

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 48 (1973)

**Artikel:** Über Kohomologietheorien mit formaler Gruppe der Charakteristik  $p$   
**Autor:** Würgler, Urs  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-37173>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über Kohomologietheorien mit formaler Gruppe der Charakteristik $p$

URS WÜRLER

## 1. Einleitung und Ergebnisse

Es sei  $h^*(-)$  eine  $\mathbb{C}$ -orientierte Kohomologietheorie, d.h.  $h^*(-)$  ist multiplikativ und das kanonische komplexe Linienbündel  $\eta$  über dem unendlich-dimensionalen komplexen projektiven Raum  $P_\infty\mathbb{C}$  ist  $h^*$ -orientiert. Wir werden stets annehmen, dass  $h^*(-)$  über der Kategorie  $\mathbf{W}$  der Räume vom Homotopietyp eines CW-Komplexes gegeben ist und durch ein Ringspektrum dargestellt wird. Sei  $\Lambda = h^*(pt)$ .  $h^*P_\infty\mathbb{C}$  ist isomorph zu  $\Lambda[[a]]$ , dem graduierten Ring der homogenen Potenzreihen in  $a$  wobei  $a = e(\eta) \in h^2P_\infty\mathbb{C}$  die Eulerklasse von  $\eta$  bezeichnet. Sei  $m: P_\infty\mathbb{C} \times P_\infty\mathbb{C} \rightarrow P_\infty\mathbb{C}$  die klassifizierende Abbildung des Linienbündels  $\eta \otimes \eta$ . Das Element  $m^*(a) \in h^2(P_\infty\mathbb{C} \times P_\infty\mathbb{C})$  definiert eine Potenzreihe  $F_a(X, Y) \in \Lambda[[X, Y]]$  derart, dass für die Eulerklassen komplexer Linienbündel gilt:

$$e(L_1 \otimes L_2) = F_a(e(L_1), e(L_2)).$$

$F_a(X, Y)$  ist eine kommutative formale Gruppe über dem graduierten Ring  $\Lambda$  und man hat

$$F_a(X, Y) = X + Y + \sum_{i, j > 0} a_{ij} X^i Y^j, \quad a_{ij} \in h^{2-2(i+j)}(pt). \quad (1.1)$$

Ist  $k$  eine natürliche Zahl, so sei  $[k]_F(X) \in \Lambda[[X]]$  definiert durch

$$[k]_F(X) = F_a(X, [k-1]_F(X)), \quad [1]_F(X) = X. \quad (1.2)$$

Die kleinste natürliche Zahl  $k$ , für welche  $[k]_F(X) = 0$  ist, nennen wir die Charakteristik der formalen Gruppe  $F_a(X, Y)$ . Falls kein solches  $k$  existiert, habe  $F_a(X, Y)$  Charakteristik 0. Sind  $a$  und  $b$  Eulerklasse von  $\eta$  so sieht man leicht, dass die formalen Gruppen  $F_a(X, Y)$  und  $F_b(X, Y)$  isomorph sind, insbesondere ist also die Charakteristik von  $F_a(X, Y)$  unabhängig von der Wahl der Eulerklasse  $a$  und somit eine Invariante der Kohomologietheorie.

Bezeichnet  $H^*(X, R)$  singuläre Kohomologie mit Koeffizienten in einem Ring der Charakteristik  $p \neq 0$ , so ist  $e(\eta^{\otimes p}) = pe(\eta) = 0$ , d.h. die formale Gruppe von  $H^*(-, R)$  hat Charakteristik  $p$ . In der vorliegenden Note soll umgekehrt gezeigt werden, dass  $H^*(-, R)$  im wesentlichen die einzige Theorie mit dieser Eigenschaft ist. Genauer:

1.3 SATZ. *Es sei  $h^*(-)$  eine  $\mathbb{C}$ -orientierbare Kohomologietheorie,  $h^0(pt)$  ein*

endlicher Körper der Charakteristik  $p$ . Hat die formale Gruppe  $F(X, Y)$  von  $h^*(-)$  Charakteristik  $p$ , so gibt es eine über  $\mathbf{W}$  definierte natürliche Äquivalenz multiplikativer Kohomologietheorien

$$h^n(X) \xrightarrow{\cong} \prod_{i \geq 0} H^i(X; h^{n-i}(pt)).$$

*Bemerkungen.*

(1) Man beachte, dass die formale Gruppe von  $h^*(-)$  wegen (1.1) sicher dann Charakteristik  $p$  hat, wenn  $h^{2n}(pt) = 0$  für  $n < 0$ .

(2) Nach dem Struktursatz von Lazard (vgl. etwa [4]) ist jede kommutative formale Gruppe der Charakteristik  $p$  über einem Ring der Charakteristik  $p$  isomorph zur linearen Gruppe  $X + Y$ . Satz 1.3 kann also auch als Eindeigkeitssatz für Kohomologietheorien mit linearer formaler Gruppe interpretiert werden.

(3) Zur Frage wann eine Kohomologietheorie  $\mathbb{C}$ -orientierbar ist, vgl. man A. Dold [3].

(4) Betrachtet man anstelle von  $\mathbb{C}$ -orientierbaren Theorien  $\mathbb{R}$ -orientierbare, kann man etwas mehr sagen (vgl. [7]).

## 2. Zur Darstellbarkeit der singulären Kohomologie

Sei  $h^*(-)$  eine zusammenhängende Kohomologietheorie, d.h.  $h^q(pt) = 0$  für  $q > 0$ . Die Atiyah – Hirzebruch – Spektralsequenz  $H^*(X, h^*(*)) \Rightarrow h^*(X)$  besitzt dann einen „edge-homomorphism“  $e: E_\infty^{p,0} \rightarrow E_2^{p,0}$  und vermöge  $e$  kann man eine natürliche Transformation von Kohomologietheorien

$$T: h^p(X) \rightarrow E_\infty^{p,0} \xrightarrow{e} E_2^{p,0} \cong H^p(X, h^0(*)) \quad (2.1)$$

über der Kategorie der endlichdimensionalen CW-Komplexe definieren. Ist  $h^*(-)$  multiplikativ, so auch  $T$ . Weil  $\lim_{\leftarrow}^1 H^{p-1}(X^n, h^0(*)) = 0$  ist, kann man  $T$  auf ganz  $\mathbf{W}$  erweitern:

$$T: h^p(X) \rightarrow \varprojlim h^p(X^n) \rightarrow \varprojlim H^p(X^n, h^0(*)) \cong H^p(X, h^0(*)).$$

Dabei bezeichnet  $X^n$  das  $n$ -Gerüst von  $X$ .

Wie üblich sagen wir, die Theorie  $h^*(-)$  stelle die singuläre Kohomologie  $H^*(-, h^0(*))$  dar, wenn

$$T_X: h^*(X) \rightarrow H^*(X, h^0(*))$$

für alle  $X \in \text{ob}(\mathbf{W})$  epimorph ist.

Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis des folgenden Satzes:

2.2. SATZ. Sei  $h^*(-)$  eine  $\mathbb{C}$ -orientierte, zusammenhängende Kohomologietheorie,  $K=h^0(*)$  ein endlicher Körper der Charakteristik  $p$ . Hat die formale Gruppe von  $h^*(-)$  Charakteristik  $p$ , so stellt  $h^*(-)$  die singuläre Kohomologie  $H^*(-, K)$  dar.

Sei  $L_p^{2n+1} = S^{2n+1}/\mathbb{Z}_p$  ein Linsenraum. In [5] hat C.P. Rourke gezeigt, dass eine zusammenhängende multiplikative Theorie  $h^*(-)$  mit  $h^0(*) = \mathbb{Z}_p$  die Kohomologie  $H^*(-, \mathbb{Z}_p)$  dann darstellt, wenn  $T: h^*(L_p^{2n+1}) \rightarrow H^*(L_p^{2n+1}, \mathbb{Z}_p)$  epimorph ist für hinreichend grosse  $n$ . Wir zeigen vorerst, dass die Bedingung  $[p]_F(X) = 0$  die Voraussetzungen des Satzes von Rourke impliziert und verallgemeinern dann dessen Methode etwas, um Satz 3.2 zu bekommen.

Für eine beliebige natürliche Zahl  $k$  bezeichne  $B\mathbb{Z}_k$  den klassifizierenden Raum der Gruppe  $\mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ .

2.3 LEMMA. Es sei  $h^*(-)$  eine zusammenhängende,  $\mathbb{C}$ -orientierte Kohomologietheorie,  $R=h^0(*)$  ein Ring der Charakteristik  $p \neq 0$ . Hat die formale Gruppe von  $h^*(-)$  Charakteristik  $p$ , so ist

$$T: h^*(B\mathbb{Z}_p) \rightarrow H^*(B\mathbb{Z}_p, R)$$

ein Epimorphismus.

Beweis. Sei  $\eta^{\otimes p}$  die  $p$ -te Tensorpotenz des kanonischen Linienbündels  $\eta$  über  $P_\infty\mathbb{C}$ ,  $\pi: S(\eta^{\otimes p}) \rightarrow P_\infty\mathbb{C}$  das assoziierte Sphärenbündel. Mittels der exakten Homotopiefolge der Faserung  $S^1 \rightarrow S(\eta^{\otimes p}) \rightarrow P_\infty\mathbb{C}$  kann man zeigen, dass  $S(\eta^{\otimes p})$  ein Eilenberg-Mac Lane-Raum  $K(\mathbb{Z}_p, 1)$  und somit homotopieäquivalent zu  $B\mathbb{Z}_p$  ist. Die Gysinfolge des Sphärenbündels  $\pi$  hat die Form

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow h^{q-2}P_\infty\mathbb{C} & \xrightarrow{\cup e(\eta^{\otimes p})} & h^qP_\infty\mathbb{C} & \rightarrow & h^qS(\eta^{\otimes p}) & \rightarrow & h^{q-1}P_\infty\mathbb{C} \rightarrow \\ & & & & \parallel & & \\ & & & & h^qB\mathbb{Z}_p & & \end{array}$$

Weil die formale Gruppe von  $h^*(-)$  Charakteristik  $p$  hat, ist  $e(\eta^{\otimes p}) = [p]_F(e(\eta)) = 0$  und somit zerfällt die Gysinfolge in kurze exakte aufspaltende Folgen

$$0 \rightarrow h^qP_\infty\mathbb{C} \rightarrow h^qB\mathbb{Z}_p \rightarrow h^{q-1}P_\infty\mathbb{C} \rightarrow 0$$

Wendet man darauf die Transformation  $T$  an, so folgt die Behauptung sofort, denn  $T: h^*(P_\infty\mathbb{C}) \rightarrow H^*(P_\infty\mathbb{C}, R)$  ist offensichtlich epimorph, da  $T$  die Eulerklasse  $e(\eta)$  auf die  $H^*(-, R)$ -Eulerklasse von  $\eta$  abbildet.

Sei  $L_n^m$  das  $m$ -Gerüst von  $L_n = B\mathbb{Z}_p \times \dots \times B\mathbb{Z}_p$  ( $n$  Faktoren).

2.4 KOROLLAR. Sei  $h^*(-)$  wie in Lemma 3.3,  $R=K$  ein endlicher Körper der

Charakteristik  $p$ . Dann ist

$$T: h^*(L_n^m) \rightarrow H^*(L_n^m, R)$$

für alle  $m, n$  epimorph.

*Beweis.* Mittels des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} h^*(L_n) & \xrightarrow{T} & H^*(L_n, R) \\ \uparrow \times & & \cong \uparrow \\ h^*B\mathbb{Z}_p \otimes \cdots \otimes h^*B\mathbb{Z}_p & \xrightarrow{T \otimes \cdots \otimes T} & H^*(B\mathbb{Z}_p, R) \otimes \cdots \otimes H^*(B\mathbb{Z}_p, R) \end{array}$$

folgt, dass  $T(L_n)$  epimorph ist. Weil auch  $H^*(L_n, R) \rightarrow H^*(L_n^m, R)$  epimorph ist, folgt die Behauptung.

Wir kommen nun zum Beweis von Satz 2.2.

Sei  $u$  das Erzeugende von  $H^1(B\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ ,  $v = \beta(u) \in H^2(B\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$  wo  $\beta$  den Bocksteinhomomorphismus zur Folge  $0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow 0$  bezeichnet. Das Produkt  $u \times v \times \cdots \times u \times v \in H^{3n}(L_{2n}, \mathbb{Z}_p)$  definiert eine Abbildung  $\alpha: L_{2n}^{4n} \rightarrow K(\mathbb{Z}_p, 3n)^{4n}$  und nach [6], VI, Kor. 2.6. ist  $\alpha^*: H^*(K(\mathbb{Z}_p, 3n)^{4n}, \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^*(L_{2n}^{4n}, \mathbb{Z}_p)$  ein Monomorphismus.

Sei  $h^*(*) = \Lambda$ . Der endliche Körper  $\Lambda^0$  habe etwa Ordnung  $p^r$ . Dann ist  $K(\Lambda^0, 3n) \simeq K(\mathbb{Z}_p, 3n) \times \cdots \times K(\mathbb{Z}_p, 3n)$  ( $r$  Faktoren) und weil  $\Lambda^0$  ein Körper ist folgt, dass auch die durch  $\alpha' = \alpha \times \cdots \times \alpha$  induzierte Abbildung

$$\alpha'^*: H^*(K(\Lambda^0, 3n)^{4n}, \Lambda^0) \rightarrow H^*(L_{2nr}^{4n}, \Lambda^0)$$

monomorph ist.

Nach Korollar 3.4 ist  $T: h^*(L_{2nr}^{4n}) \rightarrow H^*(L_{2nr}^{4n}, \Lambda^0)$  epimorph, d.h. (vgl. (3.1)) der „edge-homomorphism“ der Spektralsequenz ist ein Isomorphismus und somit ist die Spektralsequenz von  $L_{2nr}^{4n}$  trivial. Weil  $\alpha'^*$  monomorph ist, bricht auch die Spektralsequenz von  $K(\Lambda^0, 3n)^{4n}$  zusammen und somit ist  $T: h^*(K(\Lambda^0, 3n)^{4n}) \rightarrow H^*(K(\Lambda^0, 3n)^{4n}, \Lambda^0)$  epimorph. Sei nun  $X$  ein CW-Komplex,  $\dim X = m$  und  $x \in H^q(X, \Lambda^0) = \tilde{H}^q(X^+, \Lambda^0) \cong \tilde{H}^{3m-q}(X^+, \Lambda^0)$ . Weil  $K(\Lambda^0, 3n)^{4n}$   $3n$ -dimensionale Kohomologie für Komplexe der Dimension  $\leq 4n$  klassifiziert und  $T$  mit Einhängungen verträglich ist folgt, dass  $x$  im Bild von  $T$  liegt. Wegen  $\lim^1 H^*(X^n, \Lambda^0) = 0$  folgt die Behauptung.

### 3. Beweis von Satz 1.3

Wir beweisen 1.3 zunächst für zusammenhängende Theorien und führen anschließend den allgemeinen Fall darauf zurück.

Sei also  $k^*(-)$  eine zusammenhängende Kohomologietheorie, welche die Voraussetzungen von 1.3 erfülle,  $X$  ein endlicher CW-Komplex.

Nach Satz 2.2 ist die Spektralsequenz  $H^*(X, \Lambda) \Rightarrow k^*(X)$  trivial und somit auch

$H_*(X, \Lambda) \Rightarrow k_*(X)$ . Weil  $\Lambda^0$  ein Körper ist, induziert das Kroneckerprodukt  $k_*(X) \otimes k^*(X) \rightarrow \Lambda$  nach (Adams [1], Prop. 17) einen Isomorphismus

$$k^*(X) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda^*(k_*X, \Lambda). \quad (3.1)$$

Aufgrund desselben Satzes induziert die Abbildung  $k_*X \otimes H^*(X, \Lambda^0) \xrightarrow{T \otimes \text{id}} H_*(X, \Lambda^0) \otimes H^*(X, \Lambda^0) \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} \Lambda^0$  einen Isomorphismus

$$H^*(X, \Lambda^0) \approx \text{Hom}_\Lambda^*(k_*X, \Lambda^0). \quad (3.2)$$

Die Einbettung  $\Lambda^0 \subset \Lambda$  definiert mittels 3.1, 3.2 eine Transformation  $\Theta: H^*(X, \Lambda^0) \rightarrow k^*(X)$ , welche für  $X=pt$  mit  $\Lambda^0 \subset \Lambda$  übereinstimmt. Weil  $\Lambda$  flach über  $\Lambda^0$  ist, induziert  $\theta$  über der Kategorie der endlichen CW-Räume eine Aequivalenz

$$k^*(X) \approx H^*(X, \Lambda^0) \otimes_{\Lambda^0} \Lambda \approx H^*(X, \Lambda). \quad (3.3)$$

Dass dies eine Aequivalenz multiplikativer Theorien ist, bestätigt man leicht durch nachrechnen.

Ist  $h^*(-)$  eine beliebige Kohomologietheorie, so kann man mittels

$$k^q(X) := \text{Bild} \{h^q(X, X^{q-1}) \rightarrow h^q(X, X^{q-2})\} \quad (3.4)$$

eine zusammenhängende Theorie definieren (vgl. [2]). Man hat eine offensichtliche natürliche Transformation  $\varrho: k^*(X) \rightarrow h^*(X)$  mit  $\varrho^q(pt) = \text{id}$  für  $q \leq 0$ .  $h^*(-)$  und  $k^*(-)$  seien durch die Spektren  $\mathbf{E}$  bzw.  $\mathbf{K}$  dargestellt. Wir betrachten die Cofaser-Folge  $\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow \text{CK} \bigcup_q \mathbf{E} \rightarrow \dots$  in der Kategorie der Spektren. Weil  $\pi_q(\mathbf{K}) = 0$  ist für  $q < 0$  und  $\pi_q(\varrho)$  isomorph für  $q \geq 0$ , folgt  $\pi_q(\text{CK} \bigcup_q \mathbf{E}) = 0$  für  $q \geq 0$ . Sei nun  $\mathbf{E}$  ein Ringspektrum mit Multiplikationsabbildung  $\mu_{\mathbf{E}}: \mathbf{E} \wedge \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ . Dann faktorisiert die Abbildung  $\mu_{\mathbf{E}^0}(\varrho \wedge \varrho): \mathbf{K} \wedge \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{E}$  durch  $\varrho: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{E}$  und man verifiziert unschwer, dass auch  $\mathbf{K}$  ein Ringspektrum ist.  $\varrho$  ist trivialerweise eine Abbildung zwischen Ringspektren. Sei  $a \in h^2 P_\infty \mathbb{C}$  eine  $\mathbb{C}$ -Orientierung von  $h^*(-)$ . Wegen 3.4 ist  $k^2 P_\infty \mathbb{C} = \tilde{h}^2 P_\infty \mathbb{C}$  und somit ist auch  $k^*(-)$   $\mathbb{C}$ -orientierbar. Weil (vgl. (1.1)) die Koeffizienten der formalen Gruppe von  $h^*(-)$  negative Dimension haben, erfüllt  $k^*(-)$  genau dann die Voraussetzungen von 1.3, wenn dies für  $h^*(-)$  zutrifft. Nach 3.3 kann man nun eine multiplikative Transformation

$$\varphi: H^*(X, k^0(pt)) \rightarrow H^*(X, k^*(pt)) \approx k^*(X) \xrightarrow{p} h^*(X)$$

definieren, welche für  $X=pt$  die Identität auf  $k^0(pt) = h^0(pt)$  induziert. Wie oben definiert  $\varphi$  somit eine Aequivalenz

$$H^*(X, h^*(pt)) \approx h^*(X) \quad (3.5)$$

über der Kategorie der endlichen CW-Räume.

Sei nun  $X$  ein beliebiger CW-Komplex,  $\{X_\alpha\}$  das gerichtete System seiner endlichen Unterkomplexe. Entweder direkt oder mittels ([1], Prop. 17) verifiziert man die Beziehung  $H^*(X, h^*(pt)) \approx \varprojlim H^*(X_\alpha, h^*(pt))$  und man erhält eine Transformation additiver Kohomologietheorien über  $\mathbb{W}$ ,

$$h^*(X) \rightarrow \varprojlim h^*(X_\alpha) \approx \varprojlim H^*(X_\alpha, h^*(pt)) \approx H^*(X, h^*(pt)),$$

welche auf dem Punktraum einen Isomorphismus induziert. Weil alle betrachteten Transformationen produkttreu sind, ist damit Satz 1.3 bewiesen.

### *Bemerkung*

Die Äquivalenz 3.3 kann man auch direkt, ohne Rückgriff auf [1], herleiten.

### LITERATUR

- [1] ADAMS, J. F., *Lectures on generalised cohomology*, Springer lecture notes, Nr. 99 (1969).
- [2] DOLD, A., *Lectures on general cohomology*, Aarhus lecture notes series, Aarhus.
- [3] DOLD, A., *Chern classes in general cohomology*, Symposia Mathematica vol. V (1970).
- [4] QUILLEN, D., *Elementary proofs of some results of cobordism theory using Steenrod operations*, Advances in Mathematics 7 (1971), 28–56.
- [5] ROURKE, C. P., *Representing homology classes*, preprint, Warwick University (1972).
- [6] STEENROD, N. E. und EPSTEIN, D. B. A., *Cohomology operations*, Annals of Math. studies no. 50.
- [7] WÜRGLER, U., *Eine Bemerkung über  $\mathbb{R}$ -orientierte Kohomologietheorien*, erscheint in Archiv der Math.

*Mathematisches Institut der Universität  
D-6900 Heidelberg Im Neuenheimer Feld 9.*

Eingegangen den 25 Mai 1973.