

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 49 (1974)

**Artikel:** Über den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen  
**Autor:** Huber, Heinz  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-37993>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen

HEINZ HUBER (Basel)

## 1. Einleitung

1.1. Es sei  $M_g$  die Menge der kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht  $g \geq 2$ . Auf jeder Fläche  $\mathcal{F} \in M_g$  gibt es genau eine Riemannsche Metrik mit konstanter Krümmung  $-1$ , welche mit der konformen Struktur von  $\mathcal{F}$  verträglich ist. Es sei  $\Delta_{\mathcal{F}}$  der Laplace-Beltrami-Operator bezüglich dieser Metrik und  $\lambda_1(\mathcal{F})$  der kleinste positive Eigenwert von  $\Delta_{\mathcal{F}}$ . (Das Spektrum von  $\Delta_{\mathcal{F}}$  ist diskret;  $\lambda_0 = 0$  ist ein einfacher Eigenwert, alle übrigen Eigenwerte sind positiv [1]). In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden:

$$(A) \quad \Lambda_1(g) = \sup \{ \lambda_1(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \in M_g \} < \infty.$$

$$(B) \quad \lim_{g \rightarrow \infty} \overline{\Lambda_1(g)} \leq \frac{1}{4}.$$

1.2. Wir führen jetzt den Beweis von A und B auf zwei Hilfssätze zurück.

Die Differentialgleichung

$$(x^2 - 1) F''(x) + 2xF'(x) + \mu F(x) = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

besitzt genau eine Lösung

$$F_{\mu} \in C^2[1, \infty), \quad F_{\mu}(1) = 1. \quad (2)$$

Für  $\mu > \frac{1}{4}$  besitzt  $F_{\mu}$  Nullstellen in  $[1, \infty)$ . (Siehe 3.1). Es sei  $a(\mu) > 1$  die kleinste dieser Nullstellen und

$$q(\mu) = \left( \int_1^{a(\mu)} F_{\mu} dx \right)^2 \bigg/ \int_1^{a(\mu)} F_{\mu}^2 dx. \quad (3)$$

Wir werden zeigen:

LEMMA 1. Für  $\mu > \frac{1}{4}$ ,  $\mathcal{F} \in M_g$ ,  $g \geq 2$  gilt:

$$\mu \geq \lambda_1(\mathcal{F}) \left( 1 - \frac{q(\mu)}{2(g-1)} \right).$$

LEMMA 2. Für  $\mu > 2$  gilt:  $q(\mu) \leq 6\mu/(\mu-2)^2$ .

Wegen Lemma 2 gibt es eine Zahl  $\mu_0 > 2$  derart, dass

$$1 - \frac{q(\mu_0)}{2(g-1)} \geq \frac{1}{2} \quad \forall g \geq 2.$$

Dann folgt aber aus Lemma 1:

$$\lambda_1(\mathcal{F}) \leq 2\mu_0 \quad \forall \mathcal{F} \in M_g, \quad g \geq 2.$$

Damit ist A bewiesen. Wegen

$$1 - \frac{q(\mu)}{2(g-1)} > 0 \quad \forall g > 1 + \frac{q(\mu)}{2}, \quad \mu > \frac{1}{4}$$

folgt aus Lemma 1:

$$\Lambda_1(g) \leq \frac{\mu}{1 - \frac{q(\mu)}{2(g-1)}} \quad \forall g > 1 + \frac{q(\mu)}{2}, \quad \mu > \frac{1}{4}.$$

Daraus ergibt sich:  $\lim_{g \rightarrow \infty} \Lambda_1(g) \leq \frac{1}{4}$ .

## 2. Beweis von Lemma 1

2.1. Wir betrachten ein festes  $\mu > \frac{1}{4}$ , schreiben  $F, a$  für  $F_\mu, a(\mu)$  und definieren:

$$f = \begin{cases} F^{1+\varepsilon} & \text{in } [1, a] \\ 0 & \text{in } [a, \infty), \end{cases} \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (4)$$

Dann gilt:

$$f \in C^1[1, \infty), \quad (5)$$

$f''$  ist stetig in  $[1, \infty)$  mit Ausnahme von  $a$ . An dieser Stelle ist aber  $f''(x) = O(|x-a|^{-(1-\varepsilon)})$  und somit gilt:

$$f'' \in \mathcal{L}^1[1, \infty). \quad (6)$$

Daher kann man mit dem Glättungsverfahren von Friedrichs eine Folge  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

$$f_n \in C^\infty[1, \infty), \quad f_n = 0 \quad \text{in } [2a, \infty), \quad (7)$$

$$f_n \rightarrow f, f'_n \rightarrow f' \quad \text{gleichmässig in } [1, \infty), \quad (8)$$

$$\int_1^\infty |f''_n - f''| dx \rightarrow 0. \quad (9)$$

Definieren wir

$$L = (x^2 - 1) \frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx}, \quad (10)$$

so gilt:

$$L(f) \in \mathcal{L}^1[1, \infty), \quad (11)$$

$$\int_1^\infty |L(f_n) - L(f)| dx \rightarrow 0. \quad (12)$$

Aus (4) und der Differentialgleichung (1) ergibt sich leicht:

$$L(f) + (1 + \varepsilon) \mu f \geq 0 \quad \text{in } [1, \infty). \quad (13)$$

2.2. Mit Hilfe von  $f, f_n$  definieren wir gewisse Funktionen in der hyperbolischen Ebene. Als Modell dieser Ebene wählen wir den Einheitskreis

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

versehen mit der Riemannschen Metrik

$$ds^2 = 4 \frac{|dz|^2}{(1 - |z|^2)^2},$$

welche die Krümmung  $-1$  besitzt. Für die hyperbolische Distanz  $\varrho(0, z)$  ergibt sich dann:

$$\cos \varrho(0, z) = \frac{1 + |z|^2}{1 - |z|^2}. \quad (14)$$

Führen wir im Nullpunkt geodätische Polarkoordinaten

$$\varrho = \varrho(0, z), \quad \psi = \arg z$$

ein, so wird

$$ds^2 = d\varrho^2 + \sin^2 \varrho d\psi^2.$$

Daher erhält man für das Flächenelement und den Laplace-Beltrami-Operator:

$$d\omega = \sin \varrho d\varrho d\psi \quad (15)$$

$$-\Delta = \frac{1}{\sin \varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \sin \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\sin^2 \varrho} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}. \quad (16)$$

Jetzt definieren wir

$$\vartheta(z) = f(\cos \varrho(0, z)), \quad \vartheta_n(z) = f_n(\cos \varrho(0, z)). \quad (17)$$

Da  $\text{Cos } \varrho$  wegen (14) eine  $C^\infty$ -Funktion auf  $H$  ist, so folgt jetzt aus den in 2.1 aufgezählten Eigenschaften von  $f, f_n$  und aus (15), (16):

$$\vartheta \in C_0^1(H), \quad \vartheta \in C^2(H-\gamma), \quad \gamma = \left\{ z \mid |z| = \left( \frac{a-1}{a+1} \right)^{1/2} \right\}, \quad (18)$$

$$\Delta \vartheta = -(Lf)(\text{Cos } \varrho) \in \mathcal{L}^1(H), \quad (19)$$

$$\Delta \vartheta \leq (1+\varepsilon) \mu \vartheta \quad \text{in } H-\gamma, \quad (20)$$

$$\vartheta_n \in C_0^\infty(H), \quad (21)$$

$$\vartheta_n \rightarrow \vartheta \quad \text{gleichmässig auf } H, \quad (22)$$

$$\int_H |\Delta \vartheta_n - \Delta \vartheta| d\omega \rightarrow 0, \quad (23)$$

$$\int_H \vartheta d\omega = 2\pi \int_1^a F^{1+\varepsilon} dx. \quad (24)$$

2.3. Es sei jetzt  $\mathcal{F} \in M_g, g \geq 2$ . Dann wird  $H$  zur universellen Ueberlagerungsfläche von  $\mathcal{F}$  durch eine konforme Projektion  $\Pi: H \rightarrow \mathcal{F}$ . Mit dieser Projektion können wir die Differentialgeometrie von  $H$  auf  $\mathcal{F}$  verpflanzen. Der Einfachheit halber bezeichnen wir den Laplace-Operator und das Flächenelement auf  $\mathcal{F}$  wieder mit  $\Delta$  und  $d\omega$ . Die zur Projektion  $\Pi$  gehörige Deckgruppe  $\Gamma$  hat folgende Eigenschaften:

(I) Die Elemente  $T \in \Gamma$  sind Isometrien von  $H$ . Verstehen wir unter  $T\vartheta$  die Funktion  $z \rightarrow \vartheta(T(z))$ , so gilt daher

$$\Delta T = T\Delta \quad \forall T \in \Gamma.$$

(II)  $\Gamma$  wirkt stark diskontinuierlich auf  $H$ : Sind  $K_1, K_2$  Kompakta in  $H$ , so ist die Menge

$$\{T \in \Gamma \mid T(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset\}$$

endlich.

(III)  $\Gamma$  besitzt einen kompakten Fundamentalbereich  $A \subset H$ , und es gilt:

$$\int_A d\omega = \int_{\mathcal{F}} d\omega = 4\pi(g-1). \quad (25)$$

Da  $\vartheta, \vartheta_n$  kompakten Support in  $H$  besitzen, können wir nun wegen (II) definieren:

$$\Theta = \sum_{T \in \Gamma} T\vartheta, \quad \Theta_n = \sum_{T \in \Gamma} T\vartheta_n. \quad (26)$$

Diese Funktionen sind offensichtlich automorph bezüglich der Deckgruppe  $\Gamma$ . Daher gibt es auf  $\mathcal{F}$  eindeutige Funktionen  $\varphi, \varphi_n$  derart, dass

$$\varphi \circ \Pi = \Theta, \quad \varphi_n \circ \Pi = \Theta_n. \quad (27)$$

Aus (27), (26) und (18)–(23) ergibt sich nun:

$$\varphi \in C^1(\mathcal{F}), \quad \varphi \in C^2(\mathcal{F} - \Pi(\gamma)), \quad (28)$$

( $\Pi(\gamma)$  ist eine geschlossene Kurve auf  $\mathcal{F}$ , welche endlich viele mehrfache Punkte besitzen kann),

$$\Delta\varphi \leq (1 + \varepsilon) \mu\varphi \quad \text{auf } \mathcal{F} - \Pi(\gamma), \quad (29)$$

$$\Delta\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}), \quad (30)$$

$$\varphi_n \in C^\infty(\mathcal{F}), \quad (31)$$

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \quad \text{gleichmässig auf } \mathcal{F} \quad (32)$$

$$\int_{\mathcal{F}} |\Delta\varphi_n - \Delta\varphi| d\omega \rightarrow 0. \quad (33)$$

Das beruht alles, wie leicht einzusehen, auf den Eigenschaften (I)–(III) von  $\Gamma$  und auf der Tatsache, dass  $\vartheta, \vartheta_n$  kompakten Support in  $H$  besitzen. Aus (32), (33) ergibt sich noch

$$\int_{\mathcal{F}} \varphi_n \Delta\varphi_n d\omega \rightarrow \int_{\mathcal{F}} \varphi \Delta\varphi d\omega, \quad (34)$$

denn:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{F}} \varphi_n \Delta\varphi_n d\omega - \int_{\mathcal{F}} \varphi \Delta\varphi d\omega \right| &= \left| \int_{\mathcal{F}} \varphi_n (\Delta\varphi_n - \Delta\varphi) d\omega + \int_{\mathcal{F}} \Delta\varphi (\varphi_n - \varphi) d\omega \right| \\ &\leq \|\Delta\varphi_n - \Delta\varphi\|_1 \cdot \sup_{\mathcal{F}} |\varphi_n| + \|\Delta\varphi\|_1 \cdot \sup_{\mathcal{F}} |\varphi_n - \varphi|. \end{aligned}$$

2.4. Für den Beweis von Lemma 1 ist es von grosser Bedeutung, dass man die Integrale über  $\mathcal{F}$  von  $\varphi$  und  $\varphi^2$  recht explizit berechnen bzw. abschätzen kann:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} \varphi d\omega &= \int_A \Theta d\omega = \sum_{T \in \Gamma} \int_A T\vartheta d\omega \\ &= \sum_{T \in \Gamma} \int_{T(A)} \vartheta d\omega = \int_H \vartheta d\omega. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir wegen (24)

$$\int_{\mathcal{F}} \varphi \, d\omega = 2\pi \int_1^a F^{1+\varepsilon} \, dx \quad (35)$$

Es wird im folgenden sehr wichtig sein, dass der Wert dieses Integrals unabhängig ist von der Wahl der Fläche  $\mathcal{F} \in M_g$ . Das Integral von  $\varphi^2$  ist dagegen von  $\mathcal{F}$  abhängig; man kann aber eine von  $\mathcal{F}$  unabhängige untere Schranke angeben: Wegen  $\vartheta \geq 0$  gilt nämlich

$$\Theta^2 = \left( \sum_{T \in \Gamma} T\vartheta \right)^2 = \sum_{S, T \in \Gamma} (S\vartheta)(T\vartheta) \geq \sum_{T \in \Gamma} T\vartheta^2.$$

Daraus folgt nun wie oben:

$$\int_{\mathcal{F}} \varphi^2 \, d\omega \geq 2\pi \int_1^a F^{2(1+\varepsilon)} \, dx. \quad (36)$$

2.5. Der Eigenwert  $\lambda_1(\mathcal{F})$  kann bekanntlich durch eine Extremaleigenschaft charakterisiert werden (siehe z.B. [1]):

$$\int_{\mathcal{F}} \psi \Delta \psi \, d\omega \geq \lambda_1(\mathcal{F}) \int_{\mathcal{F}} \psi^2 \, d\omega \quad (37)$$

$$\forall \psi \in C^\infty(\mathcal{F}), \quad \int_{\mathcal{F}} \psi \, d\omega = 0 \quad (38)$$

Wegen (31) und (25) erfüllt

$$\psi = \varphi_n - \alpha_n, \quad \alpha_n = \frac{1}{4\pi(g-1)} \int_{\mathcal{F}} \varphi_n \, d\omega$$

die Voraussetzungen (38). Somit folgt aus (37) wegen  $\int_{\mathcal{F}} \Delta \varphi_n \, d\omega = 0$ :

$$\int_{\mathcal{F}} \varphi_n \Delta \varphi_n \, d\omega \geq \lambda_1(\mathcal{F}) \left( \int_{\mathcal{F}} \varphi_n^2 \, d\omega - \frac{1}{4\pi(g-1)} \left( \int_{\mathcal{F}} \varphi_n \, d\omega \right)^2 \right).$$

Für  $n \rightarrow \infty$  folgt daraus wegen (32) und (34):

$$\int_{\mathcal{F}} \varphi \Delta \varphi \, d\omega \geq \lambda_1(\mathcal{F}) \left( \int_{\mathcal{F}} \varphi^2 \, d\omega - \frac{1}{4\pi(g-1)} \left( \int_{\mathcal{F}} \varphi \, d\omega \right)^2 \right). \quad (39)$$

Wegen  $\varphi \geq 0$  und (29) gilt aber

$$(1+\varepsilon) \mu \int_{\mathcal{F}} \varphi^2 d\omega \geq \int_{\mathcal{F}} \varphi \Delta \varphi d\omega.$$

Somit folgt aus (39):

$$(1+\varepsilon) \mu \geq \lambda_1(\mathcal{F}) \left( 1 - \frac{1}{4\pi(g-1)} \frac{\left( \int_{\mathcal{F}} \varphi d\omega \right)^2}{\int_{\mathcal{F}} \varphi^2 d\omega} \right)$$

Daraus und aus (35), (36) ergibt sich:

$$(1+\varepsilon) \mu \geq \lambda_1(\mathcal{F}) \left( 1 - \frac{1}{2(g-1)} \frac{\left( \int_1^a F^{1+\varepsilon} dx \right)^2}{\int_1^a F^{2(1+\varepsilon)} dx} \right).$$

Jetzt können wir noch  $\varepsilon$  gegen 0 gehen lassen und haben damit Lemma 1 bewiesen.

### 3. Beweis von Lemma 2

3.1.  $F_\mu$  ist eine Legendresche Funktion erster Art. Man sieht das sofort, wenn man die Differentialgleichung (1) in der Legendreschen Normalform schreibt:

$$(1-x^2) F'' - 2xF' + \nu(\nu+1)F = 0$$

$$\nu = -\frac{1}{2} + i\kappa, \quad \kappa = (\mu - \frac{1}{4})^{1/2} > 0 \quad \text{für } \mu > \frac{1}{4}.$$

Die einzige Lösung  $F \in C^2[1, \infty)$  mit  $F(1)=1$  ist bekanntlich die Legendresche Funktion erster Art  $P_\nu$ :

$$F_\mu = P_\nu. \tag{40}$$

Aus der Darstellung (38) in [2] pag. 208 ergibt sich leicht:

$$F_\mu(x) = cx^{-1/2} (\cos(\kappa \log(2x) + \alpha) + O(x^{-2})), \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$c = \left( 2 \frac{Tg\pi\kappa}{\pi\kappa} \right)^{1/2}, \quad \alpha = \arg \frac{\Gamma(i\kappa)}{\Gamma(\frac{1}{2} + i\kappa)}, \quad \mu > \frac{1}{4}.$$

Daraus folgt, dass  $F_\mu$  für  $\mu > \frac{1}{4}$  Nullstellen in  $[1, \infty)$  besitzt. (Aus der Integraldarstellung (122) in [2] pag. 272 ergibt sich, dass  $F_\mu$  für  $0 < \mu \leq \frac{1}{4}$  keine Nullstellen in  $[1, \infty)$  besitzt).



3.2. Wir betrachten nun ein festes  $\mu > \frac{1}{4}$  und schreiben wieder  $F, a$  für  $F_\mu, a(\mu)$ . Wir haben dann

$$F(1)=1, \quad F(a)=0, \quad F>0 \quad \text{in} \quad [1, a), \quad a>1. \quad (41)$$

Aus der Differentialgleichung (1) berechnet man sofort:

$$F'(1) = -\frac{\mu}{2} \quad (42)$$

$$F''(1) = \frac{1}{8}\mu(\mu+2) \quad (43)$$

$$F''(a) = -\frac{2a}{a^2-1} F'(a). \quad (44)$$

Aus (1) und (41) folgt

$$\frac{d}{dx}(x^2-1)F' < 0 \quad \text{in} \quad (1, a)$$

und daher

$$(x^2-1)F' < 0 \quad \text{in} \quad (1, a].$$

Daraus ergibt sich wegen (42):

$$F' < 0 \quad \text{in} \quad [1, a]. \quad (45)$$

3.3. Wir zeigen jetzt:

$$F'' \geq 0 \quad \text{in} \quad [1, a]. \quad (46)$$

Zunächst folgt aus (43)–(45):

$$F''(1) > 0, \quad F''(a) > 0.$$

Gäbe es nun  $x_0 \in (1, a)$  mit  $F''(x_0) < 0$ , so gäbe es  $x_1, x_2$  derart, dass

$$\begin{aligned} 1 &< x_1 < x_0 < x_2 < a, \\ F''(x_1) &= F''(x_2) = 0, \\ F'' &< 0 \quad \text{in} \quad (x_1, x_2). \end{aligned} \quad (47)$$

Dann gäbe es aber

$$\xi \in (x_1, x_2) \quad (48)$$

mit  $F'''(\xi) = 0$ . Aus der Differentialgleichung (1) folgt:

$$4\xi F''(\xi) = -(\mu+2)F'(\xi).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist wegen (47), (48) negativ, die rechte Seite aber positiv wegen (45). Damit ist (46) bewiesen.

3.4. Aus (42) und (46) ergibt sich

$$F'(x) \geq -\frac{\mu}{2} \quad \text{in } [1, a]$$

und somit wegen  $F(1)=1$ :

$$F(x) \geq 1 - \frac{\mu}{2}(x-1) \quad \text{in } [1, a]. \quad (49)$$

Daraus ergibt sich für  $x=a$ :

$$1 + \frac{2}{\mu} \leq a.$$

Da die rechte Seite der Ungleichung (49) im Teilintervall  $[1, 1+2/\mu]$  nicht negativ ist, so folgt aus (49):

$$\int_1^a F^2 dx \geq \int_1^{1+2/\mu} F^2 dx \geq \int_1^{1+2/\mu} \left(1 - \frac{\mu}{2}(x-1)\right)^2 dx = \frac{2}{3\mu}. \quad (50)$$

Aus (1) und (46) folgt

$$2xF' + \mu F \leq 0 \quad \text{in } [1, a].$$

Daraus ergibt sich wegen  $F(1)=1$ :

$$F(x) \leq x^{-\mu/2} \quad \text{in } [1, a].$$

Somit wird

$$\int_1^a F dx \leq \int_1^a x^{-\mu/2} dx < \int_1^\infty x^{-\mu/2} dx = \frac{2}{\mu-2} \quad \text{für } \mu > 2.$$

Daraus und aus (50) folgt Lemma 2.

#### LITERATUR

- [1] BERGER, M., GAUDUCHON, P., und MAZET, E., *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics 194 (Springer Verlag 1971).
- [2] HOBSON, E. W., *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics* (Cambridge University Press 1931).

Eingegangen 21. Januar 1974