Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 48 (1973)

Artikel: Arrondissement des variétés à coins - Appendice à "Corners and Arithmetic Groups"

Autor: Douady, A. / Hérault, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37167

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 26.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Appendice

Arrondissement des variétés à coins

par A. DOUADY et L. HÉRAULT

1. Secteurs

On pose $S_k^n = \mathbf{R}_+^k \times \mathbf{R}^{n-k}$. C'est le *secteur* type d'indice k dans $\mathbf{R}^n$. Soient U un ouvert de S_k^n, F un espace vectoriel réel de dimension finie, f une application de U dans F et $x_0 \in U$. On dit que f admet $\lambda \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, F)$ pour dérivée en x_0 si $f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + \eta(x)$ pour $x \in U$, où $\eta(x)$ est $o(x - x_0)$. La dérivée, si elle existe, est unique. On définit comme d'ordinaire les applications de classe C^1, C^r, C^∞ de U dans F.

On dit que f est analytique ou de classe C^ω en un point $x \in U$ si f est induite au voisinage de x par une application analytique d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dans F.

PROPOSITION. 1.1. *Si $U = S_k^n \cap V$, où V est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, toute application de classe C^∞ de U dans $\mathbf{R}$ se prolonge en une application de classe C^∞ de V dans $\mathbf{R}$.*

C'est un cas particulier du théorème de prolongement de Whitney ([31], [20]). On pourrait trouver pour ce cas particulier une démonstration plus simple que celle du cas général.

Soient U et U' des ouverts de S_k^n et $S_{k'}^{n'}$ respectivement, et f une application de U dans U'. On dit que f est de classe C^∞ (resp. C^ω) si elle est de classe C^∞ (resp. C^ω) de U dans $\mathbf{R}^{n'}$. On dit que f est un difféomorphisme si elle est bijective et si f et f^{-1} sont C^∞; on a alors $n = n'$ si $U \neq \emptyset$.

2. Variétés à coins

En prenant pour modèles les ouverts des S_k^n, $k \leqslant n \in \mathbf{N}$, et pour changements de cartes les difféomorphismes C^∞ (resp. C^ω), on obtient une catégorie locale qui est celle des *variétés à coins* C^∞ (resp. C^ω). (On peut aussi définir une variété à coins comme un espace annelé localement isomorphe à un modèle muni du faisceau des fonctions C^∞ (resp. C^ω).)

Soient X une variété à coins et $x \in X$. Il existe une carte φ de X centrée en x i.e. telle que $\varphi(x) = 0$. Si cette carte est à valeurs dans un ouvert de S_k^n, on dit que n est la dimension de X au voisinage de x et k est l'*indice* de x. On définit comme d'ordinaire l'espace vectoriel tangent T_xX. L'image réciproque de S_k^n dans T_xX par $T_x\varphi$ est le *secteur rentrant* ST_xX (il ne dépend pas du choix de la carte); son intérieur est noté

$S\mathring{T}_xX$. On dit que $t \in T_xX$ est rentrant (resp. strictement rentrant, resp. sortant, resp. strictement sortant) si $t \in ST_xX$ (resp. $S\mathring{T}_xX$, resp. $-ST_xX$, resp. $-S\mathring{T}_xX$).

On note $X^{(k)}$ l'ensemble des points de X d'indice $\geqslant k$. C'est le *k-bord* de X. L'ensemble $X = X - X^{(1)}$ est l'*intérieur* de X, $X^{(1)}$ est le *bord* de X. On dit que X est une *variété à bord lisse* si $X^{(2)} = \emptyset$.

Soit V une variété (sans bord) et soit X un fermé de V. On dit que X est une *pièce à coins* de V si, pour tout $x_0 \in X$, il existe un voisinage U de x_0 dans V et des fonctions $u_1, \ldots, u_k$ de classe C^∞ (resp. C^ω) sur U telles que $d_{x_0}u_1, \ldots, d_{x_0}u_k$ soient linéairement indépendants et que $X \cap U$ soit l'ensemble des $x \in U$ tels que $u_1(x) \geqslant 0, \ldots, u_k(x) \geqslant 0$.

On dit qu'un champ de vecteurs θ sur une variété à coins X est strictement rentrant (resp. strictement sortant) si $\theta(x) \in S\mathring{T}_xX$ (resp. $\theta(x) \in -S\mathring{T}_xX$) pour tout $x \in X$ (il suffit de le vérifier pour $x \in X^{(1)}$). Sur toute variété à coins paracompacte, il existe un champ de vecteurs de classe C^∞ strictement rentrant (resp. sortant), comme on le voit avec une partition C^∞ de l'unité.

Soient X une variété à coins séparée, θ un champ de vecteurs de classe C^∞ sur X, strictement rentrant. Pour $x \in X$, soit $\gamma_x : I_x \to X$ la courbe intégrale maximale de θ d'origine x. L'intervalle I_x contient l'origine et est ouvert à droite; si $x \in \mathring{X}$, l'intervalle I_x est un voisinage de 0. Soit $\varrho_\theta(x)$ la borne supérieure de I_x. La fonction $\varrho_\theta : X \to \overline{\mathbf{R}}_+$ est strictement positive et semi-continue inférieurement.

3. Plongement d'une variété à coins comme pièce à coins d'une variété

PROPOSITION 3.1. *Toute variété à coins paracompacte peut être plongée dans une variété sans bord comme pièce à coins C^∞.*

Démonstration. Soit X une variété à coins paracompacte, et choisissons sur X un champ de vecteurs θ_1 de classe C^∞ strictement rentrant. On construit, au moyen d'une partition de l'unité, une fonction $\eta : X \to \mathbf{R}_+$, de classe C^∞, strictement inférieure à ϱ_{θ_1}, et strictement positive sur $X^{(1)}$. Posons $\theta = \eta\theta_1$. Le champ de vecteurs θ est de classe C^∞, strictement rentrant, et $\varrho_\theta > 1$.

On voit alors que l'application $\exp\theta : X \to X$, qui, à $x \in X$ associe $\gamma_x(1)$, où γ_x est la courbe intégrale de θ d'origine x, est un difféomorphisme de X sur une pièce à coins de $\mathring{X}$, cqfd.

PROPOSITION 3.2. *Toute variété à coins* **R**-*analytique paracompacte peut être plongée dans une variété* **R**-*analytique sans bord comme pièce à coins de classe C^ω.*

La démonstration est analogue à celle donnée par Whitney et Bruhat ([32]) pour prouver que toute variété **R**-analytique paracompacte admet une complexification.

COROLLAIRE. *Soient X une variété à coins* **R**-*analytique paracompacte et $\mathscr{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X. On a $H^q(X; \mathscr{F}) = 0$ pour tout $q > 0$.*

Démonstration. Plongeons X comme pièce à coins dans une variété $\mathbf{R}$-analytique V et soit W une complexification de V. D'après un résultat de Grauert ([15], p. 470, 1.11), tout voisinage ouvert U de X dans V admet un système fondamental de voisinages de Stein dans W, donc X admet dans W un système fondamental de voisinages de Stein. On obtient alors le corollaire en appliquant un résultat de Cartan ([1], prop. 6), cqfd.

PROPOSITION 3.3. *Sur toute variété* $\mathbf{R}$*-analytique à coins paracompacte, il existe un champ de vecteurs strictement rentrant de classe* C^{ω}.

Démonstration. Soit X une pièce à coins d'une variété $\mathbf{R}$-analytique paracompacte V. D'après ([15], Th. 3), on peut plonger V dans $\mathbf{R}^k$ pour k assez grand. Le fibré T_V admet dans le fibré trivial $V\times\mathbf{R}^k$ un supplémentaire analytique, par exemple l'orthogonal. Il résulte alors de ([15], Prop. 8) que tout champ de vecteurs C^{∞} sur V peut être approché par un champ de vecteurs analytique au sens suivant: si θ est un champ de vecteurs C^{∞} et $\varepsilon: V\to\mathbf{R}$ une fonction continue strictement positive, il existe un champ de vecteurs θ' de classe C^{ω} sur V tel que pour tout $x\in V$ on ait $\|\theta'(x)-\theta(x)\| <\varepsilon(x)$. Alors, si θ est strictement rentrant sur X, on peut choisir ε de façon que ceci entraîne que θ' est strictement rentrant sur X, cqfd.

4. Champs de vecteurs strictement sortants

Soient X une pièce à coins d'une variété V, et θ un champ de vecteurs de classe C^{∞} (resp. C^{ω}) sur V, strictement sortant de X. Pour $x\in V$, soit $\gamma_x:]-a'(x), a(x)[\to V$ la courbe intégrale maximale de θ d'origine x dans V. S'il existe un $t_0\in]-a'(x), a(x)[$ tel que $\gamma_x(t_0)\in X^{(1)}$, on voit en prenant des coordonnées locales que la courbe γ_x sort de X en t_0, i.e. qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que $\gamma_x(]t_0-\varepsilon, t_0])\subset X$ et $\gamma_x(]t_0, t_0+\varepsilon[)\subset V-X$. Il en résulte que $\gamma_x(]-a'(x), t_0])\subset X$ et $\gamma_x(]t_0, a(x)[)\subset V-X$, et il existe au plus un tel t_0.

PROPOSITION 4.1. *Avec ces notations, il existe un voisinage M de $X^{(1)}$ dans V tel que*:

(a) *pour tout $x\in M$, il existe un $b(x)\in]-a'(x), a(x)[$ et un seul tel que $\gamma_x(b(x))\in X^{(1)}$*;

(b) *l'application $b:M\to\mathbf{R}$ ainsi définie est continue.*

Démonstration. Soit $x_0\in X^{(1)}$. Il existe un voisinage U de x_0 dans V, des fonctions $u_1,\dots,u_k$ de classe C^{∞} sur U et un nombre $m>0$ tels que $X\cap U=\{x\in U: u_1(x)\geqslant 0,\dots,u_k(x)\geqslant 0\}$, $u_i(x_0)=0$ et $\langle\theta(x), d_xu_i\rangle\leqslant -m$ pour $x\in U$, $i=1,\dots,k$. Il existe alors un voisinage U' de x_0 dans U et un nombre $r>0$ tels que, pour tout $x\in U'$, on ait $[-r, +r]\subset]-a'(x), a(x)[$ et $\gamma_x([-r, +r])\subset U$. Soit U'' l'ensemble des $x\in U'$ tels que $u_i(x)<mr$ pour $i=1,\dots,k$. Pour $x\in U''$, on a $\gamma_x(-r)\in U\cap\mathring{X}$ et $\gamma_x(r)\in U-X$, donc il existe un $b(x)\in]-r, +r[$ tel que $\gamma_x(b(x))\in X^{(1)}$.

Pour $x \in U''$, $t \in]-r, +r[$ et $i=1, \ldots, k$, posons $h_i(x, t) = u_i(\gamma_x(t))$. On a $\partial h_i/\partial t < 0$ et $h_i(x, t)$ tend vers $u_i(\gamma_x(r)) < 0$ (resp. $u_i(\gamma_x(-r)) > 0$) quand t tend vers r (resp. $-r$), donc l'ensemble des couples (x, t) tels que $h_i(x, t) = 0$ est le graphe d'une fonction $b_i : U'' \to]-r, r[$ de classe C^∞, et $b = \inf_i(b_i)$ est continue. La proposition en résulte.

PROPOSITION 4.2. *Avec les mêmes notations, soit M comme dans la Prop.* 4.1; *l'application $\varphi : x \mapsto (\gamma_x(b(x)), b(x))$ est un homéomorphisme de M sur un voisinage W de $X^{(1)} \times \{0\}$ dans $X^{(1)} \times \mathbf{R}$.*

Démonstration. Il est clair que φ est continue. Son image est l'ensemble des $(x_1, t) \in X^{(1)} \times \mathbf{R}$ tels que $-t \in]-a'(x_1), a(x_1)[$ et $\varphi_{x_1}(-t) \in M$. Cet ensemble est un voisinage de $X^{(1)} \times \{0\}$ et l'application $(x_1, t) \mapsto \gamma_{x_1}(-t)$ de W dans M est continue. Or cette application est φ^{-1}, d'où la proposition.

PROPOSITION 4.3. *Avec les mêmes notations, supposons V séparée et M ouvert. La relation $R\{x, y\} : \exists t$* tel que *$y = \gamma_x(t)$ est une relation d'équivalence entre éléments de M et le quotient M/R admet une structure de variété C^∞ (resp. C^ω) et une seule telle que l'application canonique $\chi : M \to M/R$ soit une submersion. Cette application induit un homéomorphisme de $X^{(1)}$ sur M/R.*

Démonstration. Il est clair que R est une relation d'équivalence. L'ensemble $\Omega \subset M \times \mathbf{R}$ des couples (x, t) tels que $t \in]-a'(x), a(x)[$ et $\gamma_x(t) \in M$ est ouvert dans $M \times \mathbf{R}$ et $\Phi : (x, t) \mapsto (x, \gamma_x(t))$ de Ω dans $M \times M$ est une immersion dont l'image est le graphe de R. Il suffit de voir que Φ est un homéomorphisme de Ω sur un fermé de $M \times M$, la première assertion résultera alors de ([9], 5.9.5). Le graphe de R est $\varphi^{-1}(\Omega \times_{X^{(1)}} \Omega)$, donc est fermé, et l'inverse de Φ est

$$(\varphi^{-1}(x_1, t), \varphi^{-1}(x_1, t')) \mapsto (\varphi^{-1}(x_1, t), t - t'),$$

qui est continue, d'où la première assertion.

L'application $\chi/X^{(1)}$ est continue, et son inverse est l'application déduite de $x \mapsto \gamma_x(b(x))$, donc est continue.

5. Fonctions tapissantes

DÉFINITION. Soient U un voisinage de 0 dans S_k^n et h une fonction $U \to \mathbf{R}$. On dit que h est tapissante en 0 si h se met au voisinage de 0 sous la forme $h(x) = f(x) \cdot x_1 \ldots x_k$, où f est C^∞ et >0.

Remarque. Dans cette définition, si h est analytique, il en est de même de f.

PROPOSITION 5.1. *Soient U et U' deux ouverts de S_k^n contenant* 0 *et φ un dif-*

féomorphisme de U sur U' tel que $\varphi(0)=0$. Si h est une fonction sur U tapissante en 0, *la fonction $\varphi_*(h)=h\circ\varphi^{-1}$ sur U' est tapissante en* 0.

Démonstration. Soit u_i la fonction $x\mapsto x_i$. L'application φ permute les faces de S_k^n au voisinage de 0 suivant une permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_k$. La fonction $\varphi_*(u_i)$ est nulle sur la $\sigma(i)$-ème face au voisinage de 0, et a une dérivée normale >0, donc est au voisinage de 0 de la forme $g_i u_{\sigma(i)}$, où g_i est C^∞ et >0. Alors $\varphi_*(h)=\varphi_*(f)\cdot g_1\dots g_k\cdot u_1\dots u_k$ au voisinage de 0.

DÉFINITION. Soient X une variété à coins, et h une fonction sur X. On dit que h est tapissante en un point x de X s'il existe une carte centrée en x telle que l'expression de h dans cette carte soit tapissante en 0.

Remarques

5.2. Si h est tapissante en x pour une carte, elle l'est pour toutes d'après la prop. 5.1.

5.3. Si h est tapissante en x, elle l'est au voisinage de x.

5.4. Si $x\in\mathring{X}$, h est tapissante en $x\Leftrightarrow h$ est C^∞ au voisinage de x et $h(x)>0$. Si x est d'indice $k\geqslant 1$, et si h est tapissante en x, on peut trouver une carte centrée en x telle que l'expression de h soit $u_1\dots u_k$.

5.5. Un barycentre de fonctions tapissantes est tapissante. Sur toute variété à coins paracompacte, il existe une fonction tapissante de classe C^∞.

PROPOSITION 5.6. *Sur toute variété à coins* **R**-*analytique paracompacte, il existe une fonction tapissante de classe C^ω.*

Démonstration. Soient X une variété à coins **R**-analytique paracompacte, (U_i) un recouvrement de X par des domaines de cartes, et pour tout i, h_i une fonction tapissante analytique sur U_i. La fonction $g_{i,j}=\mathrm{Log}(h_j/h_i)$ se prolonge en une fonction analytique sur $U_i\cap U_j$, et on a $g_{i,k}=g_{i,j}+g_{j,k}$ sur $U_i\cap U_j\cap U_k$. D'après le Cor. de la Prop. 3.2, il existe des fonctions analytiques $c_i: U_i\to\mathbf{R}$ telles que $g_{i,j}=c_j-c_i$. Les fonctions $e^{-c_i}h_i$ se recollent alors en une fonction analytique tapissante sur X, cqfd.

PROPOSITION 5.7. *Soient X une variété à coins, h une fonction tapissante sur X et θ un champ de vecteurs strictement sortant sur X. Il existe un voisinage N de $X^{(1)}$ dans X tel que on ait $\langle\theta(x), d_xh\rangle<0$ pour tout $x\in N-X^{(2)}$.*

Démonstration. Soit x_0 un point de $X^{(1)}$ et soit $(u_1,\dots,u_n)$ un système de coordonnées centré en x_0 tel que $h=u_1\dots u_k$. Soient $\theta_1,\dots,\theta_n$ les coordonnées de θ dans ce système, i.e. $\theta_i=\langle\theta, du_i\rangle$. On a $\theta_1,\dots,\theta_k<0$ au voisinage de x_0, d'où $\langle\theta, dh\rangle$

$=\sum u_1 \dots \hat{u}_i \dots u_k \theta_i \leqslant 0$, et $\langle \theta, dh \rangle < 0$ en tout point où un au plus des u_i s'annule, car alors la somme possède un terme non nul.

6. Arrondissement des coins

PROPOSITION 6.1. *Soient X une variété à coins paracompacte et h une fonction tapissante sur X. Supposons que X soit une pièce à coins d'une variété V et soit θ un champ de vecteurs C^∞ sur V strictement sortant de X. Soit M un voisinage ouvert de $X^{(1)}$ dans V répondant aux conditions de la Prop.* 4.1. *Alors, il existe un voisinage N de $X^{(1)}$ dans $M \cap X$ tel que l'application $\psi : x \mapsto (\chi(x), h(x))$ soit un homéomorphisme de N sur un voisinage de $M/R \times \{0\}$ dans $M/R \times \mathbf{R}_+$.*

Démonstration. Avec les notations de la proposition 4.2, soit f une fonction continue strictement positive sur $X^{(1)}$ telle que l'ensemble $N_1 = \{(x, t) : 0 \leqslant t \leqslant f(x)\}$ soit contenu dans W. Posons $N = \varphi^{-1}(N_1)$. L'ensemble N est un voisinage de $X^{(1)}$ dans $M \cap X$, et, quitte à diminuer f, on peut supposer qu'il répond à la condition de la Prop. 5.7. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} N_1 & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & N & \xrightarrow{\psi = (\chi, h)} & M/R \times \mathbf{R}_+ \\ \downarrow \pi & & & & \downarrow \\ X^{(1)} & & \xrightarrow{\chi_1} & & M/R \end{array}$$

où π est propre, χ_1 est un homéomorphisme et, pour tout $x \in X^{(1)}$, la fonction $t \mapsto h(\varphi^{-1}(x, t))$ est strictement croissante sur $[0, f(x)]$ car sa dérivée est >0 pour $t > 0$. La proposition en résulte.

THÉORÈME ET DÉFINITION 6.2. *Soient X une variété à coins paracompacte de classe C^∞ (resp. C^ω), h une fonction tapissante de classe C^∞ (resp. C^ω) et θ un champ de vecteurs strictement sortant de classe C^∞ (resp. C^ω) sur X. Soit N un voisinage ouvert de $X^{(1)}$ dans X répondant aux conditions de la Prop.* 6.1. *Il existe alors une variété à bord lisse $\tilde{X}$ de classe C^∞ (resp. C^ω) et une seule, ayant même espace topologique sous-jacent que X, telle que les structures de X et $\tilde{X}$ coïncident sur $X - X^{(2)}$, et que ψ soit un difféomorphisme (resp. un difféomorphisme C^ω) de N muni de la structure induite par $\tilde{X}$ sur un ouvert de $M/R \times \mathbf{R}_+$. On dit que $\tilde{X}$ est la variété obtenue en arrondissant X au moyen de h et θ.*

Démonstration. Il reste à voir que ψ induit un difféomorphisme (resp. un difféomorphisme $\mathbf{R}$-analytique) de $N - X^{(2)}$ sur un ouvert de $M/R \times \mathbf{R}_+$, mais cela résulte du théorème d'inversion locale, cqfd.

BIBLIOGRAPHY

[1] BIERI, R. and ECKMANN, B., *Groups with homological duality generalizing Poincaré duality*, Invent. Math. *20* (1973), 103–124.

[2] BOREL, A., *Density and maximality of arithmetic subgroups*, J. f. reine angew. Math. *224* (1966), 78–89.

[3] ——, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Act. Sci. Ind. 1341, Hermann éd. Paris 1969.

[4] ——, *Linear algebraic groups* (Notes by H. Bass), Benjamin Lecture Notes Series, New York 1969.

[5] BOREL, A. and HARISH-CHANDRA, *Arithmetic subgroups of algebraic groups*, Ann. of Math. *75* (1962), 485–535.

[6] BOREL, A. et SERRE, J-P., *Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne*, Comment. Math. Helv. *39* (1964), 111–169.

[7] ——, *Adjonction de coins aux espaces symétriques. Applications à la cohomologie des groupes arithmétiques*, C. R. Acad. Sci. Paris *271* (1970), 1156–1158.

[8] BOREL, A. et TITS, J., *Groupes réductifs*, Publ. Math. I.H.E.S. *27* (1965), 55–151. (Compléments, *ibid. 41* (1972), 253–276.)

[9] BOURBAKI, N., *Variétés différentielles et analytiques*. Fascicule de résultats. Act. Sci. Ind. 1333, 1347, Paris 1967.

[10] BROWN, M., *Locally flat imbeddings of topological manifolds*, Ann. of Math. *75* (1962), 331–341.

[11] CARTAN, H., *Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes*, Bull. Soc. Math. France *85* (1957), 77–99.

[12] ——, *Espaces fibrés et homotopie*, Séminaire ENS 1949/50, W. A. Benjamin, New York, 1967.

[13] ——, *Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux*, Séminaire ENS 1950/51, W. A. Benjamin, New York, 1967.

[14] GARLAND, H., *p-adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p-adic groups*, Ann. of Math. *98* (1973), 375–423.

[15] GRAUERT, H., *On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds*, Ann. of Math. *68* (1958), 660–671.

[16] HANNER, O., *Some theorems on absolute neighborhood retracts*, Arkiv för Mat. *1* (1950), 389–408.

[17] ——, *Retraction and extension of mappings of metric and non-metric spaces*, Arkiv för Mat. *2* (1952), 315–360.

[18] HARDER, G., *A Gauss-Bonnet formula for discrete arithmetically defined groups*, Annales Sci. E.N.S. *4* (1971), 409–455.

[19] LUNDELL, A. and WEINGRAM, S., *The Topology of CW Complexes*, van Nostrand, New York, 1969.

[20] MALGRANGE, B., *Ideals of differentiable functions*, Bombay and Oxford Univ. Press (1966).

[21] MOSTOW, G. D., *Self-adjoint groups*, Ann. of Math. *62* (1955), 44–55.

[22] ——, *Fully reducible subgroups of algebraic groups*, Amer. J. Math. *78* (1956), 200–221.

[23] MUNKRES, J. R., *Elementary Differential Topology* (revised edition), Ann. of Math. Studies 54, 1966.

[24] PALAIS, R., *Homology theory of infinite dimensional manifolds*, Topology *5* (1966), 1–16.

[25] RAGHUNATHAN, M. S., *A note on quotients of real algebraic groups by arithmetic subgroups*, Invent. Math. *4* (1968), 318–335.

[26] SERRE, J-P., *Cohomologie des groupes discrets*, Ann. of Math. Studies *70* (1971), 77–169.

[27] SIEGEL, C. L., *Zur Reduktionstheorie der quadratischen Formen*, Publ. Math. Soc. Japan *5*, 1959 (Gesam. Abh. 111, p. 275–333).

[28] SOLOMON, L., *The Steinberg character of a finite group with BN-pair*, Theory of Finite Groups (R. Brauer and C-H. Sah ed.), W. A. Benjamin, New York, 1969, 213–221.

[29] TITS, J., *Structures et groupes de Weyl*, Séminaire N. Bourbaki, exposé *288* (févr. 1965), W. A. Benjamin, New York, 1966.

[30] WEIL, A., *Sur les théorèmes de de Rham*, Comment. Math. Helv. *26* (1952), 119–145.

[31] WHITNEY, H., *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc. *36* (1936), 63–89.
[32] WHITNEY, H. et BRUHAT, F., *Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques réels*, Comm. Math. Helv. *33* (1959), 132–160.

The Institute for Advanced Study, Princeton, N.J. 08540, USA
Collège de France, 75231 Paris Cedex 05, France

Received June 4, 1973