{n-1}$ . Pour chaque  $k$  il faut alors une composante de  $B_n$  avec  $s_i$  égal à  $k$  et  $t_i$  égal à  $d_{n-1}$ . L'hypothèse initiale  $A/F^1 A \cong B/F^1 B$  permet de négliger le cas  $k=0$  où il ne serait plus possible de

tronquer. Cela fait introduire un second lot de  $d_{n-1}$  composantes de  $B_n$  avec  $s_i$  et  $t_i$  toujours bornés par  $d_{n-1}$ . Finalement la  $A$ -algèbre tronquée modèle  $B_n$  a au plus  $(n+1)d_{n-1}$  composantes

$$(X_i, s_i, t_i) \quad \text{avec} \quad s_i \leq d_{n-1} \quad \text{et} \quad t_i \leq d_{n-1}.$$

Il est alors clair que l'ordre de  $B_n$  est au plus égal à l'entier  $d_n$ .

Voici maintenant le résultat dont la proposition 17 est un cas particulier.

**PROPOSITION 50.** *Soient une  $A$ -algèbre tronquée  $B$  et un  $B$ -module tronqué  $W$ . Alors la condition suivante est satisfaite*

$$F_n^p(A, B, W) \cong 0 \quad \text{si} \quad p \geq \pi_n(dA, dB) + dW$$

pour une fonction  $\pi_n$  bien choisie.

*Démonstration.* Grâce à des suites exactes élémentaires et à des décalages de graduation, on peut se ramener au cas où  $W$  est filtré de manière triviale. Grâce à la suite spectrale du lemme 48 appliquée à la résolution simpliciale tronquée du lemme 49, on peut se ramener au cas d'une  $A$ -algèbre tronquée modèle  $B$  à plusieurs composantes. Grâce aux suites exactes de Jacobi-Zariski (voir la proposition 43) concernant les algèbres filtrées suivantes

$$A \rightarrow A[X_1]_{t_1}^{s_1} \rightarrow A[X_1, X_2]_{t_1, t_2}^{s_1, s_2} \rightarrow \dots \rightarrow A[X_1, \dots, X_m]_{t_1, \dots, t_m}^{s_1, \dots, s_m}$$

on peut se ramener au cas d'une  $A$ -algèbre tronquée modèle  $B$  à une seule composante. Grâce à un changement de base (voir la proposition 44) on peut se ramener au cas où l'anneau de base  $A$  est l'anneau des entiers rationnels. Il reste donc à démontrer ce cas particulier, qui prend la forme suivante d'après la remarque 21.

L'anneau des entiers rationnels  $Z$  et les groupes abéliens  $W$  sont gradués de manière triviale ci-dessous.

**LEMME 51.** *Soient deux entiers  $s$  et  $t$  strictement positifs. Alors la condition suivante est satisfaite*

$$G_n^p(Z, Z[X]_t^s, W) \cong 0 \quad \text{si} \quad p \geq \pi_n$$

pour un entier  $\pi_n$  bien choisi, indépendamment de l'ensemble  $X$  et du groupe abélien  $W$ .

*Démonstration.* Grâce à une suite exacte de Jacobi-Zariski, on peut remplacer la  $Z$ -algèbre  $Z[X]_t^s$  par la  $Z[X]_t^s$ -algèbre  $Z$ . Utilisons maintenant le théorème de structure des groupes abéliens de type fini. À l'aide de limites inductives (voir le lemme 3.24) puis de sommes directes (voir le lemme 3.23) enfin de suites exactes (voir le lemme 3.22) on peut se ramener au cas  $W = Z$ . Il reste donc à démontrer le cas particulier suivant de la proposition 17.

**LEMME 52.** *Soient deux entiers  $s$  et  $t$  strictement positifs. Alors la condition suivante est satisfaite*

$$G_n^p(Z[X]_t^s, Z, Z) \cong 0 \quad \text{si} \quad p \geq p_n$$

*pour un entier  $p_n$  bien choisi, indépendamment de l'ensemble  $X$ .*

*Démonstration.* Utilisons les modules de la définition 35

$$P_n^k(Z[X]_t^s, Z, Z) \quad \text{et} \quad Q_n^k(Z[X]_t^s, Z, Z).$$

Ils sont construits à l'aide d'un idéal simplicial  $J_*$  qui peut être obtenu gradué dans ce cas particulier. Les modules ci-dessus sont donc gradués de manière naturelle. Démontrons le lemme par induction sur  $n$ . L'hypothèse d'induction s'exprime de la manière suivante: pour  $m < n$ , les modules gradués

$$H_m(Z[X]_t^s, Z, Z) \cong H_m[J_*/J_*^2]$$

sont bien tronqués (c'est-à-dire tronqués avec un ordre indépendant de  $X$ ). Par la théorie simpliciale des produits symétriques (voir la proposition 13.8) on démontre ce qui suit. Les modules gradués

$$P_{n-1}^k(Z[X]_t^s, Z, Z) \cong H_{n-1}[J_*^k/J_*^{k+1}]$$

sont bien tronqués pour tout entier  $k$ . Grâce aux lemmes 36 et 38, le module gradué suivant est par conséquent bien tronqué

$$Q_{n-1}^2(Z[X]_t^s, Z, Z).$$

Utilisons encore une fois le lemme 36. Le module gradué intéressant

$$P_n^1(Z[X]_t^s, Z, Z) \cong H_n(Z[X]_t^s, Z, Z)$$

est donc bien tronqué si le module gradué élémentaire

$$Q_n^0(Z[X]_t^s, Z, Z) \cong \text{Tor}_n^{Z[X]_t^s}(Z, Z)$$

est aussi bien tronqué. Mais ce dernier point est évident. En effet le  $Z[X]_t^s$ -module  $Z$  possède toujours une résolution libre graduée dont le  $n$ -ème terme est un module gradué tronqué dont l'ordre est égal à  $st(n+1)$ . Cela achève la démonstration de la proposition 17.

*Département de Mathématiques  
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne  
26, Avenue de Cour  
1007 Lausanne – Suisse.*

Reçu le 17 décembre 1973.