

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 48 (1973)  
  
**Artikel:** Über die Isometriegruppe bei kompakten Mannigfaltigkeiten negative Krümmung  
**Autor:** Hof, Hans-Christoph Im  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-37141>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über die Isometriegruppe bei kompakten Mannigfaltigkeiten negative Krümmung

HANS-CHRISTOPH IM HOF (Basel)

## 1. Einleitung

Wir betrachten eine kompakte  $n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit  $M$ , deren Schnittkrümmung durchwegs negativ ist. Für solche Mannigfaltigkeiten ist die Isometriegruppe  $I(M)$  endlich. Wir werden dies mit einer Methode beweisen, die zusätzlich für die Ordnung von  $I(M)$  eine Abschätzung nach oben erlaubt.

Der hyperbolische Raum  $H = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid u_n > 0\}$  wird mit einer geeigneten Metrik versehen, sodass er als universelle Riemannsche Überlagerungsmannigfaltigkeit von  $M$  gewählt werden kann.  $r$  disjunkte Kugeln vom gleichen Radius werden im cartesischen Produkt  $H^{n+1}$  für jede natürliche Zahl  $r \leq \text{ord } I(M)$  konstruiert, die alle in einer gewissen grösseren Kugel liegen. Ein Vergleich der Kugelvolumen liefert eine Abschätzung für  $r$ , also auch für  $\text{ord } I(M)$ .

Dieses Verfahren wurde zuerst von H. Huber durchgeführt und wird in [4] für kompakte Mannigfaltigkeiten der Krümmung  $-1$  beschrieben.

In der Abschätzung für  $\text{ord } I(M)$  treten folgende Grössen auf:

- Die Dimension  $n$ . – Der Durchmesser  $\delta$ . – Die Schranken der Krümmung. Da  $M$  kompakt ist, existieren Zahlen  $a, b$  mit  $0 < a \leq b$ , sodass die Krümmung im Intervall  $[-b^2, -a^2]$  variiert.
- Die Zahl  $\lambda = \sup \{L(p) \mid p \in M\}$ , wobei  $L(p)$  das Infimum der Längen nicht-null-homotoper Wege mit Anfangs- und Endpunkt  $p$  bedeutet.

Setzen wir noch  $s_n(x) = \int_0^x \sin^{n-1} t \, dt$ , so lautet das Resultat

$$\text{ord } I(M) < \left( \frac{a^n s_n(b(6\delta + 5\lambda/4) + a^{-1}b \log 4(n-1))}{b^n s_n(a\lambda/4)} \right)^{n+1}.$$

Elementare Abschätzungen führen auf die Form

$$\text{ord } I(M) < (2^{n+2} b^{-n} \lambda^{-n} e^{8,5(n-1)b\delta} (4(n-1))^{a^{-1}b(n-1)})^{n+1}.$$

Die vorliegende Arbeit ist eine gekürzte Fassung meiner Dissertation. Herrn Professor Heinz Huber danke ich herzlich für die Anregung und die Hilfe, die ihr Zustandekommen ermöglicht haben.

## 2. Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung

**2.1.** Es sei  $M$  eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  mit

durchwegs negativer Schnittkrümmung. Aus der Kompaktheit folgt die Vollständigkeit von  $M$ , sowie die Existenz von zwei Zahlen  $a, b$  mit  $0 < a \leq b$  derart, dass die Krümmung zwischen den Schranken  $-b^2$  und  $-a^2$  liegt.

Wir werden universelle Riemannsche Überlagerungen von  $M$  betrachten. Dabei treten einfach zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten auf, deren Krümmungen ebenfalls zwischen den Schranken  $-b^2$  und  $-a^2$  liegen. Zu Vergleichszwecken werden wir auch den hyperbolischen Raum konstanter Krümmung heranziehen. Dieser ist eine weitere einfach zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit negativer Krümmung.

In den folgenden Abschnitten stellen wir für die vorkommenden Mannigfaltigkeiten einige Eigenschaften zusammen.

**2.2.** Es sei  $N$  eine einfach zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit negativer Krümmung. Unter einer Geodätischen verstehen wir eine differenzierbare Kurve  $\gamma: R \rightarrow N$ , deren Tangentialfeld  $\dot{\gamma}$  ein Parallelfeld längs  $\gamma$  ist. Es gilt  $\|\dot{\gamma}(t)\| = \text{const}$ ; falls  $\|\dot{\gamma}(t)\| \neq 0$  heisst  $\gamma$  eine eigentliche Geodätische. Wir bezeichnen mit  $N_q$  den Tangentialraum von  $N$  im Punkte  $q$ . Zu jedem  $v \in N_q$  gibt es genau eine Geodätische  $\gamma_v: R \rightarrow N$  mit  $\gamma_v(0) = q$  und  $\dot{\gamma}_v(0) = v$ . Damit wird die Exponentialabbildung  $\exp_q: N_q \rightarrow N$  definiert durch  $\exp_q v = \gamma_v(1)$ . Für die Distanz der Punkte  $q$  und  $\exp_q v$  gilt

$$d(q, \exp_q v) = \|v\| = L(\gamma_v | [0, 1]),$$

wobei  $L$  die Länge eines Kurvensegmentes bedeutet.

Die Exponentialabbildung  $\exp_q: N_q \rightarrow N$  ist in unserem Fall stets diffeomorph, insbesondere sind die eigentlichen Geodätischen injektiv.

**2.3.** Zwei Geodätische  $\gamma, \mu: R \rightarrow N$  sollen äquivalent heissen ( $\gamma \sim \mu$ ), wenn es Zahlen  $a \neq 0, b$  gibt, sodass für alle  $t \in R$  gilt  $\mu(t) = \gamma(at + b)$ . Ist eine von zwei äquivalenten Geodätischen eigentlich, so auch die andere.

Besteht zwischen einer Isometrie  $T \in I(N)$  und einer eigentlichen Geodätischen  $\gamma: R \rightarrow N$  die Beziehung  $T(\gamma(t)) = \gamma(t + a)$ , so heisst  $T$  eine Translation längs  $\gamma$ .

#### LEMMA

*Vor.:  $T \in I(N)$ ,  $\gamma_1, \gamma_2: R \rightarrow N$  eigentliche Geodätische,*

$$T(\gamma_i(t)) = \gamma_i(t + a_i) \quad \text{für } i = 1, 2.$$

*Beh.: (1) Aus  $a_1 a_2 = 0$  folgt  $a_1 = a_2 = 0$ ,*

*(2) Aus  $a_1 a_2 \neq 0$  folgt  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ .*

Der Beweis lässt sich gleich wie im Fall konstanter Krümmung führen. (vgl. [4]). Für Isometrien ohne Fixpunkte vergleiche man [6].

**2.4.** Wir verwenden den hyperbolischen Raum konstanter Krümmung als Vergleichsmannigfaltigkeit, weil sich in ihm einige Rechnungen sehr explizit durchführen lassen. Er wird realisiert durch den Halbraum  $H = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid u_n > 0\}$  mit den Koordinatenfunktionen  $x_i(u_1, \dots, u_n) = u_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , und dem Masstensor  $g(\partial/\partial x_i, \partial/\partial x_k) = a^{-2} x_n^{-2} \delta_{ik}$  und erhält durch diese Definition die konstante Krümmung  $-a^2$ .

Für die Distanz  $d(p, q)$  der Punkte  $p, q \in H$  gilt

$$\cos a d(p, q) = 1 + \frac{1}{2} x_n^{-1}(p) x_n^{-1}(q) \sum_{i=1}^n (x_i(p) - x_i(q))^2. \quad (1)$$

Daraus ergibt sich sofort

LEMMA 1 ([4])

*Vor.:*  $p, q \in H$ ,  $d(p, q) \leq \delta$ ,  $\delta > 0$ .

*Beh.:*  $\sum_{i=1}^{n-1} (x_i(p) - x_i(q))^2 < e^{2a\delta} (1 - e^{-a\delta})^2 x_n^2(q)$ .

Aus der Differentialgleichung für Geodätische ergibt sich

LEMMA 2

*Vor.:*  $p_0 = (0, \dots, 0, 1)$ ,  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow H$  Geodätische mit

$$\gamma(0) = p_0, \quad \dot{\gamma}(0) = \text{const} \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{p_0}.$$

*Beh.:* Für  $i = 1, \dots, n-1$  gilt  $x_i(\gamma(t)) = 0$ .

LEMMA 3

*Vor.:*  $p_0 = (0, \dots, 0, 1)$ ,  $v_1, \dots, v_{n-1} \in H_{p_0}$ ,

$$\det(x_i(\exp v_k))_{1 \leq i, k \leq n-1} \neq 0.$$

*Beh.:*  $v_1, \dots, v_{n-1}$ ,  $(\partial/\partial x_n)_{p_0}$  linear unabhängig.

Für den Beweis von Lemma 3 verweisen wir auf [4].

**2.5.** Betrachten wir eine Überlagerungsmannigfaltigkeit von  $M$  und daneben den hyperbolischen Raum der konstanten Krümmung  $-a^2$ , so haben wir eine Situation vor uns, in der wir den Vergleichssatz von Rauch anwenden können. Da keine konjugierten Punkte auftreten und alle vorkommenden Exponentialabbildungen diffeomorph sind, zitieren wir den Satz von Rauch gleich in einer sehr speziellen Fassung. (vgl. [3], p. 178ff., [5], p. 4f.).

SATZ

*Vor.:*  $H, N$  einfach zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten,



$\dim H = \dim N$ , Krümmung von  $H = -a^2$ , Krümmung von  $N \leq -a^2$ ,  $p \in H$ ,  $q \in N$ ,  $i: H_p \rightarrow N_q$  lineare Isometrie,  $\varphi = \exp_q \circ i \circ \exp_p^{-1}: H \rightarrow N$ ,  $I$  kompaktes Intervall,  $\gamma: I \rightarrow H$  stückweise differenzierbarer Weg,  $\nu = \varphi \circ \gamma: I \rightarrow N$ .  
 Beh.:  $L(\gamma) \leq L(\nu)$ .

### 3. Übertragung des Problems auf eine universelle Überlagerung

Es sei  $\sigma: N \rightarrow M$  eine feste universelle Riemannsche Überlagerung von  $M$ . In den folgenden Abschnitten werden wir die in der angekündigten Abschätzung vorkommenden Grössen von  $M$  in Beziehung setzen zu Grössen, die sich mittels  $N$  und der Deckgruppe  $\Sigma$  formulieren lassen.

**3.1.** Wir bezeichnen mit  $\Sigma^*$  den Normalisator von  $\Sigma$  in  $I(N)$ . Dann gilt der Satz

$$I(M) \cong \Sigma^*/\Sigma, \quad \text{also} \quad \text{ord } I(M) = [\Sigma^* : \Sigma].$$

**3.2.** Der Durchmesser von  $M$  ist definiert als die Zahl  $\delta = \sup \{d(p, q) \mid p, q \in M\}$ . Bezüglich der Überlagerung hat  $\delta$  folgende Bedeutung.

**SATZ.** Für alle  $p, q \in N$  gibt es ein  $S \in \Sigma$ , sodass  $d(p, Sq) \leq \delta$ .

**3.3.** Für  $p \in M$  bezeichnet  $\Omega'(p)$  die Menge der nicht-nullhomotopen Wege mit Anfangs- und Endpunkt  $p$ . Wir definieren

$$L(p) = \inf \{L(\gamma) \mid \gamma \in \Omega'(p)\} \quad \text{und}$$

$$\kappa = \inf \{L(p) \mid p \in M\}, \quad \lambda = \sup \{L(p) \mid p \in M\}.$$

Nun definieren wir eine Funktion auf  $N$ , die sich als die Zusammensetzung  $L \circ \sigma$  erweisen wird. Es sei  $\Sigma' = \Sigma \setminus \{\text{id}\}$ . Für  $q \in N$  setzen wir

$$f(q) = \inf \{d(q, Sq) \mid S \in \Sigma'\}.$$

In der Tat besteht zwischen  $f$  und  $L$  die Beziehung  $f = L \circ \sigma$ . Dies erlaubt uns, die Grössen  $\kappa$  und  $\lambda$  auf  $N$  zu interpretieren. Es gilt

$$\kappa = \inf \{f(q) \mid q \in N\}, \quad \lambda = \sup \{f(q) \mid q \in N\}. \quad (1)$$

Damit wird eine weitere Untersuchung von  $\kappa$  und  $\lambda$  möglich.

**SATZ 1.** Für alle  $q \in N$  gibt es ein  $S_0 \in \Sigma'$ , sodass  $d(q, S_0 q) = f(q)$ .

**Beweis.** Es existiert eine Folge  $\{S_k\}$  in  $\Sigma'$  mit  $d(q, S_k q) \rightarrow f(q)$ . Weil  $\Sigma$  stark dis-

kontinuierlich ist, existiert eine Teilfolge  $\{k_j\}$  und ein  $S_0 \in \Sigma'$  mit  $S_{k_j} = S_0$ , und es gilt  $d(q, S_0 q) = d(q, S_{k_j} q) \rightarrow f(q)$ , also  $d(q, S_0 q) = f(q)$ .

**SATZ 2.** *Es existieren Punkte  $q_0, q_1 \in N$ , sodass*

$$f(q_0) = \kappa, \quad f(q_1) = \lambda \quad \text{und} \quad d(q_0, q_1) \leq \delta.$$

*Beweis.* Gemäss 3.2. gibt es ein Kompaktum  $K \subset N$  mit  $\sigma(K) = M$ . Die stetige Funktion  $f$  nimmt in einem  $q_0 \in K$  ihr Minimum und in einem  $q'_1 \in K$  ihr Maximum bezüglich  $K$  an. Die so bestimmten Extrema sind auch bezüglich  $N$  extremal, denn es gilt  $f \circ S = f$  für alle  $S \in \Sigma$ . Mit (1) erhalten wir  $f(q_0) = \kappa$  und  $f(q'_1) = \lambda$ . Nach 3.2. können wir durch ein  $S \in \Sigma$  zu einem Punkt  $q_1 = Sq'_1$  übergehen, für welchen immer noch  $f(q_1) = \lambda$ , aber auch  $d(q_0, q_1) \leq \delta$  gilt.

**SATZ 3.** *Es gilt  $0 < \kappa \leq \lambda \leq 2\delta$ .*

*Beweis.* Zu  $q_0$  existiert nach Satz 1 ein Element  $S_0 \in \Sigma'$  mit  $d(q_0, S_0 q_0) = f(q_0) = \kappa$ . Weil  $\Sigma$  fixpunktfrei ist, und  $S_0 \neq \text{id}$ , gilt  $q_0 \neq S_0 q_0$ , also  $d(q_0, S_0 q_0) > 0$ .

Zu  $q \in N$  existiert ein Punkt  $q' \in N$  mit  $d(q, q') = \frac{1}{2}f(q)$ . Für alle  $S \in \Sigma'$  gilt  $f(q) \leq d(q, Sq) \leq d(q, Sq') + d(Sq', Sq) = \frac{1}{2}f(q) + d(q, Sq')$ , also  $d(q, Sq') \geq \frac{1}{2}f(q)$ . Zusammen mit  $d(q, q') = \frac{1}{2}f(q)$  folgt daraus  $\inf\{d(q, Sq') \mid S \in \Sigma\} = \frac{1}{2}f(q)$ . Aber  $\inf\{d(q, Sq') \mid S \in \Sigma\} = d(\sigma(q), \sigma(q')) \leq \delta$ . Daraus folgt  $f(q) \leq 2\delta$ , insbesondere  $\lambda = f(q_1) \leq 2\delta$ .

#### 4. Eine spezielle Überlagerung

**4.1.** Wir haben bisher eine beliebige universelle Überlagerung  $\sigma: N \rightarrow M$  studiert. Nun wollen wir den hyperbolischen Raum  $H$  zur Überlagerungsmannigfaltigkeit von  $M$  machen, und zwar so, dass der Punkt  $p_0 = (0, \dots, 0, 1) \in H$  eine ausgezeichnete Rolle spielt. Dazu konstruieren wir einen Diffeomorphismus  $\varphi: H \rightarrow N$ , der  $p_0$  auf einen ausgezeichneten Punkt von  $N$  abbildet, und versehen  $H$  mit derjenigen Metrik, die  $\varphi$  längentreu macht. So erhalten wir, indem wir  $\pi = \sigma \circ \varphi: H \rightarrow M$  setzen, die gesuchte Überlagerung.

**4.2.** Gemäss 3.3. gibt es einen Punkt  $q_0 \in N$  und eine Decktransformation  $S_0 \in \Sigma'$ , sodass  $d(q_0, S_0 q_0) = \kappa$ . Ferner sei  $v$  die eindeutig bestimmte Geodätische mit  $v(0) = q_0$  und  $v(1) = S_0 q_0$ . Es gilt nach 2.2.  $\|\dot{v}(0)\| = \kappa$ .

Daneben betrachten wir den in 2.4. eingeführten hyperbolischen Raum  $H$  mit der Metrik  $g$ , die zur konstanten Krümmung  $-a^2$  führt. In  $H$  greifen wir den Punkt  $p_0 = (0, \dots, 0, 1)$  und den Tangentialvektor  $(\partial/\partial x_n)_{p_0}$  heraus.

**SATZ.** *Es existiert ein Diffeomorphismus  $\varphi: H \rightarrow N$  mit*

- (1)  $\varphi(p_0) = q_0$ ,
  - (2)  $\varphi_{p_0}(\alpha\kappa(\partial/\partial x_n)_{p_0}) = \dot{\gamma}(0)$ ,
  - (3) Für alle  $p, q \in H$  gilt  $d(p, q) \leq d(\varphi(p), \varphi(q))$ .
- (Mit  $\varphi_p$  wird das Differential von  $\varphi$  in  $p$  bezeichnet).

*Beweis.* Die Exponentialabbildungen  $\exp_{p_0}: H_{p_0} \rightarrow H$  und  $\exp_{q_0}: N_{q_0} \rightarrow N$  sind diffeomorph. Zwischen  $H_{p_0}$  und  $N_{q_0}$  wählen wir eine lineare Isometrie  $i$ , die  $\alpha\kappa(\partial/\partial x_n)$  in  $\dot{\gamma}(0)$  überführt. Die Zusammensetzung  $\varphi = \exp_{q_0} \circ i \circ \exp_{p_0}^{-1}$  liefert den gewünschten Diffeomorphismus.

Es gilt  $\varphi(p_0) = (\exp_{q_0} \circ i)(0) = \exp_{q_0} 0 = q_0$ .

Zum Beweis von (2) zeigen wir zuerst  $\varphi_{p_0} = i$ . Mit  $v \in H_{p_0}$  bilden wir die Geodätische  $\gamma(t) = \exp_{p_0} tv$ , sodass  $v = \dot{\gamma}(0)$ . Dann gilt  $(\varphi \circ \gamma)(t) = (\varphi \circ \exp_{p_0})(tv) = (\exp_{q_0} \circ i)(tv)$ , also  $i(v) = \widehat{(\varphi \circ \gamma)}(0)$ . Somit erhalten wir  $\varphi_{p_0}(v) = \varphi_{p_0}(\dot{\gamma}(0)) = \widehat{(\varphi \circ \gamma)}(0) = i(v)$  für alle  $v \in H_{p_0}$ . Daraus folgt sofort  $\varphi_{p_0}(\alpha\kappa(\partial/\partial x_n)_{p_0}) = i(\alpha\kappa(\partial/\partial x_n)_{p_0}) = \dot{\gamma}(0)$ .

Die Ungleichung (3) ergibt sich sofort mit Hilfe der in 2.5. zitierten Fassung des Vergleichssatzes von Rauch.

**4.3.** Vermöge des Diffeomorphismus  $\varphi: H \rightarrow N$  führen wir auf  $H$  eine neue Metrik  $\bar{g}$  ein. Wir setzen für  $v, w \in H_p$   $\bar{g}_p(v, w) = g_{\varphi(p)}(\varphi_p v, \varphi_p w)$ . Damit wird  $\varphi: (H, \bar{g}) \rightarrow N$  ein längentreuer Diffeomorphismus.

Im folgenden Satz vergleichen wir die zu den Metriken  $g$  und  $\bar{g}$  gehörigen Distanzen  $d$  und  $\bar{d}$ .

#### SATZ

- (1) Für alle  $p, q \in H$  gilt  $d(p, q) \leq \bar{d}(p, q)$ ,
- (2) Für alle  $q \in H$  gilt  $d(p_0, q) = \bar{d}(p_0, q)$ .

*Beweis.* 1. Nach 4.2. (3) gilt  $d(p, q) \leq d(\varphi(p), \varphi(q))$ , weil  $\varphi$  längentreu ist (bezüglich  $\bar{g}$ ), gilt weiter  $d(\varphi(p), \varphi(q)) = \bar{d}(p, q)$ .

2. Es sei  $\overline{\exp}$  die zur Metrik  $\bar{g}$  gehörige Exponentialabbildung. Wir zeigen zunächst

$$\exp_{p_0} = \overline{\exp}_{p_0}. \quad (3)$$

Es gilt  $\varphi \circ \exp_{p_0} = \exp_{q_0} \circ i = \exp_{q_0} \circ \varphi_{p_0} = \varphi \circ \overline{\exp}_{p_0}$ , da  $\varphi$  injektiv ist, folgt daraus  $\exp_{p_0} = \overline{\exp}_{p_0}$ .

Seien  $q \in H$  und  $v$  das eindeutig bestimmte Element aus  $H_{p_0}$  mit  $q = \exp_{p_0} v = \overline{\exp}_{p_0} v$ . Dann gilt

$$d(p_0, q) = (g_{p_0}(v, v))^{1/2}, \quad \bar{d}(p_0, q) = (\bar{g}_{p_0}(v, v))^{1/2}. \quad (4)$$

Nun zeigen wir

$$g_{p_0} = \bar{g}_{p_0}. \quad (5)$$

Es gilt für beliebige  $v, w \in H_{p_0}$

$$g_{p_0}(v, w) = g_{q_0}(i(v), i(w)) = g_{q_0}(\varphi_{p_0}v, \varphi_{p_0}w) = \bar{g}_{p_0}(v, w).$$

Aus (4) und (5) folgt die Behauptung (2).

Die Beziehung (3) erlaubt uns eine einfache *Folgerung*:

Für eine Kurve  $\gamma: R \rightarrow H$  mit  $\gamma(0) = p_0$  gilt

(6)  $\gamma$  ist genau dann  $g$ -Geodätische, wenn sie  $\bar{g}$ -Geodätische ist.

**4.4.** Wir setzen  $\pi = \sigma \circ \varphi$  und erhalten die Überlagerung  $\pi: H \rightarrow M$ . Die Projektion  $\pi$  ist längentreu bezüglich  $\bar{g}$  und die Deckgruppe  $\Pi$  ist eine Untergruppe von  $I(H)$ , der Isometriegruppe von  $H$  bezüglich  $\bar{g}$ .

Gemäss 3.3. gibt es einen Punkt  $p \in H$  und ein Element  $T \in \Pi$  mit  $d(p, Tp) = \kappa$ , nach unserer Konstruktion liegen die Punkte  $p$  und  $Tp$  in einer ausgezeichneten Lage. Wir erinnern an den Punkt  $q_0 \in N$  und die Decktransformation  $S_0 \in \Sigma$  mit  $d(q_0, S_0q_0) = \kappa$ , ferner an die Geodätische  $v$  mit  $v(0) = q_0$  und  $v(1) = S_0q_0$ . Für die Decktransformation  $T_0 = \varphi^{-1} \circ S_0 \circ \varphi$  und die Geodätische  $\gamma_0 = \varphi^{-1} \circ v$  gilt der

### SATZ

$$(1) \quad d(p_0, T_0p_0) = \kappa,$$

$$(2) \quad \gamma_0(0) = p_0, \quad \dot{\gamma}_0(0) = a\kappa \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{p_0}, \quad \|\dot{\gamma}_0(t)\| = \kappa.$$

(Norm bezüglich  $g$  sowie bezüglich  $\bar{g}$ ).

*Beweis.* Beachte  $\varphi(p_0) = q_0$ , dann folgt  $d(p_0, T_0p_0) = d(q_0, S_0q_0) = \kappa$ . Ferner gilt  $\gamma_0(0) = \varphi^{-1}(v(0)) = p_0$  und  $\dot{\gamma}_0(0) = (\varphi^{-1} \circ v)(0) = \varphi_{p_0}^{-1}(\dot{v}(0)) = i^{-1}(\dot{v}(0)) = a\kappa(\partial/\partial x_n)_{p_0}$ . Die Kurve  $\gamma_0$  ist nach Konstruktion zunächst  $\bar{g}$ -Geodätische. Weil  $\gamma_0(0) = p_0$ , ist  $\gamma_0$  nach 4.3.(6) auch  $g$ -Geodätische. Bezüglich beider Metriken gilt also  $\|\dot{\gamma}_0(t)\| = \text{const}$  mit derselben Konstanten, denn in  $H_{p_0}$  stimmen gemäss 4.3.(5)  $g$  und  $\bar{g}$  überein. Die Behauptung  $\|\dot{\gamma}_0(t)\| = \kappa$  folgt dann aus  $\|\dot{\gamma}_0(0)\| = a\kappa\|(\partial/\partial x_n)_{p_0}\| = \kappa$ .

### Corollar

$$(3) \quad \text{Für alle } t \in R \text{ gilt } T_0(\gamma_0(t)) = \gamma_0(t+1).$$

*Beweis.* Die Behauptung ergibt sich aus (1) und der Normierung  $\|\dot{\gamma}_0(t)\| = \kappa$ . (vgl. [4]).

## 5. Die Decktransformationen $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$

In diesem Kapitel führen wir Decktransformationen  $T_1, \dots, T_{n-1}$  ein, die zusammen mit  $T_0$  eine wesentliche Stütze unseres Beweises bilden werden.

**5.1. SATZ.** *Es existieren  $T_1, \dots, T_{n-1} \in \Pi$  und eigentliche  $\bar{g}$ -Geodätische  $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ , sodass für  $k = 1, \dots, n-1$  gilt*

- (1)  $T_k(\gamma_k(t)) = \gamma_k(t+1)$ ,
- (2)  $\det(x_i(\gamma_k(0)))_{1 \leq i, k \leq n-1} \neq 0$ ,
- (3)  $\gamma_k$  nicht äquivalent zu  $\gamma_0$ ,
- (4)  $\bar{d}(p_0, T_k p_0) < 4\delta + \lambda + a^{-1} \log 4(n-1)$ .

*Beweis.* Wir betrachten die Punkte

$$q_k = (r\delta_{1k}, \dots, r\delta_{n-1,k}, cr) \in H, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$$r = (1 + c^2)^{-1/2}, \quad c^{-1} = (n-1)^{1/2} e^{a\delta} (1 - e^{-a\delta}).$$

Nach 3.2. gibt es  $S_1, \dots, S_{n-1} \in \Pi$  so, dass  $\bar{d}(S_k p_0, q_k) \leq \delta$ . Dann ist nach 4.3.(1)  $d(S_k p_0, q_k) \leq \bar{d}(S_k p_0, q_k) \leq \delta$  und somit nach 2.4., Lemma 1

$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_i(S_k p_0) - r\delta_{ik})^2 < e^{2a\delta} (1 - e^{-a\delta})^2 c^2 r^2 = \frac{r^2}{n-1},$$

$$\sum_{i,k=1}^{n-1} (x_i(S_k p_0) - r\delta_{ik})^2 < r^2.$$

Daraus folgt wie in [4]

$$\det(x_i(S_k p_0))_{1 \leq i, k \leq n-1} \neq 0. \quad (5)$$

Setzen wir  $T_k = S_k \circ T_0 \circ S_k^{-1} \in \Pi$  und  $\gamma_k = S_k \circ \gamma_0$  für  $k = 1, \dots, n-1$ , so folgt (1) aus 4.4.(3) und (2) aus (5) und  $\gamma_0(0) = p_0$ . Wäre eine der Geodätischen  $\gamma_k, k = 1, \dots, n-1$ , äquivalent zu  $\gamma_0$ , so wäre wegen 4.4.(2) und 2.4., Lemma 2  $x_i(\gamma_k(0)) = 0$  für  $i = 1, \dots, n-1$ . Das widerspricht der soeben bewiesenen Behauptung (2).

Weiter ergibt sich wie in [4]  $\bar{d}(p_0, T_k p_0) \leq 2\delta + \lambda + 2\bar{d}(p_0, q_k)$ . Wegen 4.3.(2) folgt daraus

$$\bar{d}(p_0, T_k p_0) \leq 2\delta + \lambda + 2d(p_0, q_k). \quad (6)$$

Aus der Definition der Punkte  $q_k$  und der Abstandsformel 2.4.(1) ergibt sich

$$\begin{aligned} \cos ad(p_0, q_k) &= 1 + \frac{r^2(c^2 + 1) - 2cr + 1}{2cr} = (1 + c^{-2})^{1/2} \\ &= (1 + (n-1) e^{2a\delta} (1 - e^{-a\delta})^2)^{1/2} < e^{a\delta} (n-1)^{1/2}, \end{aligned}$$

also  $2d(p_0, q_k) < 2\delta + a^{-1} \log 4(n-1)$ .

Somit folgt aus (6) die Behauptung (4).

**5.2.** Mit Hilfe der Decktransformationen  $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$  lässt sich ein Identitätskriterium formulieren.

**SATZ.** Aus  $R \in I(H)$ ,  $RT_k = T_k R$  für  $k = 0, 1, \dots, n-1$  folgt  $R = \text{id}$ .

*Beweis.* Analog zum Fall konstanter Krümmung (vgl. [4]) beweist man mit Hilfe von 2.3 und 5.1.(3)

$$R(\gamma_k(t)) = \gamma_k(t). \quad (1)$$

Für  $k = 0$  folgt daraus wegen 4.4.(2)

$$R(p_0) = p_0, \quad R_{p_0} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{p_0} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{p_0}. \quad (2)$$

Für  $k = 1, \dots, n-1$  sei  $v_k \in H_{p_0}$  der eindeutig bestimmte Vektor mit

$$\overline{\exp} v_k = \gamma_k(0). \quad (3)$$

Da wegen  $R \in I(H)$

$$\overline{\exp} \circ R_{p_0} = R \circ \overline{\exp}, \quad (4)$$

so folgt mit (1) und (3)

$$\overline{\exp} R_{p_0}(v_k) = R \overline{\exp} v_k = R(\gamma_k(0)) = \gamma_k(0) = \overline{\exp} v_k.$$

Da  $\overline{\exp}: H_{p_0} \rightarrow H$  injektiv ist, ergibt sich daraus

$$R_{p_0}(v_k) = v_k, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (5)$$

Wegen 4.3.(3) gilt  $\exp v_k = \overline{\exp} v_k$ , zusammen mit (3) und 5.1.(2) folgt daraus

$$\det(x_i(\exp v_k))_{1 \leq i, k \leq n-1} \neq 0.$$

Daher bilden die  $n$  Vektoren  $v_1, \dots, v_{n-1}, (\partial/\partial x_n)_{p_0}$  nach 2.4., Lemma 3 eine Basis von  $H_{p_0}$ . Somit folgt aus (2) und (5), dass  $R_{p_0} = \text{id}$ , und daraus nach (4)  $R = \text{id}$ .

## 6. Konstruktion der disjunkten Kugeln

**6.1.** Die angekündigte Abschätzung für die Ordnung von  $I(M)$  kommt durch einen Vergleich von Kugelvolumen zustande. Wir führen nun den Raum ein, in dem die wesentliche Überlegung durchgeführt wird. (vgl. [4]).

Wir betrachten das cartesische Produkt

$$\mathfrak{H} = H^{n+1} = \{p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \mid p_i \in H\}$$

und machen  $\mathfrak{H}$  zu einem metrischen Raum, indem wir die Distanz der Punkte

$p = (p_1, \dots, p_{n+1}), q = (q_1, \dots, q_{n+1})$  definieren durch

$$d(p, q) = \text{Max} \{d(p_i, q_i) \mid i = 1, \dots, n+1\}. \quad (1)$$

Wir setzen  $B_p(\varrho) = \{q \in H \mid d(p, q) < \varrho\}$  und  $\mathfrak{B}_p(\varrho) = \{q \in \mathfrak{H} \mid d(p, q) < \varrho\}$ , dann gilt offenbar

$$\mathfrak{B}_p(\varrho) = B_{p_1}(\varrho) \times \dots \times B_{p_{n+1}}(\varrho). \quad (2)$$

Es sei  $m$  das bezüglich  $I(H)$  invariante Mass auf  $H$ , dieses induziert ein Mass  $m$  auf dem cartesischen Produkt  $\mathfrak{H} = H^{n+1}$ , und es gilt wegen (2)

$$m(\mathfrak{B}_p(\varrho)) = \prod_{i=1}^{n+1} m(B_{p_i}(\varrho)). \quad (3)$$

Im letzten Kapitel werden wir vom Zentrum  $p$  unabhängige Abschätzungen von  $m(B_p(\varrho))$  herleiten.

**6.2.** Gemäss Abschnitt 3.1. gilt  $\text{ord } I(M) = [\Pi^* : \Pi]$ , wobei  $\Pi^*$  den Normalisator von  $\Pi$  in  $I(H)$  bezeichnet. Wir halten jetzt eine natürliche Zahl  $r \leq \text{ord } I(M)$  fest. Dann gibt es Elemente  $U_1, \dots, U_r \in \Pi^*$  mit  $U_i U_j^{-1} \notin \Pi$  für  $i \neq j$ . Nach 3.2. gibt es  $S_i \in \Pi$  so, dass  $d(p_0, S_i U_i p_0) \leq \delta$ . Die Elemente  $V_i = S_i U_i$  haben die Eigenschaften

$$V_i \neq V_j \quad \text{für} \quad i \neq j, \quad (1)$$

$$d(p_0, V_i p_0) \leq \delta. \quad (2)$$

Wir betrachten den Punkt

$$p_0 = (p_0, \dots, p_0) \in \mathfrak{H} \quad (3)$$

und für  $i = 1, \dots, r$  die Punkte

$$p_i = (V_i p_1, V_i T_0 p_1, \dots, V_i T_{n-1} p_1) \in \mathfrak{H}. \quad (4)$$

Dabei ist  $p_1$  der gemäss 3.3., Satz 2 existierende Punkt von  $H$  mit den Eigenschaften

$$\inf \{d(p_1, T p_1) \mid T \in \Pi'\} = \lambda, \quad (5)$$

$$d(p_0, p_1) \leq \delta. \quad (6)$$

Nach 6.1.(1) ist

$$d(p_0, p_i) = \text{Max} \{d(p_0, V_i p_1), d(p_0, V_i T_k p_1) \mid k = 0, \dots, n-1\}. \quad (7)$$

Wegen (2) und (6) gilt

$$d(p_0, V_i p_1) \leq d(p_0, V_i p_0) + d(V_i p_0, V_i p_1) \leq 2\delta. \quad (8)$$

Ferner gilt für  $k = 0, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} d(p_0, V_i T_k p_1) &\leq d(p_0, V_i p_0) + d(V_i p_0, V_i T_k p_0) + d(V_i T_k p_0, V_i T_k p_1) \\ &\leq 2\delta + d(p_0, T_k p_0). \end{aligned}$$

Daraus folgt nach 4.4.(1) und 5.1.(4)

$$\begin{aligned} d(p_0, V_i T_0 p_1) &\leq 2\delta + \kappa \leq 2\delta + \lambda, \\ d(p_0, V_i T_k p_1) &< 6\delta + \lambda + a^{-1} \log 4(n-1), \quad k = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (9)$$

Aus (7), (8) und (9) ergibt sich

$$\mathfrak{d}(p_0, p_i) < 6\delta + \lambda + a^{-1} \log 4(n-1), \quad i = 1, \dots, r. \quad (10)$$

Nun werden die gegenseitigen Abstände der Punkte  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , nach unten abgeschätzt. Setzen wir

$$R_{ij} = V_i^{-1} V_j, \quad 1 \leq i, j \leq r, \quad (11)$$

so gilt  $R_{ij} \in \Pi^* \subset I(H)$  und

$$T_k^{-1} R_{ij}^{-1} T_k R_{ij} \in \Pi, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (12)$$

Ferner gilt

$$d(p_1, T_k^{-1} R_{ij}^{-1} T_k R_{ij} p_1) \leq d(V_i T_k p_1, V_j T_k p_1) + d(V_i p_1, V_j p_1).$$

Daraus folgt wegen (4) und 6.1.(1)

$$d(p_1, T_k^{-1} R_{ij}^{-1} T_k R_{ij} p_1) \leq 2\mathfrak{d}(p_i, p_j), \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (13)$$

Damit schliessen wir

$$\mathfrak{d}(p_i, p_j) \geq \lambda/2 \quad \text{für } i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq r. \quad (14)$$

Aus  $\mathfrak{d}(p_i, p_j) < \lambda/2$  folgt nämlich wegen (13) und (5)

$$d(p_1, T_k^{-1} R_{ij}^{-1} T_k R_{ij} p_1) < \inf \{d(p_1, T p_1) \mid T \in \Pi'\}.$$

Beachten wir (12), so folgt daraus  $R_{ij} T_k = T_k R_{ij}$  für  $k = 0, \dots, n-1$ . Mit dem Identitätskriterium in 5.2. schliessen wir  $R_{ij} = \text{id}$ , zusammen mit (11) und (1) folgt  $i = j$ .



Die Ungleichung (14) besagt, dass die Kugeln  $\mathfrak{B}_{p_i}(\lambda/4)$ ,  $i = 1, \dots, r$ , paarweise disjunkt sind. Wegen (10) sind diese Kugeln enthalten in der Kugel  $\mathfrak{B}_{p_0}(6\delta + 5\lambda/4 + a^{-1} \log 4(n-1))$ . Daher gilt für  $r \leq \text{ord } I(M)$

$$\sum_{i=1}^r m(\mathfrak{B}_{p_i}(\lambda/4)) < m(\mathfrak{B}_{p_0}(6\delta + 5\lambda/4 + a^{-1} \log 4(n-1))). \quad (15)$$

Nach (3) und 6.1.(3) folgt

$$m(\mathfrak{B}_{p_0}(\varrho)) = (m(B_{p_0}(\varrho)))^{n+1}. \quad (16)$$

Für  $\mathfrak{B}_{p_i}(\varrho)$  gilt zunächst nach (4) und 6.1.(2)

$$\mathfrak{B}_{p_i}(\varrho) = B_{V_i p_1}(\varrho) \times B_{V_i T_0 p_1}(\varrho) \times \cdots \times B_{V_i T_{n-1} p_1}(\varrho).$$

Weil sowohl alle  $V_i$  als auch alle  $T_k$  längentreu sind, gilt

$$m(B_{V_i p_1}(\varrho)) = m(B_{V_i T_k p_1}(\varrho)) = m(B_{p_1}(\varrho)).$$

Somit folgt aus 6.1.(3)

$$m(\mathfrak{B}_{p_i}(\varrho)) = (m(B_{p_1}(\varrho)))^{n+1}. \quad (17)$$

Setzen wir (16) und (17) in (15) ein, so erhalten wir

$$r < \left( \frac{m(B_{p_0}(6\delta + 5\lambda/4 + a^{-1} \log 4(n-1)))}{m(B_{p_1}(\lambda/4))} \right)^{n+1}. \quad (18)$$

Da diese Ungleichung für jede natürliche Zahl  $r \leq \text{ord } I(M)$  gilt, so schliessen wir, dass  $\text{ord } I(M)$  endlich ist und derselben Ungleichung genügt. Ferner wird aus (18), sobald wir die Kugelvolumen abschätzen können, auch die angekündigte Abschätzung für  $\text{ord } I(M)$  folgen.

## 7. Auswertung

**7.1.** Die Untersuchung der Kugelvolumen führen wir in einer beliebigen einfach zusammenhängenden vollständigen  $n$ -dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit  $N$ , deren Schnittkrümmung zwischen den Schranken  $-b^2$  und  $-a^2$  liegt. ( $0 < a \leq b$ ). Wir greifen einen Punkt  $p \in N$  heraus und bilden die Kugeln  $B(\varrho)$  mit festem Zentrum  $p$  und Radius  $\varrho$ . Das Volumen von  $B(\varrho)$  bezeichnen wir mit  $m(\varrho)$ .

Zur Berechnung von  $m(\varrho)$  betrachten wir die Exponentialabbildung  $\exp_p: N_p \rightarrow N$  im Kugelzentrum  $p$ . Führen wir in  $N_p$  Polarkoordinaten ein, das heisst, setzen wir

$v = ru$  mit  $r > 0$  und  $u$  Element der Einheitssphäre  $S \subset N_p$ , so gilt

$$m(\varrho) = \int_S \int_0^{\varrho} J(ru) r^{n-1} dr du, \quad (1)$$

wobei  $J(v)$  den Betrag der Funktionaldeterminante von  $\exp_p$  im Punkt  $v \in N_p$  und  $du$  das kanonische Mass auf  $S$  bedeuten. (vgl. [1], p. 54 ff.).

Für  $J(ru)$  kann eine nur von  $r$  und den Krümmungsschranken  $a, b$  abhängige Abschätzung angegeben werden.

**SATZ.** Für alle  $u \in S$  und  $r > 0$  gilt

$$\left(\frac{\sin ar}{ar}\right)^{n-1} \leq J(ru) \leq \left(\frac{\sin br}{br}\right)^{n-1}. \quad (2)$$

Wir verschieben den *Beweis* dieses Satzes auf den nächsten Abschnitt.

Aus (1) und (2) erhalten wir, wenn wir mit  $e_n$  die Konstante  $\int_S du$  und mit  $s_n$  die Funktion  $s_n(\varrho) = \int_0^{\varrho} \sin^{n-1} r dr$  bezeichnen, die Abschätzung

$$e_n a^{-n} s_n(a\varrho) \leq m(\varrho) \leq e_n b^{-n} s_n(b\varrho).$$

Setzen wir dies in 6.2.(18) ein und beachten, dass jene Ungleichung auch für  $\text{ord } I(M)$  gilt, so erhalten wir

$$\text{ord } I(M) < \left( \frac{a^n s_n(b(6\delta + 5\lambda/4) + a^{-1}b \log 4(n-1))}{b^n s_n(a\lambda/4)} \right)^{n+1}.$$

Eine explizitere Form der Abschätzung ergibt sich, wenn man für  $s_n(\varrho)$  die elementar zu beweisenden Ungleichungen

$$\frac{\varrho^n}{n} \leq s_n(\varrho) \leq \frac{e^{(n-1)\varrho}}{(n-1)2^{n-1}}$$

verwendet. Gemäss 3.3., Satz 3 können wir ferner, wo wir nach oben abschätzen,  $\lambda$  durch  $2\delta$  ersetzen. So gelangen wir zum Resultat

$$\text{ord } I(M) < (2^{n+2} b^{-n} \lambda^{-n} e^{8,5(n-1)b\delta} (4(n-1))^{a^{-1}b(n-1)})^{n+1}.$$

**7.2.** Zum Schluss holen wir den Beweis von 7.1.(2) nach. Wir verwenden eine leichte Modifikation einer Methode von Bishop und Crittenden (vgl. [2], p. 253 ff.). Zunächst

geben wir eine geeignete Darstellung von  $J(v)$  an. Zum Punkt  $v \in N_p$  gehören die kanonische Isometrie  $j_v: N_p \rightarrow N_{p,v}$  des Tangentialraumes  $N_p$  auf dessen Tangentialraum  $N_{p,v}$  (vgl. [3], p. 9, p. 73) und die durch  $\exp_p$  induzierte Abbildung  $\exp_{p,v}: N_{p,v} \rightarrow N_{\exp_p v}$ . Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$J(v) = |\det \exp_{p,v}| = |\det (\exp_{p,v} \circ j_v)|.$$

$J$  ist eine stetige Funktion auf  $N_p$  und nimmt in  $v = 0$  den Wert 1 an. Für beliebiges  $v$  wird eine Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $N_p$  gewählt, es gilt dann unabhängig von der Basiswahl

$$J(v) = \frac{\|\exp_{p,v} \circ j_v(v_1) \wedge \dots \wedge \exp_{p,v} \circ j_v(v_n)\|}{\|v_1 \wedge \dots \wedge v_n\|}.$$

Wir wählen ein festes  $u \in S$  und betrachten  $J$  in den Punkten  $v = ru$ . Zur Abkürzung schreiben wir  $J(r)$  anstelle von  $J(ru)$ . Die gesuchte Abschätzung für  $J(r)$  wird durch Integration einer Abschätzung für  $J'(t)/J(t)$ , ( $0 < t \leq r$ ), gewonnen. Seien also vorderhand auch  $r$  und  $t$  mit  $0 < t \leq r$  fest. Durch  $u \in S$  wird eine Geodätische  $\gamma$  mit  $\gamma(0) = p$ ,  $\dot{\gamma}(0) = u$  und  $\|\dot{\gamma}\| = 1$  ausgezeichnet. Wir wählen eine Basis  $\{u_1, \dots, u_{n-1}, u\}$  von  $N_p$  mit  $g(u_i, u) = (u_i, u) = 0$  und definieren damit die Felder  $Y_i(s) = \exp_{p, su} \circ j_{su}(su_i)$  für  $i = 1, \dots, n-1$  und  $Y_n(s) = \exp_{p, su} \circ j_{su}(u)$ . Die Felder  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , sind die eindeutig bestimmten Jacobifelder längs  $\gamma$  mit  $Y_i(0) = 0$  und  $Y'_i(0) = u_i$  (vgl. [3], p. 132.  $Y'_i$  bedeutet die kovariante Ableitung von  $Y_i$  längs  $\gamma$ ),  $Y_n$  fällt mit dem Tangentialfeld  $\dot{\gamma}$  zusammen. Zudem gilt für alle  $s$  und  $i \neq n$   $(Y_i, Y_n)(s) = 0$ .

Zur Berechnung von  $J(s)$  verwenden wir für  $s > 0$  die Basis  $\{su_1, \dots, su_{n-1}, u\}$ . Es gilt

$$J(s) = \frac{\|Y_1(s) \wedge \dots \wedge Y_n(s)\|}{\|su_1 \wedge \dots \wedge su_{n-1} \wedge u\|}.$$

Für spätere Zwecke wählen wir  $u_1, \dots, u_{n-1}$  so, dass für die festgehaltene Zahl  $t$  die Vektoren  $Y_1(t), \dots, Y_n(t)$  ein Orthonormalsystem bilden. Wir berechnen  $J'(s)/J(s)$  durch Ableiten von  $J^2(s)$  und erhalten

$$\frac{J'(s)}{J(s)} = \frac{1}{2} \frac{(Y_1 \wedge \dots \wedge Y_n, Y_1 \wedge \dots \wedge Y_n)'(s)}{(Y_1 \wedge \dots \wedge Y_n, Y_1 \wedge \dots \wedge Y_n)(s)} - \frac{n-1}{s}.$$

Für  $s = t$  vereinfacht sich dieser Ausdruck wegen der Orthonormalität von  $Y_1(t), \dots, Y_n(t)$  wesentlich. Es gilt

$$\frac{J'(t)}{J(t)} = \sum_{i=1}^n (Y'_i, Y_i)(t) - \frac{n-1}{t}.$$

Beachten wir  $Y'_n = 0$ , so erhalten wir

$$\frac{J'(t)}{J(t)} = \sum_{i=1}^{n-1} (Y'_i, Y_i)(t) - \frac{n-1}{t}. \quad (1)$$

Die Skalarprodukte  $(Y'_i, Y_i)(t)$  erfüllen die Ungleichungen

$$a \frac{\cos at}{\sin at} \leq (Y'_i, Y_i)(t) \leq b \frac{\cos bt}{\sin bt}. \quad (2)$$

Wir führen damit den Beweis von 7.1.(2) zu Ende und werden nachher die Richtigkeit von (2) nachweisen. Die Ungleichungen (2), eingesetzt in Formel (1), führen auf

$$(n-1) \left( a \frac{\cos at}{\sin at} - \frac{1}{t} \right) \leq \frac{J'(t)}{J(t)} \leq (n-1) \left( b \frac{\cos bt}{\sin bt} - \frac{1}{t} \right).$$

Integration von  $r'$  nach  $r$  ( $0 < r' < r$ ), Anwendung der Exponentialfunktion und Grenzübergang  $r'$  gegen 0 liefern

$$\left( \frac{\sin ar}{ar} \right)^{n-1} \leq J(r) \leq \left( \frac{\sin br}{br} \right)^{n-1}.$$

Damit ist 7.1.(2) – bis auf die Beziehung (2) – bewiesen.

Wir erbringen nun den Beweis von (2).  $Y_i$  ist ein Jacobifeld mit  $Y_i(0) = 0$ , es gilt also

$$(Y'_i, Y_i)(t) = I_t(Y_i) = \int_0^t (\|Y'_i\|^2 - (R_\gamma(Y_i, \dot{\gamma})(\dot{\gamma}), Y_i)) ds. \quad (3)$$

Wegen  $\|\dot{\gamma}\| = 1$  und  $(Y_i, \dot{\gamma}) = 0$  können wir  $(R_\gamma(Y_i, \dot{\gamma})(\dot{\gamma}), Y_i)$  durch  $K(Y_i, \dot{\gamma})\|Y_i\|^2$  ersetzen. Verwenden wir die Abschätzung  $-K \geq a^2$ , so erhalten wir

$$I_t(Y_i) \geq \int_0^t (\|Y'_i\|^2 + a^2 \|Y_i\|^2) ds. \quad (4)$$

Zur weiteren Untersuchung dieses Integrals betrachten wir auf den Feldern längs  $\gamma$  die Bilinearform

$$I(V, W) = \int_0^t ((V', W') + a^2 (V, W)) ds.$$

Damit geht (4) über in

$$I_t(Y_i) \geq I(Y_i, Y_i).$$

Unter den Feldern  $W$  mit festen Werten in 0 und  $t$  besitzt dasjenige den minimalen Wert  $I(W, W)$ , das der Differentialgleichung  $W'' - a^2 W = 0$  genügt. Für die Randbedingungen  $W_i(0) = Y_i(0) = 0$ ,  $W_i(t) = Y_i(t)$  führt dies auf die Felder  $gE_i$ , wo  $E_i$  Parallelfeld mit  $E_i(t) = Y_i(t)$  ist, und  $g$  die Funktion  $g(s) = \sin as / \sin at$  bezeichnet. Für diese Felder gilt  $I(Y_i, Y_i) \geq I(gE_i, gE_i) = a \cos at / \sin at$ . Zusammen erhalten wir

$$(Y'_i, Y_i)(t) \geq a \cos at / \sin at.$$

Für die Abschätzung nach oben gehen wir wieder aus von (3). Für jedes Feld  $W_i$  mit  $W_i(0) = Y_i(0) = 0$  und  $W_i(t) = Y_i(t)$  gilt

$$I_t(Y_i) \leq I_t(W_i).$$

Wir wählen für  $W_i$  Felder der Gestalt  $gE_i$ , wo  $E_i$  Parallelfeld mit  $E_i(t) = Y_i(t)$  ist, und  $g$  eine  $C^\infty$ -Funktion mit  $g(0) = 0$ ,  $g(t) = 1$ , und erhalten

$$I_t(W_i) = I_t(gE_i) = \int_0^t ((g')^2 - K(E_i, \dot{Y}) g^2) ds.$$

Hier setzen wir die Abschätzung  $-K \leq b^2$  ein, es gilt dann

$$I_t(gE_i) \leq \int_0^t ((g')^2 + b^2 g^2) ds.$$

Die beste Abschätzung wird erhalten, wenn die Funktion  $g(s) = \sin bs / \sin bt$  gewählt wird. Für dieses  $g$  gilt

$$\int_0^t ((g')^2 + b^2 g^2) ds = b \frac{\cos bt}{\sin bt},$$

und wir erhalten zusammenfassend

$$(Y'_i, Y_i)(t) \leq b \frac{\cos bt}{\sin bt}.$$

Damit ist die Behauptung 7.1.(2) vollständig bewiesen.

## LITERATUR

- [1] BERGER, M., GAUDUCHON, P., und MAZET, E., *Le Spectre d'une Variété Riemannienne* (Springer, Berlin 1971).
- [2] BISHOP, R. L. und CRITTENDEN, R. J., *Geometry of Manifolds* (Academic Press, New York 1964).
- [3] GROMOLL, D., KLINGENBERG, W., und MEYER, W., *Riemannsche Geometrie im Grossen* (Springer, Berlin 1968).
- [4] HUBER, H., *Über die Isometriegruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit mit negativer Krümmung*, *Helv. Phys. Acta* 45 (1972), 277–288.
- [5] IM HOF, H. C., *Über die Isometriegruppe bei kompakten Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung*, Dissertation (Basel 1972, Universitätsbibliothek).
- [6] PREISSMANN, A., *Quelques propriétés globales des espaces de Riemann*, *Comment. Math. Helv.* 15 (1942/43), 175–216.

Eingegangen den 10. Oktober 1972.