Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 48 (1973)

Artikel: Der Funktor EXT...(., R) in endlichen, graduierten Algebren
Autor: Senn, Erhard
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37140

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 26.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Der Funktor $\mathrm{EXT}_R(., R)$ in endlichen, graduierten Algebren

von ERHARD SENN, Basel

§1. Einleitung

1. Wir beschäftigen uns in der vorliegenden Arbeit mit graduierten Algebren der Form $R = \oplus_{j \geqslant 0} R_j$, die über dem Grundkörper K endlich erzeugt seien, und für die $R_0 = K$ gelte. Über K machen wir keine weiteren Voraussetzungen.

Als wichtigste Beispiele haben wir dabei Ringe von Modulformen im Auge, die bekanntlich (vgl. etwa M. Eichler [4] S. 95) die obigen Voraussetzungen erfüllen.

2. Einen Polynomring $R' = K[X_1, \ldots, X_d]$ bezeichnen wir als Modell von R, wenn ein homogener K-Homomorphismus $f: R' \to R$ vom Grad Null existiert, sodass R ganz ist über $f(R')$, dabei sei die Graduierung von R' gegeben durch:

$$\text{Grad } X_i = g = \text{Grad des Modells}.$$

Ist f injektiv, so heisse das Modell injektiv. Nach dem Normalisationslemma existieren immer injektive Modelle.

3. Ein endlicher, graduierter R-Modul M kann vermöge f auch als endlicher, graduierter R'-Modul aufgefasst werden und die $\mathrm{Ext}^i_{R'}(M, R')$, mit denen wir uns vor allem befassen werden, sind dann wohldefinierte, endliche, graduierte R'-Moduln. Diese Ext-Moduln spielen bei Eichler [3] eine wesentliche Rolle (vgl. etwa [3] S. 40: „Theorem of Riemann-Roch" und S. 43: „Theorem of Duality").

4. Im ersten Teil unserer Arbeit weisen wir nach, dass die Dualmoduln dieser $\mathrm{Ext}^i_{R'}(M, R')$ isomorph sind zu gewissen „Stör-Untermoduln", die bei Reduktion nach einer Nicht-Nullteilerfolge bezüglich M auftreten (§2 Satz 1).

5. Eine der wichtigsten Folgerungen dieses Ergebnisses war ursprünglich die Tatsache, dass die Dimension

$$L(j - g(R')\, d(R'), \mathrm{Ext}^{d(R')-k}_{R'}(M, R'))$$

(wo $g(R')$ der Grad, $d(R')$ die Diemension des Modells und $L(i, M)$ die Dimension des K-Vektorraumes M_i bedeuten) modellinvariant ist. Nun hat aber M. André (Lausanne) bei der ersten Durchsicht der Arbeit einen einfachen, direkten Beweis dieser Modellinvarianz-Aussage geben können, der mit seiner freundlichen Genehmigung im Anhang 2 wiedergegeben werden soll. Für diesen Hinweis und auch für die übrigen wertvollen Anregungen möchte ich Herrn Prof. André an dieser Stelle herzlich danken.

6. Ein graduierter R-Modul M heisst nach Eichler ([3] S. 35) quasinull, wenn

$M_i=0$ nur für $n \leqslant i \leqslant m$ gilt, mit gewissen Konstanten n, m. Ferner heisst M quasifrei, wenn für ein Modell R' und für alle $k \geqslant 1$ $\mathrm{Ext}_{R'}^k(M, R')$ quasinull ist. Nach 5. ist die Quasifreiheit ein modellinvarianter Begriff.

7. Der zweite Teil unserer Arbeit besteht nun im Nachweis, dass für einen R-Modul M die Quasifreiheit im wesentlichen das globale Aequivalent ist zur lokalen Macaulay-Eigenschaft (§3 Satz 3).

8. Bei den in der vorliegenden Arbeit verwendeten *Methoden* handelt es sich vorwiegend um die Methoden der kommutativen Algebra, wie sie etwa zu finden sind in Serre [8], Matsumura [6], Atiyah-Macdonald [1], Nagata [7] oder Zariski-Samuel [10], übertragen auf den graduierten Fall. Wir setzen insbesondere voraus, dass der Leser einigermassen vertraut ist mit der Noether'schen Primärzerlegung (auch in graduierten Moduln), der Dimensionstheorie, der Theorie der Parametersysteme und M-Folgen in halblokalen Ringen und damit dem Begriff der Tiefe (depth in [6], codimension homologique in [8]) und schliesslich der homologischen Dimensionstheorie.

9. Die von uns betrachteten Algebren R bzw. ihre homogenen Lokalisierungen R_P (homogen soll bedeuten, dass man nur die homogenen, nicht in P liegenden Elemente als Nenner aufnimmt) besitzen nämlich ein unter den homogenen Idealen maximales, das wir als homogen-maximales Ideal bezeichnen wollen, und die Theorie der lokalen Ringe lässt sich übertragen, wenn man anstelle von Idealen homogene Ideale, anstelle von Elementen homogene Elemente (z.B. homogene M-Folgen) betrachtet. (Die Idee stammt von Urs Schweizer, Basel)

10. Die einzige Schwierigkeit bei dieser Übertragung ist die, dass die Aussage

(1) *Wenn ein homogenes Ideal I in keinem der endlich vielen homogenen Primideale $P_1, \ldots, P_k$ liegt, so existiert ein homogenes Element $a \in I$ mit $a \notin P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_k$.*

nicht unbedingt richtig zu sein braucht (im inhomogenen Fall ist diese Aussage bekanntlich richtig). Es lässt sich aber leicht zeigen, dass (1) gilt, wenn eine der beiden folgenden Eigenschaften richtig ist:

(a) *Alle homogenen Nicht-Einheiten besitzen positiven Grad.*

(Diese Eigenschaft haben wir für unsere Algebren R in 1. vorausgesetzt.)

(b) *Es existiert eine homogene Einheit positiven Grades.*

(Diese Eigenschaft ist in den homogenen Lokalisierungen erfüllt.)

§2. Iterierte M-Folgen und deren Beziehungen mit den Ext-Moduln

1. R sei wieder wie in §1.1. vorausgesetzt und $Z = \oplus_{j \geqslant 1} R_j$ das homogen-maximale Ideal, ferner M ein endlicher, graduierter R-Modul. Als Vorbereitung auf den Hauptsatz dieses Paragraphen benötigen wir folgende Definition:

2. Eine Folge aus homogenen Elementen $x_0, x_1, \ldots, x_d \in Z$ ($d = \dim M$) heisst *iterierte M- Folge*, wenn man die x_i und die dazu gehörigen Moduln $P_i(M)$, $Q_i(M)$ und $\bar{P}_i(M)$ ($i = 0, \ldots, d$) durch folgende, induktiv definierte Konstruktion erhält:

Wir setzen $x_0=0$ und $P_0(M)=M$. Wenn dann die x_i und die $P_i(M)$ für $i=0,\ldots,k$, die $Q_i(M)$ und die $\bar{P}_i(M)$ für $i=0,\ldots,k-1$ bereits definiert sind, so sei $Q_k(M)$ definiert als der umfassendste Quasinull-Untermodul von $P_k(M)$ und $\bar{P}_k(M)$ als der Restklassenmodul $P_k(M)/Q_k(M)$.

Der umfassendste Quasinull-Untermodul ist wohldefiniert, denn der Nullmodul ist immer quasinull und mit zwei Untermoduln ist auch deren Summe quasinull.

Ist $\bar{P}_k(M)=0$, so brechen wir unsere Konstruktion ab. Andernfalls überlegt man sich, dass $Q_k(M)$ auch definiert werden könnte als der Durchschnitt aller nicht zum homogen-maximalen Ideal Z gehörigen Primärkomponenten einer reduzierten Primärzerlegung von Null in $P_k(M)$, woraus folgt, dass in Z homogene Nicht-Nullteiler bezüglich $\bar{P}_k(M)$ existieren. Wir wählen für x_{k+1} einen solchen und setzen noch

$$P_{k+1}(M)=\bar{P}_k(M)/x_{k+1}\bar{P}_k(M),$$

womit der Induktionsschritt vollzogen ist.

3. Dass das Verfahren beim d-ten Schritt abbricht, folgt aus der Tatsache, dass die Dimension beim Übergang von $P_k(M)$ zu $\bar{P}_k(M)$ unverändert bleibt, während sie beim Schritt von $\bar{P}_k(M)$ zu $P_{k+1}(M)$ um genau eins abnimmt.

4. Aus diesen Überlegungen, zusammen mit der Tatsache, dass die abgespaltenen „Stör-Moduln" $Q_i(M)$ Quasinull-Moduln waren, folgt auch, dass jede iterierte M-Folge homogenes Parametersystem bezüglich M ist.

SATZ 1. *Seien R und M wie in 1., R' ein Modell von R vom Grad g und der Dimension m, ferner $x_0,\ldots,x_d$ eine iterierte M-Folge mit Grad $x_i=g_i$ für $i\geqslant 1$ und $g_0=0$. Dann existiert für $k=0,\ldots,d$ ein homogener K-Homomorphismus von Grad $-\Sigma_{i=0}^{k}g_i+$ $+g\cdot m$:*

$$g^{(k)}:\mathrm{Ext}_{R'}^{m-k}(M,R')\to Q_k(M)^t$$

($\ldots^t$ bedeutet Dualmodul-Bildung mit Vorzeichenwechsel der Grade), dessen Beschränkung auf den Grad j:

$$g_j^{(k)}:\mathrm{Ext}_{R'}^{m-k}(M,R')_j\to(Q_k(M)^t)_{j-\Sigma g_i+gm}$$

ist ein Isomorphismus für

$$j<\mathrm{Min}\{n/\exists i:\mathrm{Ext}_{R'}^{i}(M,R')_n\neq 0\}+\mathrm{Min}\{g_i/i=1,\ldots,k\}.$$

Beweis. Wir setzen zur Abkürzung P_k, Q_k, $\bar{P}_k$ für $P_k(M)$, $Q_k(M)$, $\bar{P}_k(M)$ und definieren $R_i'=K[X_1,\ldots,X_i]$ für $i=0,\ldots,m$ (sodass also $R'=R_m'$). Durch mehrmalige Anwendung des Reduktionslemmas (siehe Anhang 1) erhalten wir nun für einen

Quasinullmodul Q_k:

$$\mathrm{Ext}^i_{R'}(Q_k, R') \cong \mathrm{Ext}^{i-1}_{R'_{m-1}}(Q_k, R'_{m-1}) \cong \cdots \cong \mathrm{Hom}_{R'_{m-i}}(Q_k, R_{m-i}).$$

Daraus folgt:

$$\mathrm{Ext}^i_{R'}(Q_k, R') = 0 \quad \text{für} \quad i < m \tag{1}$$

und es gibt einen homogenen K-Isomorphismus vom Grad gm:

$$r_k : \mathrm{Ext}^m_{R'}(Q_k, R') \to Q_k^t.$$

Da x_{k+1} Nicht-Nullteiler bezüglich $\bar{P}_k$, so ist die Multiplikation mit x_{k+1} als Abbildung $\bar{P}_k \to x_{k+1}\bar{P}_k$ ein homogener Isomorphismus vom Grad g_{k+1}. Dieser induziert ebenfalls einen homogenen Isomorphismus vom Grad g_{k+1}:

$$x^{(i)}_{k+1} : \mathrm{Ext}^i_{R'}(x_{k+1}\bar{P}_k, R') \to \mathrm{Ext}^i_{R'}(\bar{P}_k, R').$$

Aus der Definition der P_k, Q_k und $\bar{P}_k$ folgen die kurzen exakten Sequenzen:

$$0 \to Q_k \to P_k \to \bar{P}_k \to 0 \quad \text{und} \quad 0 \to x_{k+1}\bar{P}_k \to \bar{P}_k \to P_{k+1} \to 0$$

mit Abbildungen vom Grade Null. Sie induzieren die langen exakten Sequenzen:

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^i_{R'}(\bar{P}_k, R') \xrightarrow{p_k^{(i)}} \mathrm{Ext}^i_{R'}(P_k, R') \xrightarrow{q_k^{(i)}} \mathrm{Ext}^i_{R'}(Q_k, R') \to \cdots \tag{2}$$

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^i_{R'}(\bar{P}_k, R') \to \mathrm{Ext}^i_{R'}(x_{k+1}\bar{P}_k, R') \xrightarrow{s_k^{(i)}} \mathrm{Ext}^{i+1}_{R'}(P_{k+1}, R') \to \cdots \tag{3}$$

mit homogenen R'-Homomorphismen $p_k^{(i)}$, $q_k^{(i)}$, $s_k^{(i)}$ vom Grade Null.

Wegen (1) ist $p_k^{(i)}$ Isomorphismus für $i<m$. $q_k^{(m)}$ ist ebenfalls Isomorphismus, denn

$$\mathrm{Ext}^m_{R'}(\bar{P}_k, R') = 0. \tag{4}$$

Wäre das nämlich nicht der Fall, so würden der Isomorphismus $(x^{(m)}_{k+1})^{-1}$ und die gradweise Exaktheit von (3) induzieren:

$$\mathrm{Ext}^{m+1}_{R'}(P_{k+1}, R') \neq 0,$$

was nicht geht, da die homologische Dimension jedes R'-Moduls $\leqslant m$ ist.

Die Abbildungen

$$g^{(k)} = r_k q_k^{(m)} \prod_{i=1}^{k} s^{(m-i)}_{k-i} (x^{(m-i)}_{k+1-i})^{-1} (p^{(m-i)}_{k-i})^{-1} \quad \text{für} \quad k = 1, \ldots, d$$

und $g^{(0)} = r_0\, q_0^{(m)}$ sind also wohldefinierte, homogene K-Homomorphismen vom Grad $-\Sigma_{i=0}^{k} g_i + g \cdot m$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass für die betreffenden Grade auch die $s_{k-i}^{(m-i)}$ isomorph abbilden, wenn die letzte Ungleichung des Satzes 1 vorausgesetzt wird. Dazu überlegt man sich, dass die graduierten Moduln $\mathrm{Ext}_{R'}^{i}(\bar{P}_k, R')$ nicht verschwindende Elemente höchtens von einem höheren Grad als dem betrachteten besitzen können und nutzt dann die gradweise Exaktheit von (3) aus. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Folgerungen aus Satz 1:

5. Wählen wir eine iterierte M-Folge, deren Grade genügend gross sind, so ergibt sich aus Satz 1 unmittelbar die Modellinvarianz-Aussage von §1.5. und daraus auch die Modellinvarianz der homologischen Dimension, inbesondere also der Freiheit von M als R'-Modul.

6. Auf analoge Weise folgt, dass die Grössen

$$L\left(j + \sum_{i=0}^{k} g_i, Q_k(M)\right)$$

unabhängig von der Wahl der zugrundegelegten iterierten M-Folge sind, sofern die Grade g_i genügend gross sind.

7. Wenn wiederum $m = \dim R'$ und $d = \dim M$ bedeuten, ferner $d > 0$ ist, so gilt:

$\mathrm{Ext}_{R'}^{m}(M, R')$ ist immer quasinull

und

$\mathrm{Ext}_{R'}^{m-d}(M, R')$ ist nie quasinull.

Das erstere gilt wegen dem Isomorphismus $q_0^{(m)}$. Wäre das zweite nicht der Fall und n der grösste Grad mit $\mathrm{Ext}_{R'}^{m-d}(M, R')_n \neq 0$, so würde aus der Sequenz (3) und den Isomorphismen $p_k^{(i)}$ folgen: $\mathrm{Ext}_{R'}^{m-d}(P_k(M), R')_n \neq 0$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$ und das Reduktionsverfahren würde nicht abbrechen.

§3. Die lokale Charakterisierung der Quasifreiheit

Sei wiederum $R = \oplus_{j \geqslant 0} R_j$ mit $R_0 = K$ eine endliche, graduierte K-Algebra und M ein endlicher, graduierter R-Modul. $R' = K[y_0, \ldots, y_n]$ sei ein injektives Modell, von dem wir voraussetzen können: $R' \subseteq R$.

SATZ 2. *Wenn zusätzlich zu diesen Voraussetzungen* $\dim R \geqslant 2$ *(also* $n \geqslant 1$*) und* $\dim M \geqslant 1$ *ist, so gilt:* $\mathrm{Max}\{k / \mathrm{Ext}_{R'}^{k}(M, R')$ *nicht quasinull*$\} = n - \mathrm{Min}\, t_{R_P}(M_P)$. *Dabei bedeutet* $t_{R_P}(M_P)$ *die Tiefe von* M_P *als* R_P*-Modul und das Minimum wird erstreckt*

über alle homogenen, eindimensionalen Primideale P von R, deren homogene Lokalisierung $M_P \neq 0$ ist.

Bemerkung 1. $\dim R \leqslant 1$ müssen wir ausschliessen, da sonst die rechts stehenden Tiefen nicht mehr definiert wären. Im übrigen sind diese Ausnahmefälle trivial.

Bemerkung 2. Wegen §2.7. ist der Ausdruck links wohldefiniert und $\leqslant n$. Wegen den Äquivalenzen

(1) $\dim M \geqslant 1 \langle = \rangle$ *M nicht quasinull $\langle = \rangle$ Es gibt ein homogenes, eindimensionales Primideal P mit $\operatorname{ann} M \subseteq P$,*

(2) $\operatorname{ann} M \subseteq P \langle = \rangle M_P \neq 0$

ist auch der Ausdruck rechts wohldefiniert.

Zuerst stellen wir anhand einer Beweisskizze kurz die aus der Literatur bekannten Ergebnisse zusammen, die im folgenden benutzt werden.

Ausgehend von der Betrachtung eines Moduls M über dem Polynomring R' gehen wir zunächst über zu den Lokalisierungen $M_{P'}$ (über $R'_{P'}$) nach den homogenen Primidealen P' von R'. Dabei benutzen wir das Ergebnis ([8] Prop. 18 S. IV-31), dass das Tensorieren mit einem flachen Modul (hier insbesondere die Nenneraufnahme) mit der Ext-Bildung vertauscht.

Als nächstes benutzen wir das Ergebnis, dass Polynomringe regulär sind ([8] Corollaire du Prop. 25 S. IV-43) und dass jede Lokalisierung eines regulären Ringes nach einem Primideal regulär-lokal ist ([8] Prop. 23 S. IV-41). Damit folgern wir, dass die Unterringe Nullten Grades der $R'_{P'}$ regulär-lokale Ringe sind und wenden nun das bekannte Ergebnis an, dass sich die homologische Dimension und die Tiefe eines Moduls über einem regulär-lokalen Ring zur Dimension des Ringes ergänzen ([8] Prop. 21 S. IV-35). Zuletzt untersuchen wir den Zusammenhang zwischen der Tiefe von $M_{P'}$ über $R'_{P'}$ und der Tiefe von M_P über R_P mit über P' liegenden Primidealen P von R. Dabei benutzen wir vor allem das etwa in [8] S. IV-14 unten und S. IV-15 beschriebene notwendige und hinreichende Konstruktionsprinzip für M-Folgen:
x_{k+1} ergänzt die M-Folge $x_1, \ldots, x_k$ genau dann zu einer längeren M-Folge, wenn x_{k+1} in keinem der zugehörigen Primideale von

$$\sum_{i=1}^{k} x_i M \quad \text{in} \quad M$$

liegt und $x_1, \ldots, x_k$ ist genau dann maximale M-Folge, wenn unter diesen zugehörigen Primidealen ein maximales (in unserm Fall: homogen-maximales) vorkommt.

Für den Beweis des folgenden Satzes 3 benötigen wir an bekannten Ergebnissen noch das going-down-Theorem, das bei Serre ([8] Prop. 5 S. III-5) nicht in seiner vollen Schärfe bewiesen wird. Der Satz gilt nämlich schon, wenn der darüberliegende Ring als Modul über dem unterliegenden ganz abgeschlossenen Integritätsbereich torsionsfrei (und natürlich ganz) ist. (vgl. etwa Zariski-Samuel [10.I] Theorem 6 S. 262.)

Wir benötigen zunächst die drei Lemmata:

LEMMA 1. *Folgende beiden Aussagen sind äquivalent:*

(a) $\mathrm{Ext}^k_{R'}(M, R')$ *nicht quasinull.*

(b) *Es gibt ein homogenes, eindimensionales Primideal* P' *von* R', *sodass* $\mathrm{Ext}^k_{R'_{P'}}(M_{P'}, R'_{P'}) \neq 0$.

Dies folgt unmittelbar aus den Äquivalenzen (1) und (2) angewandt auf den Modul $\mathrm{Ext}^k_{R'}(M, R')$ über dem Ring R' und der Gleichung:

$$\mathrm{Ext}^k_{R'}(M, R')_{P'} \cong \mathrm{Ext}^k_{R'_{P'}}(M_{P'}, R'_{P'})$$

(vgl. Serre [8] Prop. 18 S. IV-31).

LEMMA 2. *Für ein homogenes Primideal* P' *von* R' *mit den Eigenschaften:* $\dim P' \geqslant 1$ *und* $M_{P'} \neq 0$ *gilt:*

$$t_{R'_{P'}}(M_{P'}) + \mathrm{hd}_{R'_{P'}}(M_{P'}) = \mathrm{hdim}\, R'_{P'} = \dim R' - \dim P',$$

wobei die homologische Dimension definiert sei durch:

$$\mathrm{hd}_{R'_{P'}}(M_{P'}) = \mathrm{Max}\,\{k/\mathrm{Ext}^k_{R'_{P'}}(M_{P'}, R'_{P'}) \neq 0\}.$$

(hdim = homogene Dimension, sie unterscheidet sich von der üblichen dadurch, dass man nur Ketten aus homogenen Primidealen betrachtet.)

Beweis. Mindestens ein y_i – ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei dies y_0 – liegt nicht in P'. Deshalb lässt sich der Unterring $(R'_{P'})_0$ aller Elemente von $R'_{P'}$ vom Grade Null als Lokalisierung des Polynomrings

$$K\left[\frac{y_1}{y_0}, \ldots, \frac{y_n}{y_0}\right]$$

nach einem (inhomogenen) Primideal auffassen und ist deshalb regulär-lokal (vgl. Serre [8] Corollaire du Prop. 25 S. IV-43). Wenn wir

$$M^{(0)}_{P'} = \bigoplus_{i=0}^{g-1} (M_{P'})_i$$

setzen (g = Grad der y_i), so gilt deshalb (vgl. Serre [8] Prop. 21 S. IV-35):

$$\mathrm{hd}_{(R'_{P'})_0}(M^{(0)}_{P'}) + t_{(R'_{P'})_0}(M^{(0)}_{P'}) = \dim (R'_{P'})_0.$$

Anderseits lässt sich die Struktur von $R'_{P'}$ sehr einfach überblicken, wenn man diejenige von $(R'_{P'})_0$ kennt, denn die Multiplikation mit den Potenzen von y_0 ist ein

Isomorphismus. Insbesondere verifiziert man leicht:

$$\dim (R'_{P'})_0 = \operatorname{hdim} R'_{P'} = \dim R' - \dim P'$$
$$\operatorname{hd}_{(R'_{P'})_0}(M_{P'}^{(0)}) = \operatorname{hd}_{R'_{P'}}(M_{P'})$$
$$t_{(R'_{P'})_0}(M_{P'}^{(0)}) = t_{R'_{P'}}(M_{P'})$$

damit ist Lemma 2 bewiesen.

LEMMA 3. *Sei P' ein homogenes Primideal in R' mit* $\dim P' \geqslant 1$ *und $M_{P'} \neq 0$. Dann ist für mindestens eines der über P' liegenden Primideale $P_i (i = 1, \ldots, k)$ von R die homogene Lokalisierung $M_{P_i} \neq 0$.*

$$\textit{Wenn } M_{P_i} \begin{cases} \neq 0 & \text{für} \quad i = 1, \ldots, s \\ = 0 & \text{für} \quad i = s+1, \ldots, k \end{cases}$$

so gilt:

$$t_{R'_{P'}}(M_{P'}) = \operatorname*{Min}_{i=1,\ldots,s} t_{R_{P_i}}(M_{P_i}).$$

Beweis. Für das homogene R-Ideal $\operatorname{ann} M$ gilt wegen $M_{P'} \neq 0$: $(\operatorname{ann} M \cap R') \subseteq P'$. Daraus folgt: Für mindestens ein i ist $\operatorname{ann} M \subseteq P_i$, was gleichbedeutend ist mit $M_{P_i} \neq 0$. Den zweiten Teil zerlegen wir in die Teilschritte

$$t_{R'_{P'}}(M_{P'}) = t_{R_{P'}}(M_{P'}). \tag{2a}$$
$$t_{R_{P'}}(M_{P'}) \leqslant \operatorname*{Min}_{i=1,\ldots,s} t_{R_{P_i}}(M_{P_i}). \tag{2b}$$

Für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, s\}$ ist

$$t_{R_{P_i}}(M_{P_i}) = t_{R_{P'}}(M_{P'}). \tag{2c}$$

Der Ring $R_{P'}$ sei dabei der Ring R_S mit der Nennermenge S aller nicht in P' liegender homogener Elemente von R'. Dieser graduierte Ring besitzt nur endlich viele homogen-maximale Ideale, nämlich die von den P_i erzeugten und ist ganz über $R'_{P'}$.

Um (2a) zu beweisen setzen wir $t = t_{R'_{P'}}(M_{P'})$ und wählen eine homogene $M_{P'}$-Folge $x_1, \ldots, x_t$ in $R'_{P'}$. Trivialerweise ist die Folge auch $M_{P'}$-Folge mit $R_{P'}$ als Ring. Die Maximalität geht aus der Tatsache hervor, dass, wie man sich leicht überlegt, mindestens eines der homogen-maximalen Primideale von $R_{P'}$ als zugehöriges Primideal von $\Sigma x_i M_{P'}$ in $M_{P'}$ vorkommt, wenn über $R'_{P'}$ das homogen-maximale Ideal zugehörig ist.

Sei P eines der über P' liegenden Primideale mit $M_P \neq 0$ und $s: R_{P'} \to R_P$ die kanonische Abbildung (Aufnahme aller homogenen, nicht im durch P erzeugten

Primideal von $R_{P'}$ liegenden Elemente als Nenner). Wenn nun die Elemente $x_1, \ldots, x_r$ von $R_{P'}$ eine homogene $M_{P'}$-Folge sind, so überlegt man sich mit Hilfe des Konstruktionsprinzips für M-Folgen und dem Verhalten der zugehörigen Primideale bei Nenneraufnahme (vgl. etwa Serre [8] Prop. 6 S. I-16), dass die Bilder $s(x_1), \ldots, s(x_r)$ eine M_P-Folge in R_P bilden. Daraus folgt (2b). Um (2c) zu beweisen, wählt man eine maximale $M_{P'}$-Folge $x_1, \ldots, x_r$ in $R_{P'}$ und zeigt mit denselben Mitteln, dass für mindestens eines der über P' liegenden Primideale P die Folge $s(x_1), \ldots, s(x_r)$ maximale M_P-Folge ist.
Damit ist Lemma 3 bewiesen.

Mit Hilfe der drei Lemmata erhält man nun Satz 2 (die vorkommenden Primideale $P' \subseteq R'$ bzw. $P \subseteq R$ seien stillschweigend als homogen, von der Dimension 1 und als $\operatorname{ann} M$ umfassend vorausgesetzt):

Aus Lemma 1 folgt

$$\operatorname{Max}\{k/\operatorname{Ext}^k_{R'}(M, R') \text{ nicht quasinull}\} = \operatorname{Max} \operatorname{hd}_{R'_{P'}}(M_{P'}).$$

Wegen Lemma 2 ist dieser Ausdruck

$$= n - \operatorname{Min} t_{R'_{P'}}(M_{P'}).$$

Nach Lemma 3 gilt schliesslich

$$t_{R'_{P'}}(M_{P'}) = \operatorname*{Min}_{P \text{ über } P'} t_{R_P}(M_P)$$

und damit

$$\operatorname{Min} t_{R'_{P'}}(M_{P'}) = \operatorname{Min} t_{R_P}(M_P) \qquad \text{q.e.d.}$$

Die Bedeutung des eben bewiesenen Satzes 2 besteht vor allem darin, dass er den schwierigsten Teil des folgenden Satzes 3 vorwegnimmt. Satz 3 betrachten wir als den Hauptsatz dieses zweiten Teils unserer Arbeit.

SATZ 3. *Seien R, R' und M wie zu Beginn von* §3, *und* $\dim R \geqslant 2$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *M ist quasifreier R'-Modul.*

(b) *Für jedes homogene, eindimensionale Primideal P von R gilt genau eine der beiden Alternativen:*

(b1) $M_P = 0$

(b2) $t_{R_P}(M_P) = \dim R - 1$.

(c) *Es ist entweder*

(c1) *M quasinull oder*

(c2) *M torsionsfreier R'-Modul und für alle eindimensionalen, homogenen Primideale P von R mit $M_P \neq 0$ gilt:*
M_P ist Macaulay-R_P-Modul.

(d) *Wenn auch der Nullmodul als Macaulay'sch bezeichnet wird, so kann* (c2) *ersetzt werden durch:*
(c2′) *M torsionsfreier R'-Modul und für alle homogenen Primideale P von R mit* $\dim P \geqslant 1$ *ist die homogene Lokalisierung M_P Macaulay'sch.*

Bemerkung. Die Aussage „M torsionsfreier R'-Modul" ist, wie man sich leicht überlegt, gleichbedeutend mit der modellinvariant formulierten Aussage „die zugehörigen R-Primideale von 0 in M sind alle von maximaler Dimension ($=\dim R$)".

Beweis von Satz 3. Die Äquivalenz von (a) mit (b) folgt unmittelbar aus Satz 2.
(a), (b)$\Rightarrow$(c): Zuerst zeigen wir: Wenn (a) gilt, und M nicht quasinull ist, so ist M torsionsfreier R'-Modul. Wir nehmen an, M sei nicht quasinull, d.h. $\dim M \geqslant 1$ und nicht torsionsfreier R'-Modul. Dann existiert ein zugehöriges R'-Primideal $Q' \neq 0$ von 0 in M mit $\dim Q' \geqslant 1$. Sei P' ein Q' umfassendes homogenes Primideal der Dimension 1. $M_{P'}$ ist dann nicht Null und als $R'_{P'}$-Modul nicht torsionsfrei, also nicht frei. Daraus folgt nach Lemma 1: M nicht quasifrei im Widerspruch zu (a).

Die Macaulay-Eigenschaft der betreffenden homogenen Lokalisierungen ist eine unmittelbare Folgerung aus (b2), denn (b2) induziert wegen

$$t_{R_P}(M_P) \leqslant \operatorname{hdim}_{R_P}(M_P) \leqslant \operatorname{hdim} R_P \leqslant \dim R - 1$$

die Gleichung

$$t_{R_P}(M_P) = \operatorname{hdim}_{R_P}(M_P), \tag{3}$$

und dies ist eine Charakterisierung der Macaulay-Moduln, bzw. die sinngemässe Verallgemeinerung auf den homogenen Fall (Vgl. Serre [8] Def. 1 S. IV-18).

(c)$\Rightarrow$(b): Wenn (c1) zutrifft, so gilt für alle homogenen, eindimensionalen Primideale $P: M_P = 0$ also (b1).

Es sei nun M ein torsionsfreier R'-Modul und P ein eindimensionales, homogenes Primideal mit $\operatorname{ann} M \subseteq P$. Wegen der Torsionsfreiheit lässt sich jedes Modell R' auch als Modell von $R/\operatorname{ann} M$ auffassen und $R/\operatorname{ann} M$ ist als R'-Modul torsionsfrei. Aus dem going-down-Theorem folgt nun: Es gibt eine homogene Primidealkette der Länge $\dim R - 1$, die $\operatorname{ann} M$ mit P verbindet. Dies induziert

$$\operatorname{hdim}_{R_P}(M_P) = \operatorname{hdim} R_P = \dim R - 1 .$$

Zusammen mit der Macaulay-Eigenschaft (3) folgt daraus (b2).

Die Äquivalenz von (c2) und (c2′) folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass mit einem Modul M über einem lokalen Ring R auch alle Lokalisierungen M_P über R_P Macaulay'sch sind (vgl. Serre [8] Théorème 6 S. IV-23).

Anhang 1. Das Reduktionslemma

SATZ. *Sei R ein graduierter Ring, $S = R[X]$. Man schreibt auch dem Element X einen Grad g zu ($g \in \mathbf{Z}$). Damit ist auch S graduiert. $f \in S$ sei ein normiertes, homogenes Polynom, d.h.*

$$f = X^n + c_1 X^{n-1} + \cdots + c_n \qquad (c_i \in R, \operatorname{Grad} c_i = g \cdot i).$$

Wenn der endliche, graduierte S-Modul M von f annuliert wird, so ist er auch endlicher, graduierter R-Modul und es gibt homogene R-Isomorphismen vom Grad g:

$$r_i : \operatorname{Ext}_S^i(M, S) \to \operatorname{Ext}_R^{i-1}(M, R) \qquad (i \geqslant 1).$$

Beweis. Q sei der graduierte Ring aller formalen Potenzreihen in X^{-1} (Anfangsexponent in $\mathbf{Z}$) mit Koeffizienten in R. Als homogene Elemente bezeichnen wir dabei die Reihen

$$c_{m_0} X^{-m_0} + c_{m_0+1} X^{-m_0-1} + \cdots \quad \text{mit} \quad c_{m_0+i} \in R, \quad \text{homogen vom Grad } (\operatorname{Grad} c_{m_0} + g \cdot i).$$

S lässt sich als Unterring von Q auffassen und wir erhalten die kurze, exakte Sequenz: $0 \to S \to Q \to Q/S \to 0$. Diese induziert die lange, exakte Sequenz:

$$\cdots \to \operatorname{Ext}_S^i(M, S) \to \operatorname{Ext}_S^i(M, Q) \to \operatorname{Ext}_S^i(M, Q/S) \to \cdots. \tag{1}$$

Wegen der Normiertheit ist f in Q invertierbar, die Multiplikation mit f also ein Isomorphismus. Als Abbildung $M \to M$ aufgefasst ist jedoch die Multiplikation mit f die Nullabbildung. Daraus folgt: Die Multiplikation mit $f : \operatorname{Ext}_S^i(M, Q) \to \operatorname{Ext}_S^i(M, Q)$ ist gleichzeitig die Nullabbildung und ein Isomorphismus, was $\operatorname{Ext}_S^i(M, Q) = 0$ induziert. Aus (1) folgt daher:

$$s_i : \operatorname{Ext}_S^i(M, S) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Ext}_S^{i-1}(M, Q/S)$$

ist ein homogener, natürlicher S-Isomorphismus vom Grad Null. Die Elemente von Q/S können eindeutig repräsentiert werden durch Elemente der Form

$$c = c_1 X^{-1} + c_2 X^{-2} + c_3 X^{-3} + \cdots \qquad (c_i \in R).$$

Jedem solchen c ordnen wir das Element $g_c \in \operatorname{Hom}_R(S, R)$ zu, das definiert sein soll durch $g_c(X_i) = c_{i+1}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. Man verifiziert leicht, dass diese Abbildung ein homogener S-Isomorphismus vom Grad g ist. ($\operatorname{Hom}_R(S, R)$ lässt sich bekanntlich auch als S-Modul auffassen) Dieser induziert einen natürlichen, homogenen S-Iso-

morphismus vom Grad g:

$$t_i: \mathrm{Ext}_S^i(M, Q/S) \to \mathrm{Ext}_S^i(M, \mathrm{Hom}_R(S, R)).$$

Nun existiert bekanntlich ein natürlicher Isomorphismus, den man sofort als R-Isomorphismus erkennt:

$$\mathrm{Hom}_S(., \mathrm{Hom}_R(S, R)) \overset{\cong}{\to} \mathrm{Hom}_R(., R),$$

definiert durch $f \to g$ mit $g(m) := (f(m))(1)$ (vgl. Cartan-Eilenberg [2] Prop. 5.2 S. 28). Diesen wenden wir an auf eine S-freie Auflösung von M (die dann auch R-freie Auflösung ist), wo er einen Kettenisomorphismus:

$$\mathrm{Hom}_S(\text{freie Auflösung}, \mathrm{Hom}_R(S, R)) \to \mathrm{Hom}_R(\text{freie Auflösung}, R)$$

induziert. Daraus folgt:

$$u_i: \mathrm{Ext}_S^i(M, \mathrm{Hom}_R(S, R)) \overset{\cong}{\to} \mathrm{Ext}_R^i(M, R)$$

ist homogener, natürlicher R-Isomorphismus vom Grad Null.

$$r_i = u_{i-1} \circ t_{i-1} \circ s_i$$

liefert nun das gewünschte.

Anhang 2. Der Invarianzbeweis nach M. André

SATZ. *Sei S eine endliche, graduierte K-Algebra, M ein endlicher, graduierter S-Modul. Dann hängt*

$$\mathrm{Ext}_R^{k+d(R)}(M, R)_{j-\Sigma g_i}$$

nicht vom verwendeten Modell R ab. (Der Begriff des Modells ist definiert wie in §1.2., *nur dass die $g_i = \mathrm{Grad}\, X_i$ auch verschieden sein dürfen.)*

Beweis. Seien $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ ($n = d(R)$, $\mathrm{Grad}\, X_i = g_i$) und $R' = K[X_1', \ldots, X_m']$ ($m = d(R')$, $\mathrm{Grad}\, X_i' = g_i'$) zwei Modelle von S. Dann ist $R \otimes_K R'$ auch ein Modell der Dimension $d(R) + d(R')$. Es genügt zu zeigen:

$$\mathrm{Ext}_{R \otimes_K R'}^{k+d(R)+d(R')}(M, R \otimes_K R')_{j-\Sigma g_i - \Sigma g'_i} \cong \mathrm{Ext}_R^{k+d(R)}(M, R)_{j-\Sigma g_i},$$

oder

$$\mathrm{Ext}_{R \otimes_K R'}^{k+d(R')}(M, R \overset{\otimes}{K} R')_{j-\Sigma g'_i} \cong \mathrm{Ext}_R^k(M, R)_j.$$

Diese Isomorphismen folgen unmittelbar aus dem Reduktionslemma angewandt auf

folgende Paare:

$$R \subset R[X'_1] \subset R[X'_1, X'_2] \subset \cdots \subset R[X'_1, \ldots, X'_m].$$

Wir betrachten etwa das Paar

$$R[X'_1, ., X'_i] \subset R[x'_1, ., X'_i, X'_{i+1}].$$

Das Bild von X'_{i+1} in S genügt einer Ganzheitsgleichung $\bar{f}(\bar{X}'_{i+1})=0$ mit Koeffizienten im Bild von R. f sei ein Urbildpolynom von $\bar{f}$ mit Koeffizienten in R. Es gilt natürlich $f \cdot M = 0$, was die Anwendung des Reduktionslemmas gestattet. Bei jedem Schritt wird der Index von Ext* um eins erniedrigt, und der Grad um g'_i erhöht.

LITERATUR

[1] Atiyah M. F. und Macdonald I. G., *Introduction to Commutative Algebra*, (Addison-Wesley Publishing Company, 1969).
[2] Cartan H. und Eilenberg S., *Homological Algebra*, (Princeton, 1956).
[3] Eichler M., *Projective Varieties and Modular Forms*, Lectures Notes in Mathematics No. 210, 1971.
[4] Eichler M., *Zur Begründung der Theorie der automorphen Funktionen in mehreren Variablen.* Aequationes Mathematicae *3* (1969), 93–111.
[5] Kiyek K. H., *Zur Berechnung von Ext bei Moduln über Polynomringen.* Math. Z. *120* (1971), 318–322.
[6] Matsumura H., *Commutative Algebra*, (W. A. Benjamin, Inc. New York, 1970).
[7] Nagata, *Local Rings*, (New York, Wiley, 1962). *Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 13.
[8] Serre J. P., *Algèbre Locale – Multiplicités.* Lectures Notes in Mathematics No. 11, 1965.
[9] Serre J. P., *Faisceaux Algébriques Coherents.* Annals of Mathematics, *61*, Nl. 2 (1955).
[10.I] Zariski O. und Samuel P., Commutative Algebra, Vol. I.
[10.II] Zariski O. und Samuel P., Commutative Algebra, Vol. II. (Van Nostrand, 1960).

Eingegangen 3. April/12. Oktober 1972.